Capítulo 7

APLICAÇÕES DA DERIVADA

7.1 Variação de Funções

Definição 7.1. *Seja f uma função e $x_0 \in Dom(f)$.*

1. *f possui um ponto de* **máximo relativo** *ou de* **máximo local** *no ponto x_0, se existe um pequeno intervalo aberto I que contem x_0 tal que:*

$$\boxed{f(x_0) \geq f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in I \cap Dom(f)}$$

   A imagem de x_0, $f(x_0)$, é chamada valor máximo local de f.

2. *f possui um ponto de* **mínimo relativo** *ou de* **mínimo local** *no ponto x_0, se existe um pequeno intervalo aberto I que contem x_0 tal que:*

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0), \quad \text{para todo} \quad x \in I \cap Dom(f)}$$

   A imagem de x_0, $f(x_0)$, é chamada valor mínimo local de f.

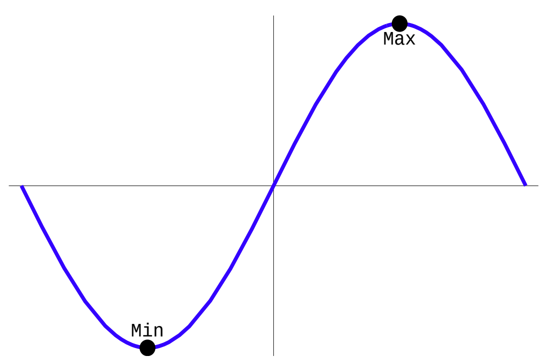

Figura 7.1: Pontos de mínimo e máximo.

Em geral, um ponto de máximo ou de mínimo é chamado ponto extremo.

Exemplo 7.1.

[1] Seja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Na verdade $x_0 = 0$ é o único ponto extremo de f.

[2] Seja $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$; $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo relativo, pois $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Como no exemplo anterior, $x_0 = 0$ é o único ponto extremo de f.

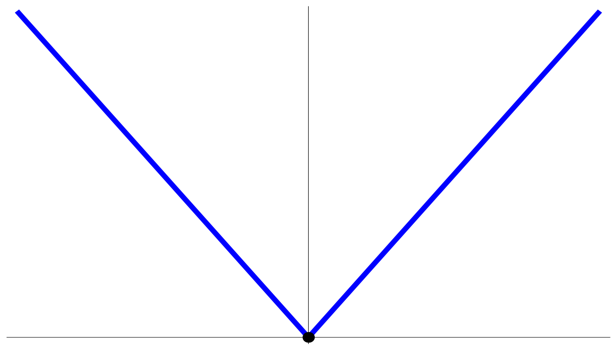

Figura 7.2: Gráfico de $f(x) = |x|$.

[3] Seja $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. f não possui pontos de máximo ou mínimo relativos em $\mathbb{R}$. Se f é restrita ao intervalo $\big(-1, 1\big]$, então f possui o ponto $x_0 = 1$ de máximo relativo. Se f é restrita ao intervalo $[0, 2]$, então f possui o ponto $x_0 = 2$ de máximo relativo e o ponto $x_0 = 0$ de mínimo relativo. Se f é restrita ao intervalo $(0, 1)$, então f não possui pontos de máximo relativo ou de mínimo relativo.

Estes exemplos nos indicam a importância dos domínios das funções quando queremos determinar pontos extremos.

Proposição 7.1. *Se f é uma função derivável no intervalo (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ é um extremo relativo de f, então $f'(x_0) = 0$.*

A proposição nos indica que num ponto de máximo ou de mínimo relativo de uma função f, a reta tangente ao gráfico de f nesses pontos é paralela ao eixo dos x. Para a prova veja o apêndice.

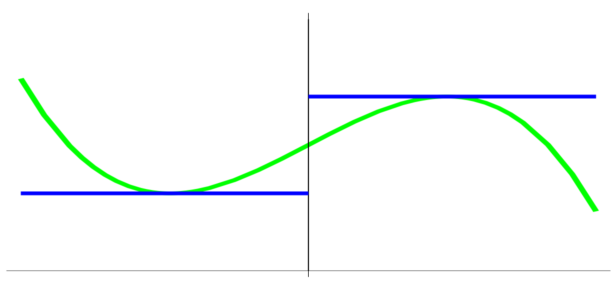

Figura 7.3:

A proposição não garante a existência de pontos extremos.

Exemplo 7.2.

$f(x) = x^3$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2$; logo $f'(0) = 0$, mas $x_0 = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo relativo de f; de fato, $f(-1) < f(0) < f(1)$.

A proposição nos dá uma condição necessária para que um ponto seja extremo.

Definição 7.2. *Seja f uma função derivável no ponto $x_0 \in Dom(f)$. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 é chamado* **ponto crítico de** f.

Pela proposição anterior, todo ponto extremo é ponto crítico. A recíproca é falsa. (Veja exemplo anterior).

Exemplo 7.3.

[1] Seja $f(x) = x^3$; resolvemos $f'(x) = 3\,x^2 = 0$; então $x = 0$ é o único ponto crítico de f.

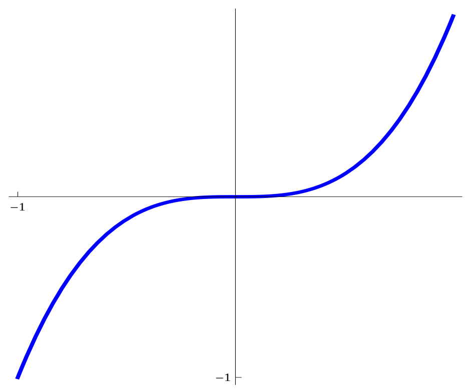

Figura 7.4: Ponto crítico de $f(x) = x^3$.

[2] Seja $f(x) = x^3 - 3\,x$; resolvemos $f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 0$; então, $x = 1$ e $x = -1$ são os pontos críticos de f.

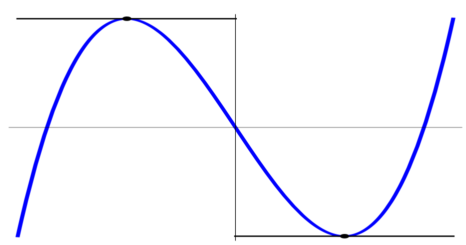

Figura 7.5: Pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3\,x$.

Na verdade um ponto "candidato"a máximo ou mínimo relativo de uma função derivável f sempre deve satisfazer à equação:

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Mais adiante saberemos descartar dos pontos críticos, aqueles que não são extremais.

Definição 7.3.

1. *O ponto onde uma função atinge o maior valor (se existe) é chamado máximo absoluto da função. O ponto x_0 é de* **máximo absoluto de** *f quando para todo $x \in Dom(f)$, tem-se $f(x_0) \geq f(x)$.*

2. *O ponto onde uma função atinge o menor valor (se existe) é chamado mínimo absoluto da função. O ponto x_0 é de* **mínimo absoluto de** *f quando para todo $x \in Dom(f)$, tem-se $f(x_0) \leq f(x)$.*

Um ponto de máximo absoluto é um ponto de máximo local. A recíproca é falsa; analogamente para mínimo absoluto.

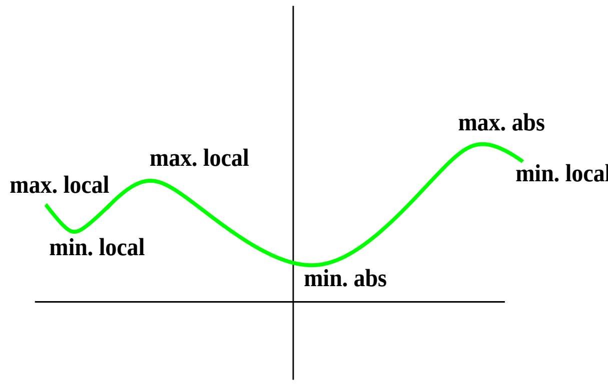

Figura 7.6: Pontos de máximos e mínimos

Exemplo 7.4.

[1] Seja $f(x) = 2\,x$ tal que $x \in [0,2]$. O ponto $x_0 = 2$ é um ponto de máximo absoluto de f.

De fato: $f(x) \leq f(2) = 4$, para todo $x \in [0,2]$ e $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo absoluto de f, pois $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in [0,2]$. Se f é definida em $(0,2)$, f não possui máximos nem mínimos.

[2] Seja $f(x) = x^2$ tal que $x \in [-1,2]$.

$x_0 = -1$ e $x_0 = 2$ são pontos de máximos locais, mas $x_0 = 2$ é máximo absoluto de f, pois $f(x) \leq f(2) = 4$, para todo $x \in [-1,2]$ e $x_0 = 0$ é um mínimo absoluto de f, pois $f(x) \geq f(0) = 0$, para todo $x \in [0,2]$.

O teorema seguinte, devido a Weierstrass, garante a existência de pontos extremos de uma função, sem a hipótese de que a função seja derivável. A prova deste teorema será omitida. Para mais detalhes veja a bibliografia avançada.

Teorema 7.1. (Weierstrass)
Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então existem x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \ \textit{para todo } x \in [a,b].$$

No teorema as hipóteses de que o domínio seja um intervalo do tipo $[a,b]$ e de que a função seja contínua são condições essenciais.

De fato, a função contínua $f(x) = x$ não possui pontos de máximo nem de mínimo em qualquer intervalo aberto. A função descontínua $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, não possui ponto de máximo nem de mínimo no intervalo $[-1, 1]$.

Teorema 7.2. (Rolle)
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) e é tal que $f(a) = f(b)$, então, existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Exemplo 7.5.

O custo pela compra de uma quantidade x de um certo produto é modelado por:

$$C(x) = 0.75\,(x - 1)\,(x - 20)^2 + 400$$

em milhares de u.m. Note que, $C(1) = C(20)$; logo, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (1, 20)$ tal que $C'(c) = 0$. Por outro lado:

$$C'(x) = \frac{(x - 20)\,(3\,x - 22)}{4}.$$

Logo, $C'(c) = 0$ se, e somente se $c \cong 7.33$. Isto é a taxa de variação do custo é zero quando são comprados aproximadamante 8 produtos.

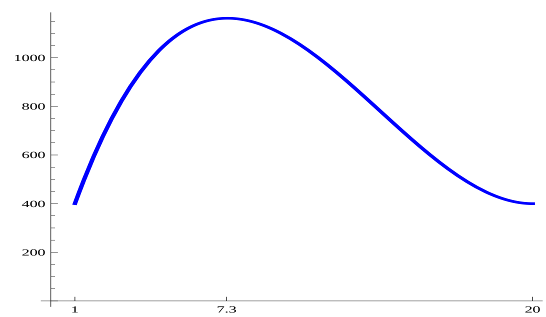

Figura 7.7: Gráfico do custo.

Teorema 7.3. (do Valor Médio)
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe pelo menos um $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(x_0)\,(b - a)}.$$

Em outras palavras, existe um ponto no gráfico de f, onde a reta tangente nesse ponto é paralela à reta secante que liga $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Sabemos que uma função constante tem derivada nula. O Teorema do Valor Médio nos fornece a recíproca desta propriedade, como veremos a seguir.

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então $f(x) = g(x) + k$, onde k é uma constante.

7.2 Funções Monótonas

Seja $y = f(x)$ uma função definida num domínio D.

Definição 7.4.

1. *f é* **crescente** *em D se para todo $x_0,\ x_1 \in D$ com $x_0 < x_1$, tem-se $f(x_0) < f(x_1)$.*
2. *f é* **decrescente** *em D, se para todo $x_0,\ x_1 \in D$ com $x_0 < x_1$, tem-se $f(x_0) > f(x_1)$.*
3. *Em ambos os casos, f é dita monótona.*

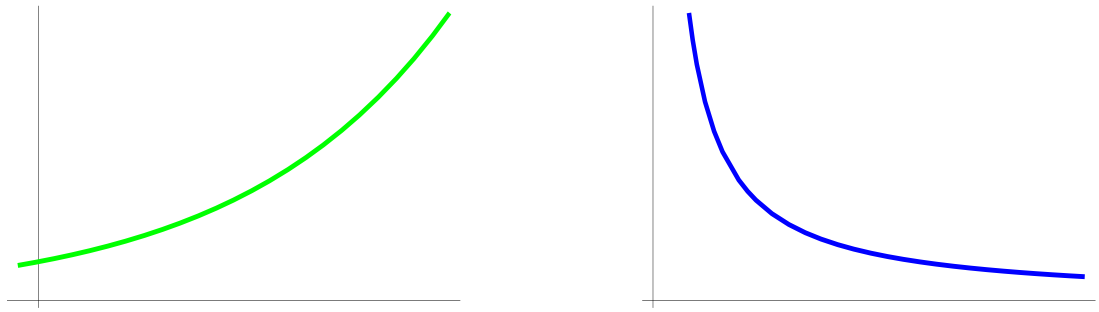

Figura 7.8: Funções crescente e decrescente, respectivamente.

Exemplo 7.6.

[1] Seja $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$; $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Sejam $x_0,\ x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $\dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_0}$. Logo, $f(x_1) < f(x_0)$ e f é monótona decrescente.

[2] Seja $y = f(x) = \sqrt{x}$; $D = [0, +\infty)$.

Sejam $x_0,\ x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $\sqrt{x_0} < \sqrt{x_1}$. Logo, $f(x_0) < f(x_1)$ e f é monótona crescente.

[3] Seja $y = f(x) = x^2$; $D = \mathbb{R}$.

Sejam $x_0,\ x_1 \in D$ tal que $x_0 < x_1$; então: $x_0^2 < x_1^2$, se $0 \leq x_0$ e $0 < x_1$ e $x_1^2 < x_0^2$, se $x_0 < 0$ e $x_1 \leq 0$. Logo, $f(x_0) < f(x_1)$ em $[0 + \infty)$ e $f(x_1) < f(x_0)$ em $(-\infty, 0)$; f é monótona crescente em $(0, +\infty)$ e monótona decrescente em $(-\infty, 0)$.

O exemplo anterior nos mostra que, em geral, uma função pode ter partes do domínio onde é crescente e partes onde é decrescente.

Proposição 7.2. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é decrescente em $[a,b]$.*

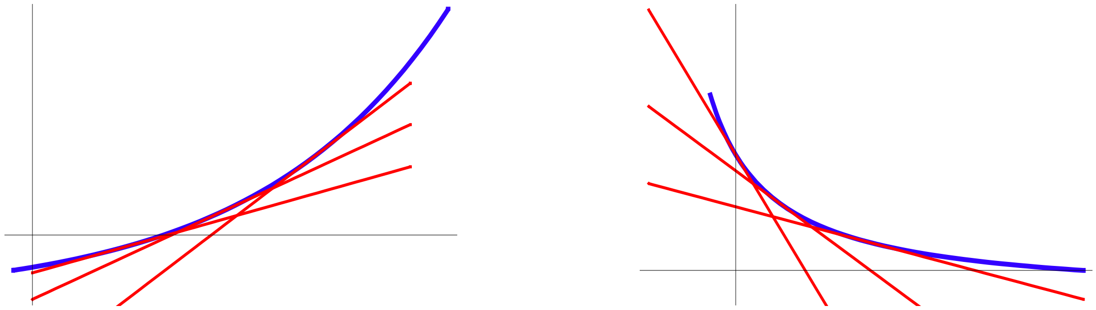

Figura 7.9:

Exemplo 7.7.

[1] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$.

Derivando f temos $f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3\,(x+1)\,(x-1)$; logo, $f'(x) < 0$ se, e somente se $-1 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ se, e somente se $x < -1$ ou $x > 1$. Logo, f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente em $(-1, 1)$.

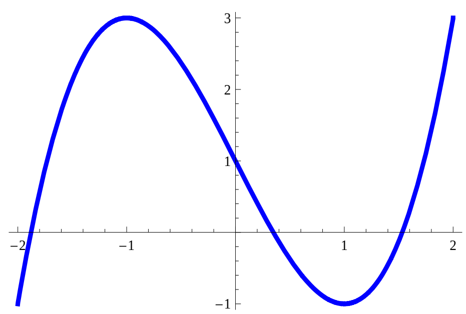

Figura 7.10: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$.

[2] Uma empresa agrícola determinou que a relação entre a produção P, em toneladas, de certo tipo de soja e a quantidade x, de um certo fertilizante é dada por:

$$P(x) = 15\,x + x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento da produção.

Derivando P temos $P'(x) = 15 + 2\,x - x^2$; logo, $P'(x) > 0$ se, e somente se $-3 < x < 5$ e $P'(x) < 0$ se, e somente se $x < -3$ ou $x > 5$. Como $x \geq 0$ temos:

Intervalos	$P'(x)$	$P(x)$
$0 < x < 5$	> 0	crescente
$5 < x$	< 0	decrescente

f é crescente em $(0,5)$ e decrescente em $(5,+\infty)$.

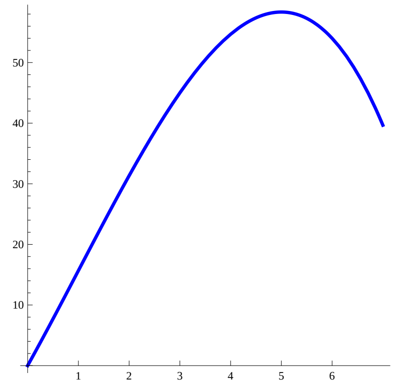

Figura 7.11: Gráfico de $P = P(x)$

[3] Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5$.

Derivando f temos $f'(x) = x^3 - x^2 - 2\,x = x\,(x-2)\,(x+1)$; logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = 0$, $x = 2$ e $x = -1$.

Intervalos	$x\,(x-2)\,(x+1)$	$f(x)$
$-1 < x < 0$	> 0	crescente
$0 < x < 2$	< 0	decrescente
$x > 2$	> 0	crescente
$x < -1$	< 0	decrescente

f é crescente em $(-1,0) \cup (2,+\infty)$ e decrescente em $(0,2) \cup (-\infty,-1)$.

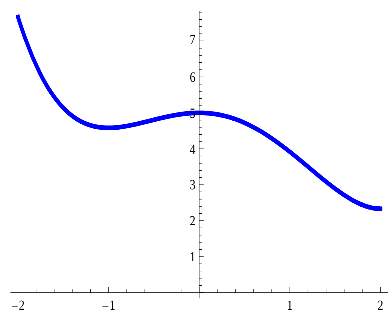

Figura 7.12: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5$

[4] Uma pequena empresa pode vender todos os artigos que produz semanalmente a um preço de 6 reais por unidade. O custo para produzir x artigos por semana, em reais, é dado por $C(x) = 1000 + 6\,x - 0.003\,x^2 + 0.000001\,x^3$. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento do lucro.

Primeiramente observamos que a função da receita é $R(x) = 6\,x$, então:

$$L(x) = R(x) - C(x) = -1000 + 0.003\,x^2 - 0.000001\,x^3.$$

Derivando, $L'(x) = 0.006\,x - 0.000003\,x^2$, logo, $L'(x) < 0$ se, e somente se $x > 2000$ e $L'(x) > 0$ se, e somente se $0 < x < 2000$.

Intervalos	$L'(x)$	$L(x)$
$0 < x < 2000$	> 0	crescente
$2000 < x$	< 0	decrescente

O lucro decresce em $(2000, +\infty)$ e cresce em $(0, 2000)$

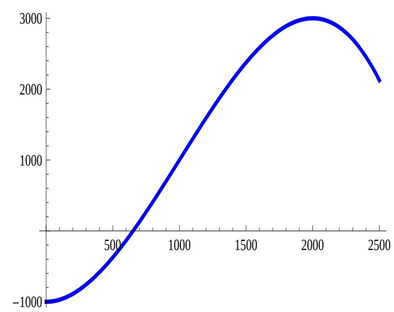

Figura 7.13: Gráfico de $L = L(x)$

[5] A função $Q(t) = Q_0\,e^{kt}$ $(k \neq 0)$ é crescente se $k > 0$ e decrescente se $k < 0$, o que justifica seu nome.

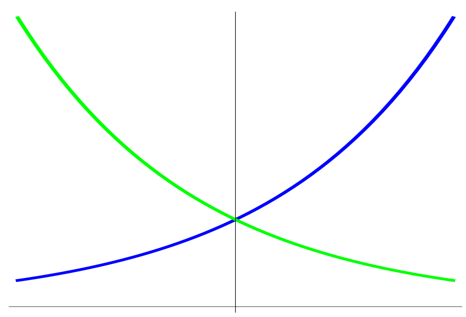

Figura 7.14: Gráficos de $Q(t) = Q_0\,e^{kt}$, para $k > 0$ e $k < 0$.

[6] **Crescimento populacional inibido:** Considere uma colônia de coelhos com população inicial P_0 numa ilha sem predadores. Seja $P = P(t)$ a população no instante t. Estudos ecológicos mostram que a ilha pode suportar uma quantidade máxima de P_1 indivíduos. Sabemos que este fenômeno é modelado pela função logística que satisfaz à equação:

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\,(P_1 - P), \quad (k > 0).$$

Se $P_1 > P$, então $\dfrac{dP}{dt} > 0$, de modo que a população $P = P(t)$ cresce.

Se $P_1 < P$, então $\dfrac{dP}{dt} < 0$, de modo que a população $P = P(t)$ decresce.

Se $P_1 = P$, então $\dfrac{dP}{dt} = 0$, de modo que a população $P = P(t)$ fica estável.

7.3 Determinação de Máximos e Mínimos

Teorema 7.4. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), exceto possivelmente num ponto x_0.*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de máximo de f.*

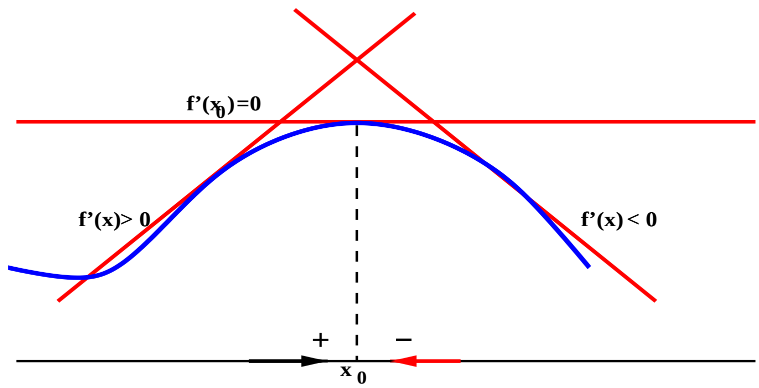

Figura 7.15: Máximo local.

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > x_0$, então x_0 é ponto de mínimo de f.*

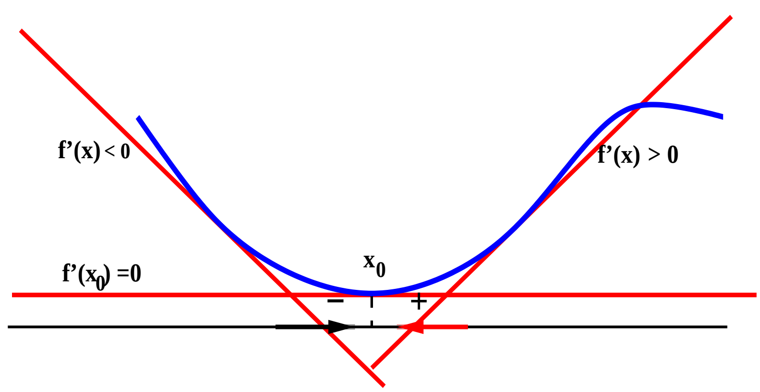

Figura 7.16: Mínimo local.

Do teorema 7.4 segue que num ponto de máximo ou de mínimo de uma função contínua nem sempre existe derivada.

Exemplo 7.8.

[1] Seja $f(x) = |x|$, definida em $\mathbb{R}$; claramente $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo de f, mas $f'(0)$ não existe. De fato. Para todo $x \neq 0$, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

[2] $f(x) = x^3$. O ponto crítico é a solução da equação $f'(x_0) = 0$ ou, equivalentemente, $3\,x_0^2 = 0$; então, $x_0 = 0$. Por outro lado, $f'(x) = 3\,x^2 > 0$, se $x \neq 0$; logo, $x_0 = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo de f.

[3] $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$. As soluções da equação $f'(x_0) = 0$ são $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$. Do exemplo 2 do parágrafo anterior, $f'(x) > 0$, se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$, se $x \in (-1, 1)$:

Figura 7.17: Esquematicamente

Então, $x_0 = -1$ é ponto de máximo e $x_0 = 1$ é ponto de mínimo de f.

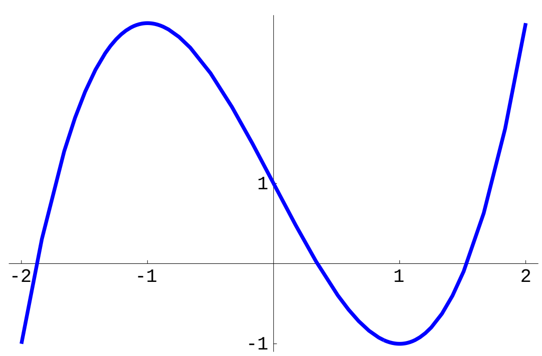

Figura 7.18: Gráfico de $f(x) = x^3 - 3\,x + 1$.

[4] $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. f não é derivável em 0.

De fato, $f'(x) = -\frac{2}{3\,\sqrt[3]{x}}$ se $x \neq 0$. Por outro lado, $f'(x) < 0$ se $x > 0$ e $f'(x) > 0$ se $x < 0$. Então, $x = 0$ é ponto de máximo e $f(0) = 1$ é o valor máximo.

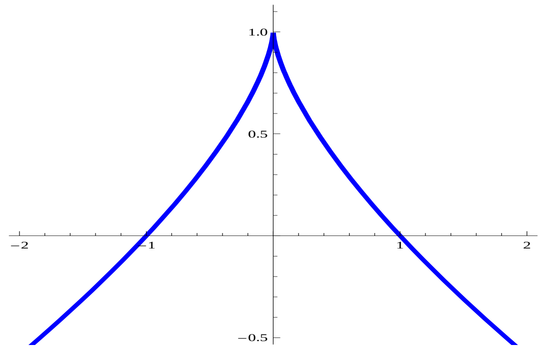

Figura 7.19: Gráfico de $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

Teorema 7.5. *Seja f uma função duas vezes derivável e x_0 um ponto crítico de f. Se:*

1. $f''(x_0) > 0$, *então x_0 é um ponto de mínimo relativo de f.*

2. $f''(x_0) < 0$, *então x_0 é um ponto de máximo relativo de f.*

Dos teoremas 7.4 e 7.5 temos que os candidatos a pontos de máximos e mínimos são não só **os pontos críticos, mas também, podem ser os pontos do domínio onde a função não é derivável.**

No caso em que o domínio de f é um intervalo do tipo $[a, b]$, após determinar os pontos de máximo e de mínimo no intervalo (a, b), devemos calcular os valores da função nos extremos do intervalo e comparar estes valores com os valores máximos e mínimos obtidos anteriormente nos pontos críticos; o maior valor corresponderá ao máximo absoluto e o menor valor ao mínimo absoluto da função e os pontos correspondentes serão, respectivamente, os pontos de máximo e de mínimo absolutos.

No caso em que $f''(x_0) = 0$**, o teorema 7.5 não afirma nada**; quando acontecer isto, recomendamos usar o teorema 7.4.

Exemplo 7.9.

[1] Calcule os pontos extremos de :

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c; \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Como f é diferenciável em todo ponto, calculemos os pontos críticos de f:

$$f'(x) = 2\,a\,x + b \quad \text{e} \quad f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

que é o ponto crítico de f. A segunda derivada $f''(x) = 2\,a$; então,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\quad \text{se} \quad a > 0 \\ f''(x) < 0 &\quad \text{se} \quad a < 0. \end{aligned}$$

Logo, o vértice $x = -\dfrac{b}{2a}$ é um ponto de máximo absoluto de f se $a < 0$ e um ponto de mínimo absoluto se $a > 0$.

[2] Um banco oferece juros anual $I(t)$, em %, dependendo do tempo t, em anos, que o investidor esteja disposto a manter o investimento. $I(t)$ é dado por:

$$I(t) = \frac{160\,t}{t^2 + 16}.$$

Determine quantos anos deve manter o investimento para ter lucro máximo. Se o investimento é aplicado indeterminadamente, os juros podem ser negativos?

Como $I(t)$ é diferenciável em todo ponto, calculemos os pontos críticos de T:

$$I'(t) = -\frac{160\,(t^2 - 16)}{(t^2 + 16)^2}.$$

$I'(t) = 0$ se, e somente, se: $t = 4$ ou $t = -4$, que são os pontos críticos de I. Como $t \geq 0$, $t = 4$ é o único ponto crítico. A segunda derivada:

$$I''(t) = \frac{320\,t\,(t^2 - 48)}{(t^2 + 16)^3} \Longrightarrow I''(4) = -\frac{5}{4} < 0;$$

logo, $t = 4$ é ponto de máximo relativo de I e $I(4) = 20$. O Investimento recebe lucro máximo de 20 % em 4 anos. Por outro lado:

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{160\,t}{t^2 + 16} = 0.$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota. Os lucros diminuem ao longo do tempo, mas nunca são negativos. Veja o desenho:

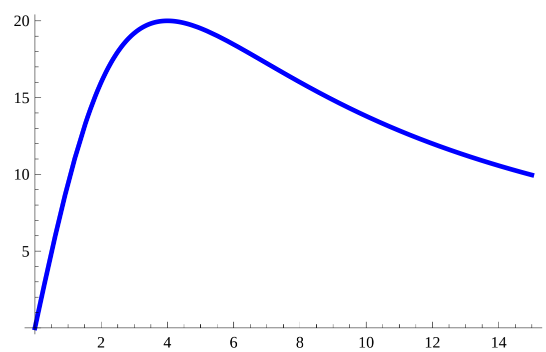

Figura 7.20: Gráfico de $I = I(t)$.

[3] A cotação, em reais, de certa moeda, nos últimos 8 anos foi modelada com êxito por:

$$C(t) = 91 - 15\,t + 9\,t^2 - t^3.$$

Determine os intervalos de tempo em que as cotações crescem e em que decrescem. Qual foi a maior e a menor cotação?

Calculemos a derivada de C:

$$C'(t) = -15 + 18\,t - 3\,t^2.$$

Intervalos	$C'(t)$	$C(t)$
$1 < t < 5$	> 0	crescente
$t < 1$	< 0	decrescente
$5 < t$	< 0	decrescente

Os pontos críticos de C: $C'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 1$ ou $t = 5$, logo, 1 e 5 são os pontos críticos de C. Calculando a segunda derivada de C:

$$C''(x) = 18 - 6\,t = 6\,(3 - t).$$

Então $C''(1) = 12$ e $C''(5) = -12$; portanto $t = 5$ é ponto de máximo e $t = 1$ é ponto de mínimo relativo de C. Por outro lado, $C(1) = 84$ e $C(5) = 116$. Veja o desenho:

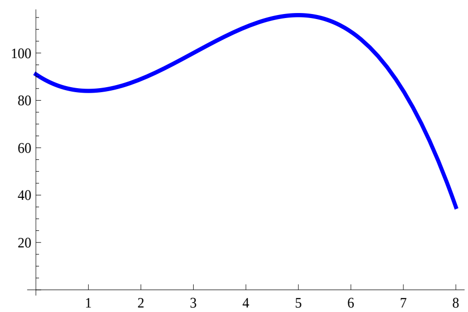

Figura 7.21: Gráfico de $C = C(t)$.

[4] Se o custo total de um fabricante é dado por $C(x) = \dfrac{5\,x^2}{x^3 + 4} + 2$, em reais, calcule os pontos extremos de $C = C(x)$.

Calculemos os pontos críticos de C:

$$C'(x) = -\frac{5\,x\,(x^3 - 8)}{(x^3 + 4)^2}.$$

Logo, $C'(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 2$. Calculando a segunda derivada de C:

$$C''(x) = \frac{10\,(16 - 28\,x^3 + x^6)}{(4 + x^3)^3}.$$

Então $C''(0) > 0$; logo, $x = 0$ é ponto de mínimo relativo de C. $C''(2) < 0$; logo, $x = 2$ é ponto de máximo relativo. Note que $C(0) = 2$ é o custo fixo é $C(2) = 3.67$ reais.

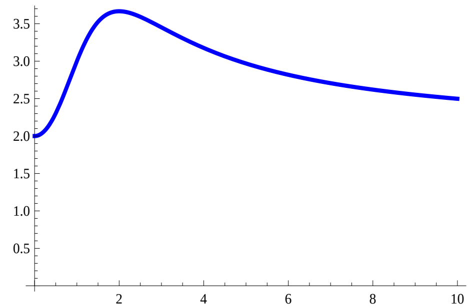

Figura 7.22: Gráfico de $C = C(x)$.

[5] Calcule os pontos extremos de $f(x) = x^4 - \dfrac{16\,x^3}{3}$.

Calculemos os pontos críticos de f; então, $f'(x) = 4\,x^2\,(x-4)$. Logo, $f'(x) = 0$ se $x = 0$ ou $x = 4$. Calculando a segunda derivada de f:

$$f''(x) = 12\,x^2 - 32\,x = 4\,x\,(3\,x - 8).$$

Então, $f''(4) > 0$; logo, $x = 4$ é ponto de mínimo relativo de f. $f''(0) = 0$ e o teorema não pode ser aplicado; mas usamos o teorema 7.4 para analisar a mudança do sinal de f'. Como $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in [0,4]$ ou $(-\infty, 4]$, então $x = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo. Veja o desenho:

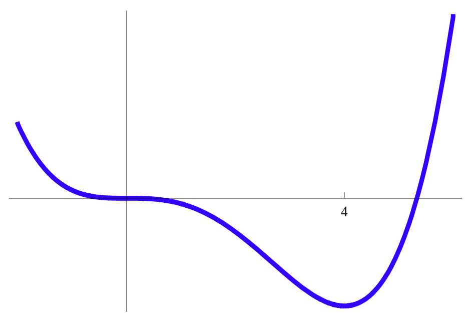

Figura 7.23: Gráfico de $f(x) = x^4 - \frac{16\,x^3}{3}$.

7.4 Concavidade e Pontos de Inflexão de Funções

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em D, onde D é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos.

Definição 7.5.

1. *f é dita* **côncava para cima** *em D se $f'(x)$ é crescente em D.*

2. *f é dita* **côncava para baixo** *em D se $f'(x)$ é decrescente em D.*

Intuitivamente, quando um ponto se desloca ao longo do gráfico de uma função f, da esquerda para a direita e a reta tangente nesse ponto vai girando no sentido anti-horário, isto significa que o coeficiente angular dessa reta tangente cresce à medida que x aumenta. Neste caso a função tem a concavidade voltada para cima.

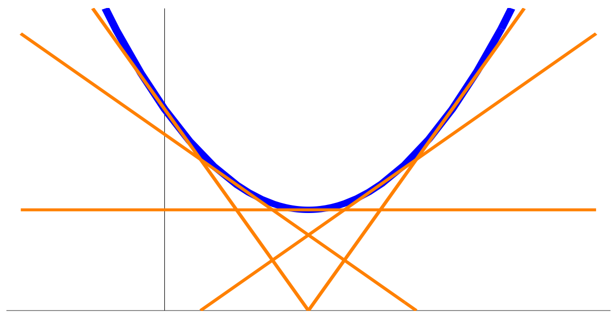

Figura 7.24: Função côncava para cima.

Analogamente, quando um ponto se desloca ao longo do gráfico de uma função f, da esquerda para a direita e a reta tangente nesse ponto vai girando no sentido horário, isto significa que o coeficiente angular dessa reta tangente decresce à medida que x aumenta. Neste caso a função tem a concavidade voltada para baixo.

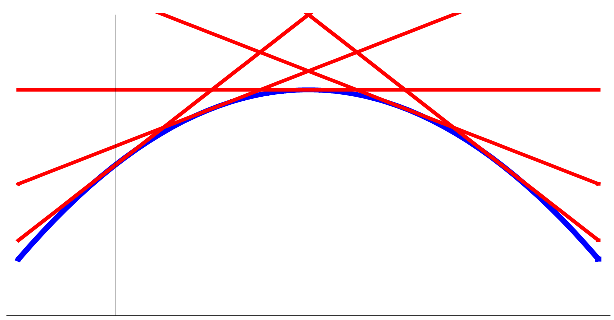

Figura 7.25: Função côncava para baixo.

Não confundir concavidade com crescimento ou decrescimento de uma função. No desenho a seguir, o gráfico de uma função crescente e côncava para cima e o de uma função decrescente e côncava para cima, respectivamente.

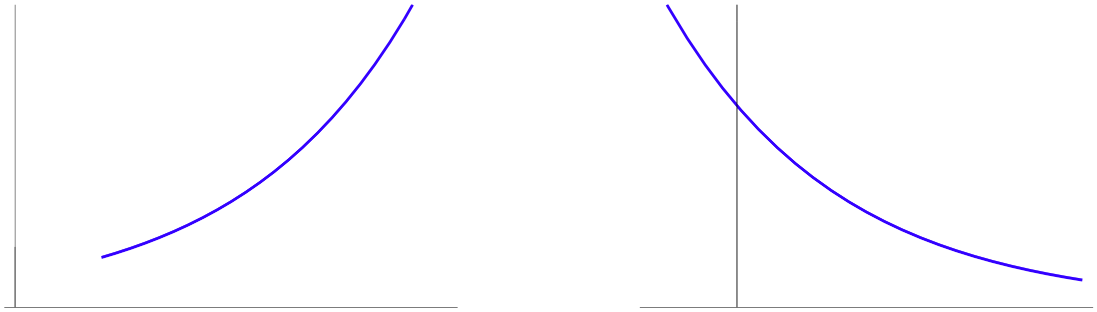

Figura 7.26:

No desenho abaixo, o gráfico de uma função crescente e côncava para baixo e o de uma função decrescente e côncava para baixo, respectivamente.

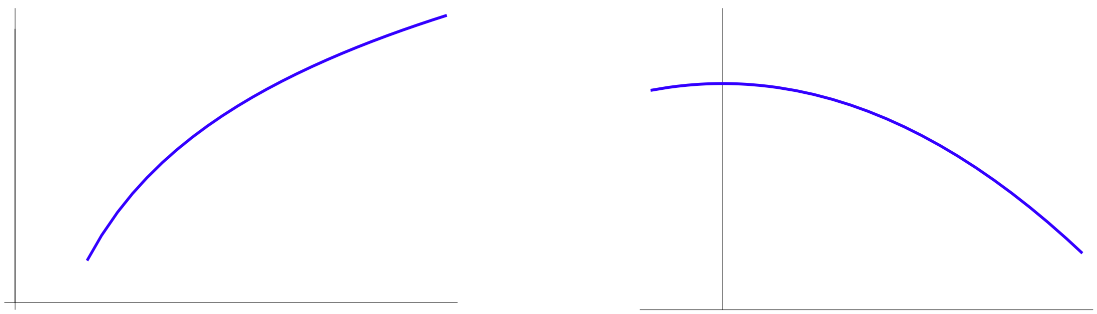

Figura 7.27:

Proposição 7.3. *Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável em D.*

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in D$, então f é côncava para cima em D.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in D$, então f é côncava para baixo em D.*

A prova segue diretamente das definições.

Exemplo 7.10.

[1] Considere a função $f(x) = x^4 - x^2$.

(a) Determine, onde f é côncava para cima.

(b) Determine, onde f é côncava para baixo.

Calculando a segunda derivada:

$$f''(x) = 2\,(6\,x^2 - 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\text{se} \quad x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty) \\ f''(x) < 0 \quad &\text{se} \quad x \in (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}). \end{aligned}$$

Então, f é côncava para cima em $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty)$ e f é côncava para baixo em $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

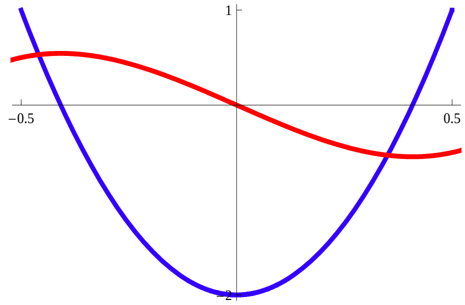

Figura 7.28: Gráficos de f' (vermelho) e f'' (azul).

[2] Considere a função de custo $C(x) = \dfrac{5\,x}{x^2+3} + 1$.

(a) Determine, onde C é côncava para cima.

(b) Determine, onde C é côncava para baixo.

Calculando a segunda derivada:

$$C''(x) = \frac{10\,x\,(-9+x^2)}{(3+x^2)^3}.$$

Logo, $C''(x) > 0$ se $x \in (-3,0) \cup (3,+\infty)$ e $C''(x) < 0$ se $x \in (-\infty,-3) \cup (0,3)$. Então, como $x \geq 0$ temos que C é côncava para cima em $(3,+\infty)$ e C é côncava para baixo em $(0,3)$.

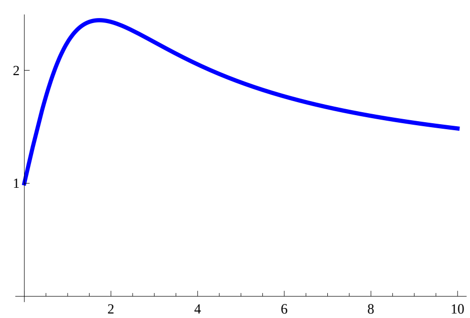

Figura 7.29: Gráficos de $C = C(x)$.

Definição 7.6. *Um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de uma função f é um ponto de* **inflexão** *de f, se existe um pequeno intervalo $(a,b) \subset D$ tal que $x_0 \in (a,b)$ e:*

1. *f é côncava para cima em (a,x_0) e côncava para baixo em (x_0,b), ou*

2. *f é côncava para baixo em (a,x_0) e côncava para cima em (x_0,b).*

Se a função é duas vezes derivável, para obter os pontos x_0, candidatos a pontos de inflexão, resolvemos a equação:

$$\boxed{f''(x) = 0}$$

e estudamos o sinal de $f''(x)$ para $x > x_0$ e $x < x_0$ (x_0 solução da equação).
$f''(x_0) = 0$ não implica em que x_0 seja abscissa de um ponto de inflexão; de fato, $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12\,x^2$; logo, $f''(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = 0$ é um ponto de mínimo (verifique!).

Note que se $f''(x_0) = 0$ e $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, então, x_0 é um ponto de inflexão.

Num ponto de inflexão, não necessariamente existe a segunda derivada da função. De fato, seja $f(x) = x\,|x|$; se $x > 0$ temos $f''(x) = 2$ e se $x < 0$ temos $f''(x) = -2$; então, 0 é um ponto de inflexão e $f''(0)$ não existe. Como exercício esboce o gráfico de f.

Exemplo 7.11.

[1] Seja $f(x) = x^3$; então: $f''(x) = 6\,x$. Por outro lado, $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$; logo, $x_0 = 0$ é ponto de inflexão de f.

[2] Seja $f(x) = x^4 - x^2$; então: $f''(x) = 2\,(6\,x^2 - 1)$.

$$f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}\big) \cup \big(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty\big) \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big).$$

Então $x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ e $x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ são os pontos de inflexão de f.

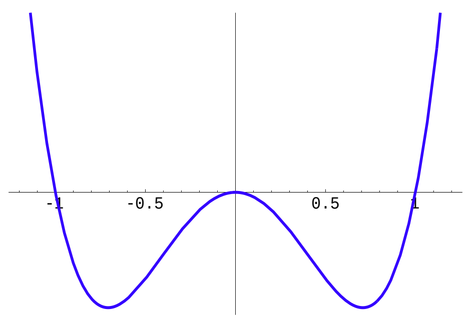

Figura 7.30: Gráfico de $f(x) = x^4 - x^2$.

[3] O custo para produzir certo tipo de componente de telefones celulares é modelado por $C(x) = x^3 - \dfrac{3\,x^2}{2} + 4$. Determine a concavidade e os pontos de inflexão de $C = C(x)$.

Calculamos $C''(x) = 3\,(2\,x - 1)$

$$C''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(\frac{1}{2}, +\infty\big) \quad \text{e} \quad C''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in \big(0, \frac{1}{2}\big).$$

Então, $x = \dfrac{1}{2}$ e o ponto de inflexão de C. Logo, $C = C(x)$ é côncava para cima em $(\dfrac{1}{2}, +\infty)$ e côncava para baixo em $(0, \dfrac{1}{2})$

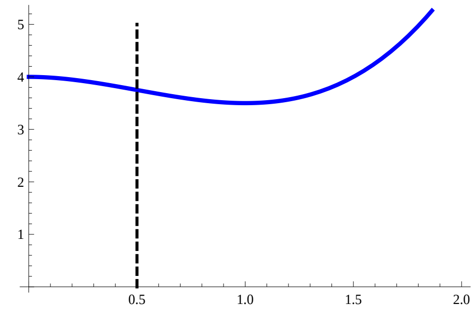

Figura 7.31: Gráfico de $C = C(x)$.

7.5 Esboço do Gráfico de Funções

Para obter o esboço do gráfico de uma função, siga os seguintes passos:

a) Determine o $Dom(f)$.

b) Calcule os pontos de interseção do gráfico com os eixos coordenados.

c) Calcule os pontos críticos.

d) Determine se existem pontos de máximo e mínimo.

e) Estude a concavidade e determine os pontos de inflexão.

f) Determine se a curva possui assíntotas.

g) Esboço.

Exemplo 7.12.

Esboce o gráfico das funções:

[1] $y = f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) **Interseções com os eixos coordenados:** Não possui interseções.

c) **Pontos críticos de f:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2};$$

logo, resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $x = 2$ e $x = -2$, que são os pontos críticos de f.

d) **Máximos e mínimos relativos de f:**

$$f''(x) = \frac{8}{x^3}.$$

Logo, $f''(2) > 0$ e $f''(-2) < 0$; logo, 2 e -2 são o ponto de mínimo e de máximo relativo de f, respectivamente.

e) **Estudemos a concavidade de f:** Note que $f''(x) \neq 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\text{se} \quad x \in A = (0, +\infty) \\ f''(x) < 0 \quad &\text{se} \quad x \in B = (-\infty, 0). \end{aligned}$$

f é côncava para cima em A e côncava para baixo em B. O gráfico não possui pontos de inflexão.

f) **Assíntotas.**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 4}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 4}{x} = -\infty.$$

g) **Esboço do gráfico:** O gráfico de f passa pelos pontos $(2, 4)$ e $(-2, -4)$ que são os pontos de mínimo e máximo, respectivamente, de f.

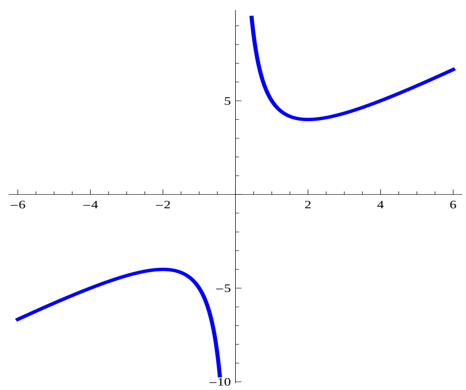

Figura 7.32: Gráfico de $y = \frac{x^2+4}{x}$.

[2] $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$.

b) Interseções com os eixos coordenados: se $x = 0$, então $y = -1$; logo, a curva passa pelo ponto $(0, -1)$.

c) Pontos críticos de f. $f'(x) = -\dfrac{4\,x}{(x^2 - 1)^2}$; logo $f'(x) = 0$ implica que $x = 0$, que é o ponto crítico de f.

d) Máximos e mínimos relativos de f:

$$f''(x) = \frac{12\,x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}.$$

$f''(0) < 0$; logo, 0 é ponto de máximo relativo de f.

e) Concavidade de f. $f''(x) > 0$ se $x \in \big(-\infty, -1\big)$ ou $x \in \big(1, \infty\big)$, $f''(x) < 0$ se $x \in \big(-1, 1\big)$. f é côncava para baixo em $(-1, 1)$ e côncava para cima em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. $\pm 1 \notin Dom(f)$; logo, o gráfico de f não possui pontos de inflexão.

f) Assíntotas.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1.$$

Logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal da curva.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Logo, $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais da curva.

g) Esboço do gráfico:

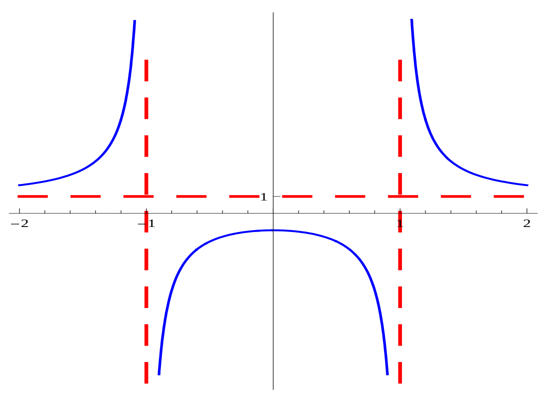

Figura 7.33: Gráfico de $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

[3] $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(1 - x^2)$.

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

b) Interseções com os eixos coordenados: Se $x = 0$, então $y = 0$; logo, a curva passa pelo ponto $(0, 0)$. Se $y = 0$, então $x = 0$ ou $x = \pm 1$; logo, a curva passa pelos pontos $(0, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

c) Pontos críticos de f: Se $x \neq 0$; então, $f'(x) = \dfrac{2\,x\,(1 - 4\,x^2)}{3\,(x^2)^{\frac{2}{3}}}$.

A função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(1 - x^2)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas não existe $f'(0)$; logo, no ponto $(0, 0)$ do gráfico deve existir uma "cúspide"como foi observado no gráfico do valor absoluto. Os pontos críticos de f são $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$.

d) Máximos e mínimos relativos de f. Se $x \neq 0$; então,

$$f''(x) = -\frac{2\,(20\,x^2+1)}{9\,(x^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

$f''(-\frac{1}{2}) < 0$ e $f''(\frac{1}{2}) < 0$; logo, $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}$ são pontos de máximos relativos de f. Se $x = 0$, estudamos o sinal da derivada de f para valores à esquerda e à direita de $x = 0$: $f'(x) > 0$ se $0 < x < \frac{1}{2}$ e $f'(x) < 0$, se $-\frac{1}{2} < x < 0$; logo, $x = 0$ é um ponto de mínimo local de f.

e) Concavidade de f. $f''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. f é côncava para baixo em $\mathbb{R} - \{0\}$.

f) Assíntotas. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2}\,(x^2-1) = +\infty$. Logo, f não possui assíntotas horizontais e nem verticais.

g) Esboço do gráfico:

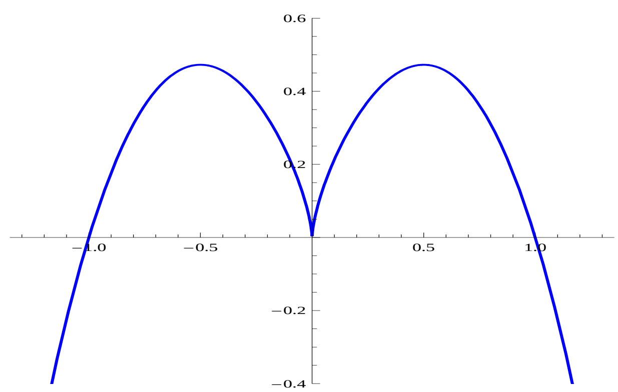

Figura 7.34: Gráfico de $f(x) = x^{2/3}\,(1-x^2)$.

[4] $y = f(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}$, onde $b > 0$, representa uma família de curvas e é chamada função densidade de probabilidade normal padrão, que tem um papel relevante em Probabilidade e Estatística.

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

b) A curva passa pelo ponto $(0, e^{-\frac{a^2}{b}})$.

c) Pontos críticos de f:

$$f'(x) = -\frac{2\,(x-a)}{b}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{b}};$$

logo, $x = a$ é o ponto crítico de f.

d) Máximos e mínimos relativos de f:

$$f''(x) = \frac{2}{b}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}\,\big(\frac{2(x-a)^2}{b} - 1\big).$$

$f''(a) < 0$; logo, $x = a$ é ponto de máximo relativo de f.

e) As abscissas dos pontos de inflexão são: $x = a \pm \sqrt{\frac{b}{2}}$

f) Assíntotas: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{b}} = 0$. Logo, $y = 0$ é a assíntota horizontal da curva.

g) Esboço dos gráficos:

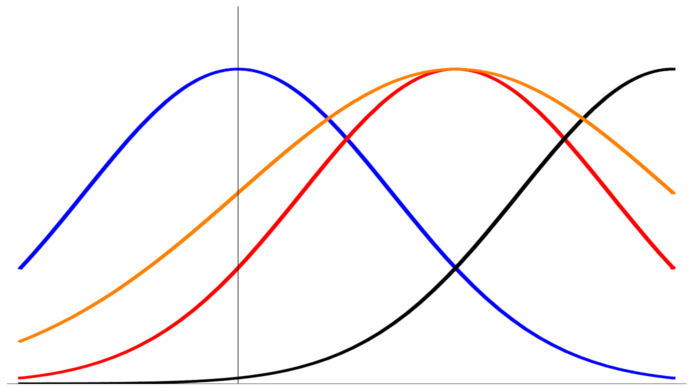

Figura 7.35: Esboço dos gráficos para $a = 0,\ b = 1$; $a = b = 1$; $a = 2,\ b = 1$ e $a = 1,\ b = 2$..

[5] $y = \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + c}$, $(c \in \mathbb{R})$, que representa uma família de curvas.

a) A solução da equação $x^2 + 2\,x + c = 0$ é $r_0 = -1 \pm \sqrt{1 - c}$; então, se $c > 1$, $Dom(f) = \mathbb{R}$, se $c = 1$, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ e se $c < 1$, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{r_0\}$.

b) Se $x = 0$, então $y = \dfrac{1}{c}$, se $c \neq 0$. Neste caso, a interseção com o eixo dos y é $(0, \dfrac{1}{c})$.

c) Pontos críticos:

$$f'(x) = -\frac{2\,(x+1)}{(x^2 + 2\,x + c)^2},$$

$f'(x) = 0$ se $x = -1$, $(c \neq 1)$. Neste caso, o ponto crítico é $(-1, \dfrac{1}{c-1})$.

d) Máximos e mínimos:

$$f''(x) = \frac{2\,(3\,x^2 + 6\,x + 4 - c)}{(x^2 + 2\,x + c)^3}$$

e $f''(-1) = -\dfrac{2}{(c-1)^2} < 0$; logo, $x = -1$ é ponto de máximo relativo se $c \neq 1$.

e) Resolvendo $f''(x) = 0$, obtemos $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3\,(c-1)}}{3}$. Se $c > 1$, temos dois pontos de inflexão.

f) Assíntotas.

Assíntotas horizontais: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + c} = 0$; então, $y = 0$ é assíntota horizontal.

Assíntotas verticais:
Se $c = 1$, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + 1} = \infty$ e se $c < 1$, $\lim\limits_{x \to -1 \pm \sqrt{1-c}} \dfrac{1}{x^2 + 2\,x + c} = \infty$.

$x = -1$ e $x = -1 \pm \sqrt{1-c}$ são assíntotas verticais da curva, para $c = 1$ e $c < 1$, respectivamente.

g) Esboço dos gráficos:

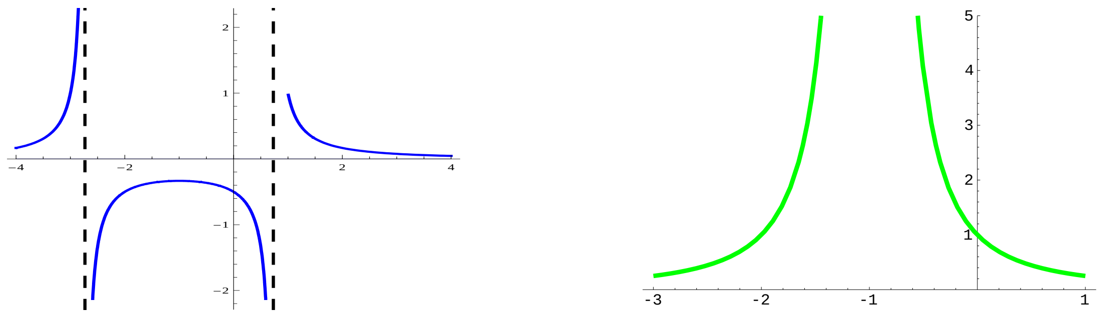

Figura 7.36: Esboço dos gráficos para $c = -2$ e $c = 1$, respectivamente.

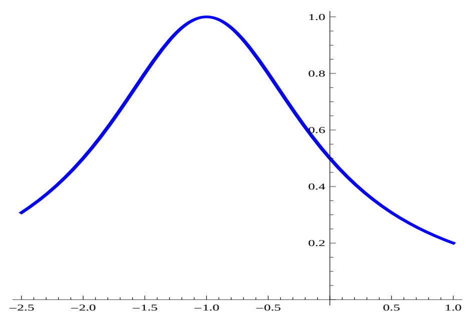

Figura 7.37: Esboço para $c = 2$.

7.6 Problemas de Otimização

Nesta seção apresentaremos problemas de maximização e minimização aplicados à diversas áreas. O primeiro passo para resolver este tipo de problema é determinar, de forma precisa, a função a ser otimizada. Em geral, obtemos uma expressão de duas variáveis, mas usando as condições adicionais do problema, esta expressão pode ser reescrita como uma função de uma variável derivável e assim poderemos aplicar os teoremas.

Exemplo 7.13.

[1] Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

Considere $x,\, y > 0$ tal que $x + y = 70$; logo, $x,\, y \in [0, 70]$; o produto é: $P = x\,y$. Esta é a função que devemos maximizar. Como $y = 70 - x$, substituindo em P:

$$P(x) = x\,y = x\,(70 - x).$$

$P : [0, 70] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável. Derivando: $P'(x) = 70 - 2\,x = 2\,(35 - x)$; o ponto crítico é $x = 35$. Analisando o sinal de P', é claro que este ponto é ponto de máximo para

P e $y = 35$; logo, $P = 1225$ é o produto máximo. Os números são $x = y = 35$. Note que $P(0) = P(70) = 0$.

[2] O custo para produzir certo produto é dado por $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 6\,x^2 + 30\,x + 25$. Determine o lucro máximo se o preço do produto é 10 reais.

O lucro é dado por $L(x) = R(x) - C(x)$, onde a receita é $R(x) = 10\,x$; logo;

$$L(x) = \frac{1}{3}\,\big[-x^3 + 18\,x^2 - 60x - 75\big].$$

Derivando e igulando a zero:

$$-3\,x^2 + 36\,x - 60 = 0 \Longrightarrow x = 2 \quad \text{e} \quad x = 10.$$

Derivando novamente:

$$L''(x) = \frac{1}{3}\,\big[36 - 6\,x\big],$$

logo: $L''(2) = 8$ e $x = 2$ é ponto de mínimo, $L''(10) = -8$ e $x = 10$ é ponto de máximo. $L(10) = 41.66$ reais.

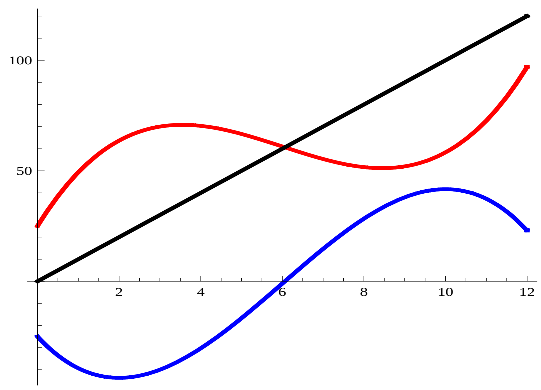

Figura 7.38: Gráficos de $L(x)$ (azul), $C(x)$ (vermelho) e $R(x)$ (negro).

Note que o ganho da empresa é devido ao fato de que o custo é $C(10) = 58.33$ reais e a receita é $R(10) = 100$ reais.

[3] A evolução no tempo t da capacidade de produção de uma fábrica fundada em 1940, é dada por:

$$P(t) = \frac{40000}{1000 + (t - 50)^2}.$$

Determine o ano em que a fábrica alcançou sua capacidade máxima.

Derivando a função $P = P(t)$e igualando a zero:

$$P'(t) = -\frac{80000\,(-50 + t)}{(1000 + (t - 50)^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow t = 50.$$

O ponto crítico é $t = 50$. Note que é mais simples estudar o sinal de $P'(t)$ que calcular $P''(t)$, então:

$$P'(t) > 0 \Longleftrightarrow t < 50 \quad \text{e} \quad P'(t) < 0 \Longleftrightarrow t > 50.$$

Logo, $t = 50$ é o ponto máximo. A fábrica alcançou sua maior produção em 1990.

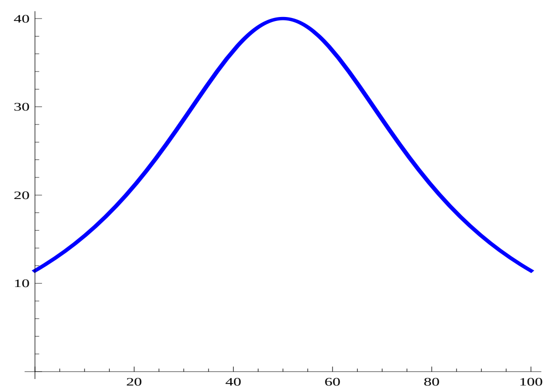

Figura 7.39: Gráfico de $P(t)$.

[4] Um atacadista quando vendia certo produto por um preço unitário de 20 reais, conseguia vender 180 unidades por semana. Reolveu aumentar o preço para 25 reais e o número de unidades vendidas diminuiu para 155. Supondo que a função demanda seja afim, qual deve ser o preço do produto para que a receita seja a maior possível?

Seja p o preço unitário do produto e x a quantidade demandada. Como a função é afim:

$$x = a\,p + b.$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{cases} 180 &= 20\,a + b \\ 155 &= 25\,a + b. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -5$ e $b = 280$, então:

$$x = -5\,p + 280 \quad \text{e} \quad R = x\,p = -5\,p^2 + 280\,p.$$

Logo, $R' = -10\,p + 280 = 0$; temos $p = 28$. $R'' = -10$ e $p = 28$ é ponto de máximo. O preço do produto para maximizar a receita deve ser 28 reais.

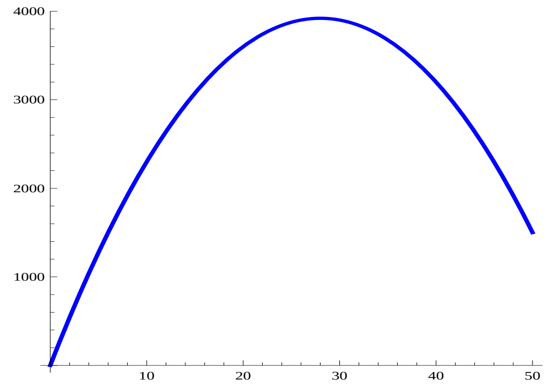

Figura 7.40: Gráfico de $R(x)$.

[5] Uma empresa tem um ganho de 10 reais por cada produto vendido. A empresa paga k reais por semana em publicidade e a quantidade de produtos que vende por semana é dada por:

$$x = 3500\,(1 - e^{-0.002k}).$$

Determine o valor de k que maximiza o lucro líquido.

O lucro pela venda de x produtos é de $10\,x$ reais; tirando o custo k da publicidade temos que o lucro líquido é $L = 10\,x - k$, então:

$$L(k) = 35000\,(1 - e^{-0.002k}) - k.$$

Derivando em relação a k e igualando a zero:

$$L'(k) = 70\,e^{-0.002k} - 1 = 0 \Longrightarrow e^{-0.002k} = \frac{1}{70} \Longrightarrow k = \frac{ln(70)}{0.002}.$$

Derivando novamente:

$$L''(k) = -0.14\,e^{-0.002k} \quad \text{e} \quad L''\Big(\frac{ln(70)}{0.002}\Big) = -0.002,$$

então $k = \dfrac{ln(70)}{0.002} \cong 2124.25$ é um ponto de máximo e o lucro líquido $L(2124.25) = 32375.8$ reais.

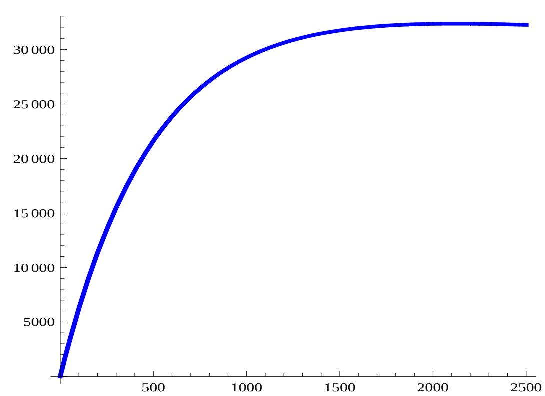

Figura 7.41: Gráfico de $L(k)$.

[6] O custo total para produzir x unidades de certo produto é $C(x) = 0.2\,x^2 + 4300\,x + 200000$, expresso em reais. Determine quantas unidades devem ser produzidas para que o custo médio seja mínimo.

O custo médio é dado por $CMe(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, logo:

$$CMe(x) = 0.2\,x + \frac{200000}{x} + 4300.$$

Derivando e igualando a zero:

$$\frac{dCMe}{dx} = 0.2 - \frac{200000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{200000}{0.2} \Longrightarrow x = 1000.$$

Derivando novamente:

$$\frac{d^2CMe}{dx^2} = \frac{400000}{x^3} \quad \text{e} \quad \frac{d^2CMe}{dx^2}\bigg|_{x=1000} = \frac{1}{2500},$$

então $x = 1000$ é um ponto de mínimo e $CMe(1000) = 4700$ reais.

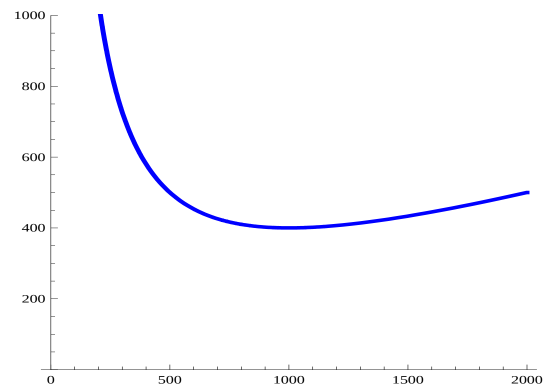

Figura 7.42: Gráfico de $CMe(x)$.

7.7 Teorema de L'Hôpital

Comumente, ao estudar limites, aparecem expressões indeterminadas. Por exemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1},$$

onde a expressão indeterminada é do tipo $(\frac{0}{0})$. O teorema de L'Hôpital nos indica um método para fazer desaparecer estas indeterminações e calcular limites de uma forma mais eficiente.

Teorema 7.6. (L'Hôpital)
Sejam f e g funções deriváveis num domínio D, que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos, exceto possivelmente num ponto a e $g(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$.

1. *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, então:*

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

2. *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ *e* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$*, então:*

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

Para a prova do teorema veja o apêndice. O teorema também é válido para limites laterais e para limites no infinito. Se f' e g' satisfazem às hipóteses do teorema e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = L;$$

logo; $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = L.$

Em geral se $f^{(n)}$ e $g^{(n)}$ satisfazem às hipóteses do teorema e $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L.$$

Se a função da qual estamos calculando o limite é n vezes derivável, podemos derivar sucessivamente até "fazer desaparecer"a indeterminação. Para indicar o tipo de indeterminação, denotamos $(\frac{0}{0})$, $(\frac{\infty}{\infty})$, etc.

Exemplo 7.14.

[1] Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4\,x + 4}{x^2 - x - 2}$. Primeiramente observamos que o limite apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema, derivamos o numerador e o denominador da função racional duas vezes; então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4\,x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x - 4}{2\,x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

[2] Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$. O limite apresenta uma indeterminação do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x\, ln(a)}{1} = ln(a).$$

7.7.1 Outros tipos de indeterminações

O teorema de L'Hôpital nos indica somente como resolver indeterminações do tipo $(\frac{0}{0})$ e $(\frac{\infty}{\infty})$. Outros tipos, como $(0 \cdot \infty)$, ∞^0, $\infty - \infty$, 0^0 e 1^∞, podem ser resolvidos transformando-os nos tipos já estudados no teorema.

Caso $(\mathbf{0} \cdot \infty)$

Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, ln(x)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x \to 0^+} x\, ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln(x)}{\dfrac{1}{x}}.$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ln(x)}{\frac{1}{x}}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \to 0^+} x\, ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln(x)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\big(ln(x)\big)'}{\big(\frac{1}{x}\big)'} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Caso $(\infty - \infty)$

[1] Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1}\right]$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\infty - \infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\,x^2}{x^2-1}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\,x}{2\,x} = 2.$$

[2] Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right]$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\infty - \infty)$; então fazemos:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{-x + x\, e^x}.$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{-x + x\, e^x}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$ Aplicando o teorema:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{-x + x\, e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{-1 + e^x + x\, e^x}.$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{-1 + e^x + x\, e^x}$ é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$, aplicando novamente o teorema:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{-x + x\, e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{-1 + e^x + x\, e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x\,(x+2)} = \frac{1}{2}.$$

Caso $(\mathbf{1}^{\infty})$

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(1+\dfrac{1}{x}\big)^x$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (1^{∞}); então fazemos:

$$u(x)=ln\big(\big(1+\frac{1}{x}\big)^x\big)=x\,ln\big(1+\frac{1}{x}\big);$$

então, $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\,ln\big(1+\dfrac{1}{x}\big)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0\cdot\infty)$; então aplicamos o caso A:

$$\lim_{x\to+\infty}x\,ln\big(1+\frac{1}{x}\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\big(1+\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}}.$$

O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{0}{0})$. Aplicando o teorema:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\big(1+\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}.$$

O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}1=1.$$

Como $ln(x)$ é uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}ln\big(\big(1+\frac{1}{x}\big)^x\big)=ln\big(\lim_{x\to+\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^x\big)=1.$$

Da última igualdade: $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(1+\dfrac{1}{x}\big)^x=e$.

Caso $(\infty^{\mathbf{0}})$

[1] Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)^{e^{-x}}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (∞^0); fazemos:

$$u(x)=ln\big((x)^{e^{-x}}\big)=\frac{ln(x)}{e^x};$$

então, $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(x)}{e^x}$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(\frac{\infty}{\infty})$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\,e^x}=0.$$

Como $ln(x)$ é uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}ln\big((x)^{e^{-x}}\big)=ln\big(\lim_{x\to+\infty}(x)^{e^{-x}}\big)=0.$$

Da última igualdade: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)^{e^{-x}}=1$.

Caso $(\mathbf{0^0})$

[1] Calcule $\lim\limits_{x \to 0} x^x$. O limite é uma forma indeterminada do tipo (0^0); fazemos:

$$u(x) = ln(x^x) = x\, ln(x);$$

então: $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \lim\limits_{x \to 0} x\, ln(x)$. O limite é uma forma indeterminada do tipo $(0 \cdot \infty)$ e novamente aplicamos o teorema:

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

Sendo $ln(x)$ uma função contínua em seu domínio, temos:

$$\lim_{x \to 0} ln(x^x) = ln(\lim_{x \to 0} x^x) = 0.$$

Da última igualdade: $\lim\limits_{x \to 0} x^x = e^0 = 1$.

Em geral, nos casos de potências indeterminadas, usamos a função logarítmica $y = ln(x)$ para poder aplicar o teorema de L'Hôpital. A continuidade da função logarítmica $y = ln(x)$ e de sua inversa $y = e^x$ permite resolver este tipo de limite.

7.8 Diferencial de uma Função

A diferencial de uma função será introduzida de maneira formal. Ao leitor interessado recomendamos a bibliografia avançada. Seja $y = f(x)$ uma função definida num domínio D e diferenciável no ponto $x_0 \in D$. Denotemos por dx o número (não nulo), tal que $dx + x_0 \in D$.

Definição 7.7.

1. *Para cada $x_0 \in D$, a diferencial de $y = f(x)$ no ponto x_0 é denotada por dy ou $df(x_0)$ e definida por $dy = f'(x_0)\, dx$.*

2. *O incremento de $y = f(x)$ em x_0 é denotado por Δy e definido por $\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0)$.*

Para x_0 fixado, dy é uma função linear sobre o domínio de todos os valores possíveis de dx e Δy é uma função sobre o domínio de todos os valores possíveis de dx. Seja $dx = x - x_0$, então: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta y - dy}{x - x_0} = 0$. Se $f'(x_0) \neq 0$: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$ temos que dy é uma "boa"aproximação para Δy: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\, dx + R(x - x_0)$, onde $R(x - x_0)$ é uma função tal que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x - x_0)}{x - x_0} = 0$. Compare com linearização.

Exemplo 7.15.

Seja $y = f(x) = x^2$; $dy = 2\,x\,dx$; no ponto x_0: $dy = 2\,x_0\,dx$ e $f(x_0 + dx) - f(x_0) = 2\,x_0\,dx + (dx)^2$; logo $\Delta y = \ 2\,x_0\,dx + (dx)^2$. Então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y - dy}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{x \to x_0} (1 + \frac{x - x_0}{2x_0}) = 1.$$

Por outro lado, $x^2 = x_0^2 + 2\,x_0\,dx + R(x - x_0)$, então $\dfrac{R(x - x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^2 - x_0^2 - 2\,x_0\,dx}{x - x_0} = x - x_0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R(x - x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0.$

Propriedades

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções definidas num domínio D e diferenciáveis no ponto $x_0 \in D$, então:

1. $d(f + g)(x_0) = d(f)(x_0) + d(g)(x_0)$.
2. $d(f\,g)(x_0) = g(x_0)\,d(f)(x_0) + f(x_0)\,d(g)(x_0)$.

7.9 Exercícios

1. Calcule os pontos críticos (se existem) de:

(a) $y = 3x + 4$
(b) $y = x^2 - 3x + 8$
(c) $y = 2 + 2x - x^2$
(d) $y = (x-2)(x+4)$
(e) $y = 3 - x^3$
(f) $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$
(g) $y = x^4 + 4x^3$
(h) $y = e^x - x$
(i) $y = \sqrt[3]{(x^2-9)^2}$

2. Usando a primeira derivada, determine os intervalos de crescimento e/ou decrescimento das seguintes funções:

(a) $f(x) = 4\,x^3 - 3\,x$
(b) $f(x) = e^x - x$
(c) $f(x) = ln(x^2+1)$
(d) $f(x) = x^2\,ln(x)$
(e) $y = 2x - 1$
(f) $y = 3 - 5x$
(g) $y = 3x^2 + 6x + 7$
(h) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$
(i) $y = (x-1)(x-2)(x+3)$
(j) $y = 2^x$
(k) $y = e^{-x}$
(l) $y = x\,e^{-x}$
(m) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

3. Calcule os pontos de máximos e de mínimos relativos (se existem) de:

(a) $y = 7x^2 - 6x + 2$
(b) $y = 4x - x^2$
(c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 9$
(d) $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5}{3}x^3 + 4x^2$
(e) $y = 5 + \sqrt[5]{(x-2)^7}$
(f) $y = 3 + \sqrt[3]{(2x+3)^4}$
(g) $y = \dfrac{4\,x}{x^2+4}$
(h) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2x+1} - 2x$
(i) $y = (x+2)^2(x-1)^3$
(j) $y = x^2\sqrt{16-x}$
(k) $y = x^4 + \dfrac{4\,x^3}{3} + 3\,x^2$
(l) $y = x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$
(m) $y = x^2\,\sqrt{3-x^2}$

4. Calcule os pontos de inflexão (se existem) e estude a concavidade de:

(a) $y = -x^3 + 5\,x^2 - 6\,x$
(b) $y = 3\,x^4 - 10\,x^3 - 12\,x^2 + 10\,x + 9$
(c) $y = \dfrac{1}{x+4}$
(d) $y = 2\,x\,e^{-3x}$
(e) $y = x^2 - \dfrac{1}{3\,x^2}$
(f) $y = \dfrac{x^2+9}{(x-3)^2}$
(g) $y = e^{-x^2}$

(h) $y = (x+4)\,e^{x+4}$

(i) $y = \dfrac{x+1}{x}$

(j) $y = x\,\sqrt{1-x^2}$

(k) $y = ln(x^2 - 2\,x + 2)$

(l) $y = e^{x^2-1}$

5. Esboce os gráficos de:

(a) $y = -x^2 + 4x + 2$

(b) $y = -x^4 - x^3 - 2x^2$

(c) $y = \dfrac{3x+1}{(x+2)(x-3)}$

(d) $y = ln(x^2+1)$

(e) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

(f) $y = \dfrac{x^2}{x-3}$

(g) $y = 2\sqrt{x} - x$

(h) $y = x^3 - 3x^2$

(i) $y = x + \dfrac{1}{x}$

(j) $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$

(k) $y = x^5 - x^3$

(l) $y = x^6 - x^4$.

(m) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2\,x}$

(n) $y = (x+1)\,(x-3)^{\frac{2}{3}}$

(o) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$

(p) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-x-2}$

(q) $y = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)\,(x+2)^2}$

(r) $y = \dfrac{x^2-4\,x-5}{x-5}$

(s) $y = (x^2-1)^2$

(t) $y = 2\,x\,ln^2(x)$

6. Determine o valor de k tal que a função $y = x^3 + kx^2 + x + 1$ admita um ponto de inflexão em $x = 1$.

7. Seja $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

(a) Determine o único ponto de inflexão de y.

(b) Verifique que y tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo se $b^2 - 3ac > 0$.

8. Seja $y = x^m\,(1-x^n)$, onde $m,\ n$ são números naturais. Verifique:

(a) Se m é par, y tem um ponto de mínimo em $x = 0$.

(b) Se n é par, y tem um ponto de mínimo em $x = 1$.

9. Esboce o gráfico da família de curvas $y = x^4 + x^3 + c\,x^2$, $c \in \mathbb{R}$.

10. Um cartaz deve conter $50\,cm^2$ de matéria impressa com duas margens de $4\,cm$ cada, na parte superior e na parte inferior e duas margens laterais de $2\,cm$ cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que sua área total seja mínima.

11. Uma fábrica de refrigerantes usa latas cilíndricas cujos volumes devem ser iguis a 256 cm^3.Determine a altura e o raio das bases para minimizar a área da superfície.

12. A taxa aeróbica de uma pessoa com x anos de idade é dada por:

$$A(x) = \frac{110\,(ln(x) - 2)}{x},$$

sendo $x \geq 11$. Em que idade a pessoa tem capacidade aeróbica máxima?

13. Um produtor descobre que quando o preço unitário de seu produto era R$6 a demanda era de 4200 unidades e quando o preço era de R$8 a demanda era de 3800 unidades. Admitindo que a função da demanda é afim, determine o preço que deve ser cobrado para que a receita mensal seja máxima.

14. A relação entre preço e a demanda para um certo produto é $p = 20\,e^{-x/2}$, sendo p o preço unitário e x a demanda mensal. Qual é o preço que torna a receita mensal máxima?

15. Uma empresa que produz um só produto calcula que sua função de custo total diário (em reais) é dada por $C(x) = x^3 - 4\,x^2 + 17\,x + 10$ e que sua função de receita é $R(x) = 20\,x$. Determine o valor de x para o qual o lucro diário é máximo.

16. A vazão de água de uma represa é modelada por:

$$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2 + 1},$$

se $0 \leq t \leq 12$ e onde t é o tempo em meses. Determine quando a vazão foi máxima.

17. Uma empresa quer fabricar caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de uma folha retangular de papelão medindo 30 cm por 50 cm. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo x cm é retirado de cada canto da folha de papelão. Dependendo do valor de x, diferentes caixas (com diferentes volumes) podem ser confeccionadas. O problema é determinar o valor de x tal que a caixa correspondente tenha o maior volume.

18. Usando L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{x^3 + 7x - 1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{e^{3x}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\, e^{-4x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} ln(x)\, ln(x-1)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{2+ln(x)}}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$