Análise Funcional/ Lista 5
Topologias fraca e fraca $\star$

Prof. Didier Pilod

Exercício 1

Seja X um espaço vetorial normado. Prove que $(X, \sigma(X, X^\star))$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo.

Exercício 2

Seja X um espaço vetorial normado. Prove que se $X^\star$ é separável, então B_X é metrizável na topologia fraca.

Exercício 3

Seja X um espaço vetorial normado. Definimos o *polar* de um subconjunto A de X por

$$A^\circ := \left\{ f \in X^\star \ : \ |\langle f, x \rangle| \leq 1, \ \forall\, x \in A \right\}.$$

(a) Prove que: *para toda vizinhança U de 0 em X, U° é $w^\star$-compacto.* [Dica: *Use o teorema de Banach-Alaoglu.*]

(b) Demostre o teorema de Banach-Alaoglu a partir da Afirmação do item (a).

Exercício 4

Prove que todo espaço normado X é isometricamente isomorfo a um subespaço de um espaço $C(K)$ para algum espaço compacto de Hausdorff K.

[Dica: *Tome $K := B_{X^\star}$ munido da topologia induzida pela topologia fraca $\star$ de $X^\star$ e defina $\theta : X \to C(K), \ x \mapsto J(x)_{|K}$.*]

Exercício 5

Prove o teorema de Banach-Mazur. *Todo espaço de Banach separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de $l^\infty(\mathbb{N})$.*

[Dica: *Use o Exercício 4. Verifique que o espaço K em questão é separável. Daí, mostre que $C(K)$ é isometricamente isomorfo a um subespaço de $l^\infty(\mathbb{N})$.*]

Exercício 6

Sejam X um espaço de Banach, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (X^\star)^{\mathbb{N}}$ e $f \in X^\star$. Assume também que $f_n \rightharpoonup^\star f$.

(a) Prove que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{X^\star} < +\infty$ e $\|f\|_{X^\star} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{X^\star}$.

(b) Se além disso $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ e $x \in X$ satisfazem $x_n \to x$. Prove então que $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

(c) Agora, sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ e $x \in X$ tais que $x_n \rightharpoonup x$. Prove que em geral não vale $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

[Dica: *tome* $X = l^2(\mathbb{N})$ *e a sequência* $\{e^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos vetores unitários canônicos de* X*, i.e.* $e^n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$.]

Exercício 7

Consideramos a identificação $c_0^\star = l^1(\mathbb{N})$ e seja

$$L : c_0^\star \to c_0^\star,\ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} x_k, x_1, x_2, x_3, \cdots\Big).$$

Mostre que

(a) L é um isomorfismo de $c_0^\star$ sobre $c_0^\star$.

(b) L não é $w^\star - w^\star$-contínuo.

[Dica: *Considere a sequência* $\{e^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos vetores unitários de* $l^1(\mathbb{N})$ *olhados como elementos de* $c_0^\star$.]