Séminaire BOURBAKI Mars 2015
67ème année, 2014-2015, n$^{\text{o}}$ 1097

CATÉGORIES SUPÉRIEURES ET THÉORIE DES TOPOS

par **Denis-Charles CISINSKI**

INTRODUCTION

La théorie des catégories est profondément liée à la topologie algébrique. D'abord en tant que langage commode pour exprimer les propriétés de l'homologie et de la cohomologie, mais aussi en tant que théorie en soi, c'est-à-dire en tant qu'elle produit et étudie des objets qui lui sont conceptuellement propres. Une notion fondamentale apparaît après l'introduction par Grothendieck et Verdier des catégories dérivées des catégories abéliennes, ainsi que, dans un contexte encore plus général, après l'introduction par Quillen de la notion de catégorie de modèles (fermée) : celle de foncteur dérivé "total" (par exemple le foncteur "sections globales dérivées" $\mathbf{R}\Gamma(X, A)$, par opposition aux groupes de cohomologie $H^n(X, A)$). Pour en saisir toute la saveur, il y a un prix à payer : celui de travailler, comme cela a été observé par Freyd [Fre] pour la théorie de l'homotopie des espaces topologiques, avec des "catégories homotopiques" qui ne sont pas concrètes (dans le sens très précis où il n'existe pas de descriptions de celles-ci comme des catégories d'ensembles munis d'espèces de structures à la Bourbaki) : ces catégories sont obtenues en inversant formellement des classes de morphismes dans des catégories "classiques" (espaces topologiques, (complexes de) groupes abéliens, etc). Mais le gain est très grand : on peut dériver les foncteurs correspondant aux opérations de la théorie des catégories élémentaire : par exemple, prendre l'ensemble des morphismes, considérer le foncteur limite inductive, ce qui va donner des notions naturelles de cohomologie et d'homologie, respectivement. Le point est que les versions dérivées ont une nette tendance à se comporter de façon similaire à leurs versions non dérivées, ce qui, une fois dégagés les sorites qui justifient et précisent ces analogies, facilite grandement la manipulation de ces constructions. Et surtout, les foncteurs dérivés se comportent encore mieux que leurs versions originales : il arrive qu'ils se mettent à avoir des propriétés d'exactitude plus générales, des comportement plus symétriques, ou bien se mettent à avoir un sens insoupçonné (par exemple, résoudre un problème de modules).

La théorie des ∞-catégories telle qu'elle est développée et pratiquée aujourd'hui, suite aux travaux de Dwyer et Kan, Grothendieck, Verdier, et Quillen, puis de Joyal, Lurie, Rezk, Toën, Vezzosi, et Simpson, consiste à prendre ceci très au sérieux : le langage (au sens de la logique formelle) de la théorie des catégories admet pour sémantique la théorie de l’homotopie abstraite, c’est-à-dire la théorie de la localisation des catégories et des foncteurs dérivés. Outre la précision des analogies évoquées ci-dessus, cela ne fait pas qu’identifier la théorie des catégories et la théorie de l’homotopie de façon inéluctable. L’un des grands promoteurs de la théorie des catégories est Grothendieck, puisqu’il a radicalement refondé toute la géométrie algébrique en se focalisant sur le point de vue fonctoriel. La notion centrale pour incarner le concept d’espace, selon Grothendieck, étant celle de topos, c’est-à-dire de catégorie de faisceaux sur un site (en particulier, des foncteurs). Ce qui a motivé le développement de la théorie des ∞-catégories ces dernières années a été justement ceci : redéployer la totalité de la géométrie algébrique de Grothendieck, mais en l’interprétant via la sémantique du langage catégorique fournie par la théorie de l’homotopie. Cela peut sembler démesuré, mais c’est exactement ce qui a été accompli avec les travaux de Lurie, Toën et Vezzosi. Il en résulte certes des problèmes propres liés à la théorie elle même, mais il y a aussi beaucoup d’applications aux mathématiques classiques, qu’il est hors de question ne serait-ce que d’esquisser dans une introduction. Citons simplement la première, historiquement, due à Serre : la définition du produit d’intersection des cycles algébriques via la formule des Tor, c’est-à-dire l’idée que, pour obtenir les bonnes multiplicités d’intersection, on ne doit pas considérer le produit tensoriel des algèbres de fonctions $A \otimes_C B$ (qui correspond au produit fibré des variétés algébriques), mais le produit tensoriel dérivé $A \otimes^{\mathbf{L}}_C B$. La géométrie algébrique dérivée permet de donner un sens au spectre de l’algèbre dérivée $A \otimes^{\mathbf{L}}_C B$, lequel s’avère être très exactement le produit fibré de $\mathrm{Spec}(A)$ et de $\mathrm{Spec}(B)$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(C)$ dans la ∞-catégorie des schémas dérivés. Autrement dit, la géométrie algébrique dérivée donne une interprétation géométrique à la formule de Serre. Pour mentionner une application spectaculaire en dehors de la géométrie algébrique dérivée, citons l’article de Lurie et Gaitsgory [GL] sur la conjecture de Weil, sur le nombre de Tamagawa associé à un groupe algébrique affine lisse, à fibre connexes, et de fibre générique semi-simple et simplement connexe, au-dessus d’une courbe (lisse, propre, et géométriquement connexe) définie sur un corps fini.

D’une manière générale, la théorie des topos joue un rôle fondamental en géométrie algébrique. La version dérivée permet, par exemple, de comprendre la théorie de Galois, tant du point de vue classique dégagé par Grothendieck dans [SGA1] (cf. [Moe] pour une reformulation en terme de théorie des topos) que du point de vue de la théorie des pro-types d’homotopie à la Artin-Mazur-Friedlander [AM, Fri], qui se retrouve étendue et améliorée ; nous renvoyons au papier de Hoyois [Hoy] pour un compte rendu plus détaillé quant à ces questions. Un autre aspect de la théorie des topos (annelés) est la propriété universelle du spectre de Zariski d’un topos annelé, ainsi que sa version strictement hensélienne, lesquels jouent par exemple un rôle fondamental dans la vaste généralisation des théorèmes de reconstructions tannakiens prouvés par Lurie en géométrie algébrique classique [Lu5], puis étendus au cadre de la géométrie algébrique dérivée [To1, FI, Wal, Lu4]. Ces théorèmes tannakiens ont ensuite étés affinés par divers auteurs (aussi bien dans leurs versions dérivées que dans leurs versions non-dérivées), et de très belles applications sont tirées de toutes ces améliorations mises bout à bout (y compris les versions ∞-catégoriques, donc) dans un article de Bhatt [Bh]. À titre d'exemple, l'un des corollaires du travail de Bhatt est le suivant (ce qui répond à une question de Drinfeld) : si X est un espace algébrique quasi-compact et quasi-séparé, alors, pour tout anneau commutatif A et tout idéal $I \subset A$, on a une bijection canonique

$$X(\hat{A}) \simeq \varprojlim_n X(A/I^n)$$

(où $\hat{A}$ désigne la complétion I-adique de A), et ce sans supposer aucune autre condition de finitude (en particulier, pas d'anneaux noethériens).

Le présent rapport vise à présenter la théorie des ∞-catégories, et la théorie des topos de Grothendieck dans ce cadre, suivant le livre de Lurie [Lu1] (d'environ 1000 pages), lequel couvre à peu près l'analogue, en théorie des ∞-catégories, du premier tome de [SGA4]. La lecture du texte de Joyal sur les ∞-catégories [Jo3] (qu'il appelle des quasi-catégories) est bien entendu une référence, de même que les travaux de Toën et Vezzosi sur les ∞-topos [TVe1], mais nous avons choisi de prendre autant que possible comme source principale le livre de Lurie.

Commençons par une mise au point. Tout d'abord, on ne cherchera pas ici à définir ce qu'est une bonne théorie des ∞-catégories. On se contentera de donner des principes vagues dans le cadre de cette introduction, puis, dans le corps du texte, on décrira en détails un modèle particulier. En effet, suivant un principe dégagé par Grothendieck [Gr], toute notion raisonnable de ∞-groupoïde doit définir un modèle pour les types d'homotopie des CW-complexes, et toute notion de ∞-catégorie doit donner lieu à une notion raisonnable de ∞-groupoïde en se restreignant aux ∞-catégories dans lesquelles tous les morphismes sont inversibles (en un sens adéquat). De même qu'il existe plusieurs présentations de la théorie de l'homotopie des CW-complexes (via les complexes de Kan, ou encore la version cubique des précédents, les faisceaux sur le gros site des variétés à coins, ou bien encore les petites catégories, etc), il existe plusieurs modèles des ∞-catégories. D'autre part, nous ne parlerons ici que de ∞-catégories très particulières : celles dans lesquelles les morphismes de dimension > 1 sont inversibles, i.e. telle que, pour tout couple d'objets (x, y), les morphismes de x vers y forment un ∞-groupoïde $\mathit{Hom}(x, y)$. Si on prend ce principe pour définition, on retrouve essentiellement la notion de catégorie simpliciale (fibrante) étudiée en profondeur par Dwyer et Kan. Mais c'est une autre notion (non trivialement équivalente à la précédente) que nous appellerons formellement ∞-catégorie, et qui est le sujet central de ce rapport. Le modèle de ∞-catégorie que nous allons présenter ici a été introduit à l'origine par Boardman et Vogt [BV] pour résoudre des problèmes de cohérence posés par la théorie des opérades topologiques, et a été développé par Joyal, à la fin du dernier millénaire, sous la forme qui a ensuite donné lieu au livre de Lurie. L'intérêt de ce modèle est qu'il est minimal : il consiste à constater que la catégorie des ensembles simpliciaux est une sémantique naturelle pour le langage de la théorie des catégories, et puis à suivre cette voie littéralement, pour constater que, dans cette sémantique, une part extrêmement importante des énoncés standard de la théorie des catégories reste vraie, et que la sémantique fournie par la théorie des catégories classique est naturellement contenue dans cette nouvelle interprétation. Les ∞-catégories ne sont donc ici que des ensembles simpliciaux particuliers. De plus, les groupoïdes sont incarnés très exactement par les complexes de Kan, et sont donc, d'après des résultats forts classiques de topologie algébrique, des modèles pour les types d'homotopie. En outre, ce modèle pour les ∞-catégories est équivalent aux autres modèles considérés par d'autres auteurs (par exemple, Toën et Vezzosi privilégient plutôt les catégories simpliciales, les catégories de Segal, et le langage des catégories de modèles). De telles équivalences sont non-triviales en général. Par exemple, la comparaison avec la théorie des catégories simpliciales est un théorème de rectification (ou, si l'on veut, de cohérence) loin d'être évident. Enfin, lorsqu'on interprète la théorie des topos dans ce cadre, on obtient non seulement une théorie en apparence similaire à la théorie classique, mais aussi un lien tout-à-fait précis avec la théorie de l'homotopie des faisceaux simpliciaux, et donc avec les théories cohomologiques considérées habituellement. Enfin, on détient alors de bonnes bases pour développer la géométrie dérivée, mais aussi la topologie classique.

Même si cet aspect ne sera pas abordé dans ce rapport, signalons que, dans son travail sur les ∞-topos et les ∞-catégories en général, Lurie prend soin de considérer la théorie des faisceaux (au sens des ∞-catégories) sur les espaces topologiques. Sa version très générale du théorème de changement de base propre ainsi que de la dualité de Grothendiek-Verdier (dont il a dégagé une version non-abélienne) ont d'ailleurs été exploitées dans un article récent d'Ayala, Francis et Rozenblyum [AFR], dans lequel est établi une équivalence entre la théorie de l'homotopie des espaces stratifiés et celle des ∞-catégories, de sorte que le passage à la ∞-catégorie opposée $C \mapsto C^{op}$ corresponde à la dualité de Poincaré. Cela généralise le principe d'identification de la théorie de l'homotopie des espaces avec celle des ∞-groupoïdes, et illustre encore une fois le slogan par lequel nous avons commencé cette introduction, selon lequel la théorie des catégories et la topologie algébrique sont profondément liées.

Table des matières

1. LES ÉLÉMENTS DU LANGAGE CATÉGORIQUE

On désigne par $\mathbf{\Delta}$ la catégorie simpliciale : les objets sont les ensembles totalement ordonnés

$$[n] = \{0, \dots, n\}\,,\ n \geq 0\,,$$

et les morphismes de $\mathbf{\Delta}$ sont les applications croissantes. On rappelle qu'un ensemble simplicial X est un préfaisceau d'ensembles sur la catégorie $\mathbf{\Delta}$, c'est-à-dire un foncteur

$$X : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathit{Ens}\,.$$

Pour chaque entier $n \geq 0$, on note

$$X_n = X([n])\,.$$

Les ensembles simpliciaux forment une catégorie notée Ens_Δ (les morphismes entres ensembles simpliciaux sont les transformations naturelles). Pour chaque entier $n \geq 0$, l'ensemble simplicial représenté par $[n]$ est noté

$$\Delta^n = \mathit{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])\,.$$

Pour deux ensembles simpliciaux X et Y, on désigne par $\mathit{Hom}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes d'ensembles simpliciaux de X vers Y. En vertu du lemme de Yoneda, l'évaluation en l'identité de Δ^n définit une bijection canonique

$$\mathit{Hom}(\Delta^n, X) \simeq X_n\,.$$

Dans ce texte, on commet un léger abus de notation en considérant cette bijection comme une identité : on note encore $f : \Delta^n \to X$ le morphisme correspondant à un élément $f \in X_n$.

Définition 1.1. — *Soit X un ensemble simplicial. Un* objet *de X est un élément de X_0. Un* morphisme *de X, ou encore, une* flèche *de X, est un élément de X_1.*

Remarque 1.2. — Pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$, l'inclusion $\{\varepsilon\} \subset [1]$ définit un morphisme

$$d_1^{1-\varepsilon} : X_1 \to X_0\,.$$

On écrira

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{ou encore} \quad f : x \to y$$

pour signifier que $f \in X_1$ et que $d_1^1(f) = x$ et $d_1^0(f) = y$. On dira alors que x est la *source* de f et que y est le *but* de f.

Exemple 1.3. — Pour tout objet $x \in X_0$, on a le *morphisme identité* $1_x \in X_1$, de source et de but x, correspondant au morphisme d'ensemble simpliciaux

$$\Delta^1 \to \Delta^0 \xrightarrow{x} X\,.$$

2. CONDITIONS DE SEGAL ET NERFS DE PETITES CATÉGORIES

Soit $u : [m] \to [n]$ une application croissante et injective, d'image J. On notera Δ^J l'image du morphisme de préfaisceaux $\Delta^m \to \Delta^n$ induit par u (de sorte que u induit un isomorphisme de Δ^m sur Δ^J. Si J est un sous-ensemble de $[n]$ de cardinal m, Δ^J désigne la construction ci-dessus, avec u l'unique application croissante d'image J. Pour chaque entier $n \geq 1$, on peut à présent définir l'ensemble simplicial suivant, comme sous-objet de Δ^n :

$$I_n = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Delta^{\{i-1,i\}} \subset \Delta^n\,.$$

Un morphisme d'ensemble simpliciaux $I_n \to X$ correspond donc à un $n+1$-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de flèches de X tel que la source de x_i soit le but de x_{i-1} pour $1 < i \leq n$. De façon imagée, si a_{i-1} et a_i désignent respectivement la source et le but de x_i pour $1 \leq i \leq n$, on pourra représenter un morphisme $I_n \to X$ par un diagramme de la forme

$$a_0 \xrightarrow{x_1} a_1 \to \cdots \to a_{n-1} \xrightarrow{x_n} a_n\,.$$

Pour $n \geq 0$, on définit le *bord* de Δ^n comme le sous-objet suivant :

$$\partial\Delta^n = \bigcup_{J \subsetneq [n]} \Delta^J \subset \Delta^n\,.$$

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on pose

$$\Lambda^n_k = \bigcup_{k \in J \subsetneq [n]} \Delta^J \subset \Delta^n\,.$$

On dispose par ailleurs de la catégorie *Cat* des petites catégories : les objets sont les petites catégories, et les morphismes, les foncteurs. Tout ensemble ordonné peut être vu comme une catégorie : les objets sont les éléments de l'ensemble sous-jacent, et les morphismes d'un élément x vers un élément y sont donnés par la formule

$$Hom(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & \text{si } x \leq y\,; \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

(il n'y a qu'une seule manière possible de définir la loi de composition). De cette manière, on voit aussitôt que les applications croissantes entre ensembles ordonnés correspondent aux foncteurs entre les catégories correspondantes, de sorte que l'on peut voir la catégorie $\mathbf{\Delta}$ comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des petites catégories. Le *foncteur nerf*

$$N : Cat \to Ens_{\Delta}$$

est défini par la formule :

$$N(C)_n = Hom_{Cat}([n], C)$$

pour toute petite catégorie C et tout entier $n \geq 0$. Autrement dit, le foncteur nerf est l'adjoint à droite de l'extension de Kan à gauche le long de l'inclusion pleine $\mathbf{\Delta} \subset Cat$. On démontre facilement que le foncteur nerf est pleinement fidèle. En outre, l'image essentielle de ce foncteur admet la description explicite suivante.

Proposition 2.1. — *Soit X un ensemble simplicial. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tous entiers $n \geq 2$ et $0 < k < n$, l'application de restriction

$$X_n = Hom(\Delta^n, X) \to Hom(\Lambda^n_k, X)$$

est bijective.

(ii) Pour tout entier $n \geq 2$, l'application de restriction

$$X_n = Hom(\Delta^n, X) \to Hom(I_n, X) = X_1 \times_{X_0} X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

est bijective.

(iii) Il existe une petite catégorie C et un isomorphisme d'ensembles simpliciaux

$$X \simeq N(C)\,.$$

3. DÉFINITION DES ∞-CATÉGORIES

Définition 3.1. — *Une* ∞-catégorie *est un ensemble simplicial X tel que, pour tous entiers $n \geq 2$ et $0 < k < n$, l'application de restriction*

$$X_n = Hom(\Delta^n, X) \to Hom(\Lambda^n_k, X)$$

soit surjective. Un morphisme de ∞-catégories *(on dira aussi un* foncteur*) est un morphisme entre les ensembles simpliciaux sous-jacents.*

Remarque 3.2. — Nous suivons ici la terminologie de Lurie. Dans les travaux publiés de Joyal, les ∞-catégories sont appelées des *quasi-catégories*. Cette notion a en fait été introduite par Boardman et Vogt [BV], sous le nom de *complexe de Kan faible*.

Exemple 3.3. — Il résulte de la proposition 2.1 que (le nerf de) toute petite catégorie est une ∞-catégorie. On peut donc voir la catégorie des petites catégories comme une sous-catégorie pleine de celle des (petites) ∞-catégories. A strictement parler, on n'a défini ici que la notion de 'petite ∞-catégorie'. La notion d'univers [Bou] permettra de donner un sens à des ∞-catégories qui ne sont pas petites.

Exemple 3.4. — On rappelle qu'un complexe de Kan est un ensemble simplicial X tel que, pour tous entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, l'application de restriction

$$X_n = Hom(\Delta^n, X) \to Hom(\Lambda^n_k, X)$$

soit surjective. Il est clair que tout complexe de Kan est une ∞-catégorie. On verra plus loin que les complexes de Kan jouent un rôle central dans la théorie des ∞-catégories ; voir le théorème 6.3.

On définit un foncteur $i : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$ comme suit. Pour $n \geq 0$, on a $i([n]) = [n]$, et pour toute application croissante $f : [m] \to [n]$, l'application $i(f) : [m] \to [n]$ est définie par la formule

$$i(f)(k) = n - f(m - k) .$$

On définit le foncteur

$$Ens_\Delta \to Ens_\Delta \quad , \qquad X \mapsto X^{op}$$

par la formule $X^{op} = i^*(X) = X \circ i$. On démontre facilement qu'un ensemble simplicial X est une ∞-catégorie si et seulement si X^{op} en est une. On dit alors que X^{op} est la ∞-catégorie *opposée* de X. Vu que $i \circ i$ est l'identité de $\mathbf{\Delta}$, on a la formule

$$(X^{op})^{op} = X .$$

Pour une petite catégorie C, on a aussi l'identité

$$N(C)^{op} = N(C^{op}) ,$$

où C^{op} désigne la catégorie opposée de C.

Si X est une ∞-catégorie, et si $S \subset X_0$ est un ensemble d'objets de X, la *sous-∞-catégorie pleine* engendrée par S est définie comme le sous-ensemble simplicial de X dont les simplexes sont de type $f : \Delta^n \to X$, avec $f(i) \in S$ pour $0 \leq i \leq n$ (ce qui forme bien une ∞-catégorie).

4. LA STRICTIFICATION DE BOARDMAN ET VOGT

Définition 4.1. — *Soit X un ensemble simplicial. Un* triangle *de X est un morphisme de la forme*

$$x : \partial\Delta^2 \to X .$$

Un triangle x de X commute *s'il existe un morphisme*

$$c : \Delta^2 \to X$$

dont la restriction au bord de Δ^2 est égale à x.

$$c|_{\partial\Delta^2} = x$$

Remarque 4.2. — Un triangle $x : \partial\Delta^2 \to X$ sera représenté par un diagramme de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "g"] & \\ x_0 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & x_2 \end{tikzcd}$$

avec f, g et h les restrictions de x à $\Delta^{\{0,1\}}$, $\Delta^{\{1,2\}}$ et $\Delta^{\{0,2\}}$, respectivement. Un morphisme $c : \Delta^2 \to X$ tel que $c|_{\partial\Delta^2} = x$ sera quant à lui représenté par un diagramme de la forme suivante.

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "c"] & \\ x_0 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & {} & x_2 \end{tikzcd}$$

Lorsqu'il existe un tel morphisme c, on dira que h est une *composition* de g et de f. Lorsque X est une ∞-catégorie, pour tous morphismes composables

$$x_0 \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{g} x_2$$

de X, il existe une composition $x_0 \xrightarrow{h} x_2$. En effet, la donnée du couple (f, g) définit un morphisme d'ensemble simpliciaux de la forme

$$(f, g) : \Lambda^2_1 = I_2 \to X\,,$$

et la surjectivité de l'application

$$X_2 = \mathit{Hom}(\Delta^2, X) \to \mathit{Hom}(\Lambda^2_1, X)$$

assure l'existence d'un élément $c \in X_2$ dont la restriction à $\Delta^{\{0,2\}}$ nous donne une composition de g et de f.

Proposition 4.3. — *Soit X une ∞-catégorie. On lui associe une (petite) catégorie $ho(X)$ de la façon suivante. Les objets de $ho(X)$ sont ceux de X. Pour $x, y \in X_0$, on dit que deux morphismes f et g de X, tous deux de source x et de but y, sont* homotopes *si le morphisme g est une composition de f et de 1_x. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence, et l'ensemble des morphismes $\mathit{Hom}_{ho(X)}(x, y)$ est celui des classes d'équivalences de morphismes de X, de source x et de but y. La loi de composition des morphismes dans $ho(X)$ est définie en choisissant une composition pour chaque couple de morphismes composables de X.*

Le foncteur nerf admet un adjoint à gauche

$$\tau : \mathit{Ens}_\Delta \to \mathit{Cat}$$

(que l'on peut décrire comme l'extension de Kan à gauche de l'inclusion pleine $\mathbf{\Delta} \subset \mathit{Cat}$). Pour un ensemble simplicial X, la catégorie $\tau(X)$ est simplement la catégorie librement engendrée par le graphe orienté formé des morphismes de X, modulo les relations de la forme $h = g \circ f$ dès que h est une composition de g et de f ; cf. [GZ, II.4].

Proposition 4.4. — *Soit X une ∞-catégorie. Il existe un unique morphisme d'ensembles simpliciaux $X \to N(ho(X))$ qui soit l'identité au niveau des objets et qui envoie les morphismes de X sur leur classe d'homotopie. En outre, ce morphisme induit un isomorphisme de catégories (i.e. un foncteur bijectif au niveau des objets) :*

$$\tau(X) \simeq ho(X)\,.$$

Définition 4.5. — *Soit X une ∞-catégorie. Un morphisme $f : x_0 \to x_1$ de X est* inversible *(on dira encore que f est une* équivalence*) si son image dans la catégorie $ho(X)$ est un isomorphisme.*

Remarque 4.6. — D'après ce qui précède, dire qu'un morphisme $f : x_0 \to x_1$ comme ci-dessus est inversible revient simplement à dire qu'il existe un morphisme $g : x_1 \to x_0$ tel que les triangles correspondant aux deux diagrammes ci-dessous commutent.

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "g"] & \\ x_0 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1_{x_0}"'] & & x_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x_0 \arrow[dr, "f"] & \\ x_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "1_{x_1}"'] & & x_1 \end{tikzcd}$$

Corollaire 4.7. — *Pour toutes ∞-catégories X et Y, le foncteur canonique*

$$ho(X \times Y) \to ho(X) \times ho(Y)$$

est un isomorphisme (en particulier, une équivalence de catégories).

5. FONCTEURS ET TRANSFORMATIONS NATURELLES

On rappelle que, comme toute catégorie de préfaisceaux sur une petite catégorie, la catégorie des ensembles simpliciaux admet un Hom interne relativement au produit cartésien. Pour deux ensembles simpliciaux A et X, l'objet $\underline{Hom}(A, X)$ est caractérisé par la donnée de bijections fonctorielles de la forme

$$Hom(U \times A, X) \simeq Hom(U, \underline{Hom}(A, X))$$

pour tout ensemble simplicial U. Autrement dit, l'ensemble simplicial $\underline{Hom}(A, X)$ est définit par la formule

$$\Delta^n \mapsto Hom(\Delta^n \times A, X)\,.$$

Cette construction est liée à la notion de catégories de foncteurs dans le sens où, pour deux petites catégories A et B, si on note $\underline{Hom}(A, B)$ la catégorie des foncteurs de A vers B (avec les transformations naturelles pour morphismes), on a un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux :

$$\underline{Hom}(N(A), N(B)) \simeq N(\underline{Hom}(A, B))\,.$$

Proposition 5.1 (Joyal). — *Soient A et X deux ensembles simpliciaux. Si X est une ∞-catégorie, alors $\underline{Hom}(A,X)$ en est une aussi.*

Sous les hypothèses de la proposition précédente, les *foncteurs* de A vers X sont les objets de la ∞-catégorie $\underline{Hom}(A,X)$. On appelle *morphismes de foncteurs*, ou encore, *tranformations naturelles*, les morphismes de la ∞-catégorie $\underline{Hom}(A,X)$.

Bien que l'énoncé en question soit très naturel, la preuve du théorème suivant est non-triviale, et les techniques nécessaires à sa mise en place sont au cœur d'une part importante des fondements de la théorie des ∞-catégorie (en particulier, pour justifier que des constructions aussi élémentaires que celles présentées dans ces notes ont bien le sens escompté).

Théorème 5.2 (Joyal [Jo3, thm. 5.14]). — *Soient A un ensemble simplicial, et X une ∞-catégorie. On se donne deux foncteurs $u, v : A \to X$ et une transformation naturelle $\alpha : u \to v$ dans $\underline{Hom}(A,X)$. Pour que α soit inversible, il faut et il suffit que, pour tout objet a de A (i.e. tout élément a de A_0), le morphisme induit $\alpha_a : u(a) \to v(a)$ soit inversible dans X.*

6. ∞-GROUPOÏDES ET TYPES D'HOMOTOPIE DE CW-COMPLEXES

On rappelle qu'un groupoïde est une catégorie dans laquelle tout morphisme est inversible. Désignons par *Gpd* la catégorie des petits groupoïdes (avec les foncteurs pour morphismes). Tout groupoïde étant en particulier une catégorie, on dispose d'un foncteur d'inclusion

$$i : Gpd \to Cat\,.$$

Ce foncteur admet un adjoint à droite *inv* et un adjoint à gauche π_1. Pour une petite catégorie C, le groupoïde $inv(C)$ est le sous-groupoïde maximal de C (i.e. est obtenu comme la sous-catégorie de C ayant les mêmes objets, avec les morphismes inversibles de C pour morphismes). La co-unité de l'adjonction (i, inv) est simplement définie par l'inclusion

$$inv(C) \subset C\,.$$

Le groupoïde $\pi_1(C)$ est la catégorie obtenue en inversant formellement tous les morphismes de C (on peut aussi le voir comme le groupoïde de Poincaré (i.e. des classes d'homotopie de chemins) de l'espace classifiant BC).

Définition 6.1. — *Un ∞-groupoïde est une ∞-catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.*

Un complexe de Kan *est un ensemble simplicial X tel que, pour tous entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, l'application de restriction*

$$X_n = Hom(\Delta^n, X) \to Hom(\Lambda^n_k, X)$$

soit surjective.

Remarque 6.2. — Par définition, un ∞-groupoïde est une ∞-catégorie X dont la catégorie associée $ho(X) = \tau(X)$ est un groupoïde. Il est bien connu que tout complexe de Kan est un ∞-groupoïde. La réciproque est vraie, mais c'est non trivial.

THÉORÈME 6.3 (Joyal [Lu1, prop. 1.2.5.1]). — *Un ensemble simplicial est un ∞-groupoïde si et seulement s'il est un complexe de Kan.*

On rappelle que la catégorie des complexes de Kan et celle des CW-complexes sont profondément reliées de la façon suivante (on renvoie par exemple à [GZ] et [GJ] pour des traitements systématiques de la théorie des ensembles simpliciaux comme modèles des types d'homotopie des CW-complexes). On définit, pour tout entier $n \geq 0$, le simplexe topologique

$$|\Delta^n| = \Big\{(x_0, \dots, x_n) \in [0,1]^{n+1} \;\Big|\; \sum_i x_i = 1\Big\}$$

(muni de la topologie induite de celle du produit $[0,1]^{n+1}$, où $[0,1]$ désigne l'intervalle fermé des nombres réels compris entre 0 et 1). Pour un morphisme $f : \Delta^m \to \Delta^n$, vu comme une application croissante $f : \{0, \dots, m\} \to \{0, \dots, n\}$, l'application continue

$$|f| : |\Delta^m| \to |\Delta^n|$$

est définie par la formule

$$|f|(x_0, \dots, x_m) = (y_0, \dots, y_n) \quad \text{avec} \qquad y_j = \sum_{i \in f^{-1}(j)} x_i \,.$$

On définit un foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux vers celle des espaces topologiques, le foncteur de *réalisation topologique*,

$$| - | : \mathit{Ens}_\Delta \to \mathit{Top}$$

en posant, pour un ensemble simplicial X,

$$|X| = \varinjlim_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|$$

(la limite inductive étant indexée par la catégorie donc les objets sont les couples (n, x), avec x un morphisme d'ensembles simpliciaux de la forme $x : \Delta^n \to X$ (i.e. un simplexe de dimension n dans X), et dont les flèches $(m, x) \to (n, y)$ sont les morphismes $f : \Delta^m \to \Delta^n$ de $\mathbf{\Delta}$ tels que $yf = x$). Le foncteur de réalisation topologique admet un adjoint à droite

$$\mathit{Sing} : \mathit{Top} \to \mathit{Ens}_\Delta \,.$$

Pour un espace topologique X, son complexe singulier $\mathit{Sing}(X)$ est le préfaisceau sur $\mathbf{\Delta}$ défini par :

$$\Delta^n \mapsto \mathit{Hom}_{\mathit{Top}}(|\Delta^n|, X) \,.$$

On définit les *équivalences d'homotopie faibles* d'ensembles simpliciaux comme les morphismes $f : X \to Y$ de Ens_Δ tel que l'application continue $|f| : |X| \to |Y|$ soit une équivalence d'homotopie. Un théorème bien connu de Milnor affirme alors que :

(a) pour tout ensemble simplicial X, le morphisme d'unité $X \to \mathit{Sing}(|X|)$ est une équivalence d'homotopie faible.

(b) pour tout espace topologique Y, l'application continue de co-unité $|\mathit{Sing}(Y)| \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible d'espaces topologiques (i.e. induit une bijection sur les ensembles de composantes connexe par arcs, et, pour tout point x de $X = |\mathit{Sing}(Y)|$, des isomorphismes de groupes $\pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,y)$ pour tout entier $n \geq 1$, avec y l'image de x dans Y).

Il est bien connu que, pour tout ensemble simplicial X, l'espace $|X|$ a une structure canonique de CW-complexe. Par conséquent, lorsque Y est un CW-complexe, le théorème de Whitehead nous dit que la co-unité $|\mathit{Sing}(Y)| \to Y$ est une équivalence d'homotopie. De même, pour tout espace topologique Y, le complexe singulier $\mathit{Sing}(Y)$ est un complexe de Kan, et un morphisme entre complexes de Kan $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie (i.e. s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ et des homotopies simpliciales reliant fg et 1_Y ainsi que gf et 1_X). Autrement dit, le théorème de Milnor s'interprète en affirmant que la théorie de l'homotopie des CW-complexes et celle des complexes de Kan sont équivalentes (et la théorie de Quillen, des catégorie de modèles, donne un sens encore plus précis à cette interprétation).

Notons ∞-*Cat* (resp. ∞-*Gpd*) la sous-catégorie pleine de Ens_Δ dont les objets sont les ∞-catégories (resp. les ∞-groupoïdes). Si X est une ∞-catégorie, on définit l'ensemble simplicial $\mathit{inv}(X)$ en formant le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathit{inv}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ N(\mathit{inv}(\mathit{ho}(X))) \arrow[r] & N(\mathit{ho}(X)) \end{tikzcd}$$

Une conséquence du théorème 6.3 peut se formuler comme suit.

Proposition 6.4. — *Le foncteur $X \mapsto \mathit{inv}(X)$ prends ses valeurs dans la catégorie des ∞-groupoïdes et est un adjoint à droite du foncteur défini par l'inclusion $i : \infty\text{-}\mathit{Gpd} \to \infty\text{-}\mathit{Cat}$.*

Corollaire 6.5. — *Soit X une ∞-catégorie. On se donne un monomorphisme d'ensembles simpliciaux $u : A \to B$ et un morphisme $a : A \to X$. Si l'application induite par la réalisation topologique $|u| : |A| \to |B|$ est une équivalence d'homotopie, et si, pour tout 1-simplexe $f \in A_1$, le morphisme $a(f)$ est inversible dans X, alors il existe un morphisme $b : B \to X$ tel que $bu = a$.*

En effet, l'hypothèse implique que a se factorise par $\mathit{inv}(X)$, lequel est un ∞-groupoïde et donc un complexe de Kan, et on en déduit l'existence d'un morphisme $B \to \mathit{inv}(X)$ dont la restrition à A, composée avec l'inclusion $\mathit{inv}(X) \subset X$, redonne a.

Soit $J = N(\pi_1([1]))$ le nerf du groupoïde fondamental de Δ^1. Le groupoïde $\pi_1([1])$ est le groupoïde qui a pour ensemble d'objets $\{0,1\}$, et est caractérisé par le fait que, pour tout couple d'objets (x, y), l'ensemble des morphismes de x vers y est de cardinal 1. Le morphisme $j : \Delta^1 \to J$ correspondant à l'unique morphisme de 0 vers 1 est clairement un monomorphisme, et induit une équivalence d'homotopie $|\Delta^1| = [0, 1] \to |J|$. En effet, il suffit de vérifier que le CW-complexe $|J|$ est contractile, ce qui se voit lorsqu'on identifie (à homéomorphisme près) l'espace $|J|$ avec la sphère infinie (i.e. la réunion des sphères S^n via les équateurs $S^n \subset S^{n+1}$, par exemple).

On peut donc toujours strictifier les inverses dans une ∞-catégorie dans le sens suivant.

Corollaire 6.6. — *Soit X une ∞-catégorie, et $f : x_0 \to x_1$ un morphisme de X. Pour que f soit inversible, il faut et il suffit qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux $\varphi : J \to X$ tel que $\varphi j = f : \Delta^1 \to X$.*

7. ÉQUIVALENCES DE ∞-CATÉGORIES

Nous avons déjà vu plus haut que les foncteurs d'une ∞-catégorie vers une autre forment naturellement une ∞-catégorie. En particulier, nous disposons de la ∞-catégorie des morphismes dans une ∞-catégorie X : c'est la ∞-catégorie des foncteurs de la forme $\Delta^1 \to X$. L'inclusion $\partial\Delta^1 = \Delta^0 \amalg \Delta^0 \to \Delta^1$ induit les foncteurs source et but, notés respectivement s et b :

$$(s, b) : \underline{Hom}(\Delta^1, X) \to \underline{Hom}(\partial\Delta^1, X) \simeq X \times X \,.$$

Étant donné deux objets x_0 et x_1 de X, on définit l'ensemble simplicial $Hom_X(x_0, x_1)$ des morphismes de x_0 vers x_1 en formant le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} Hom_X(x_0, x_1) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{Hom}(\Delta^1, X) \arrow[d, "(s,b)"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "(x_0,x_1)"] & X \times X \end{tikzcd}$$

On déduit le théorème suivant de [Lu1, lem. 2.1.3.3, prop. 4.2.1.6].

Théorème 7.1 (Joyal). — *L'ensemble simplicial $Hom_X(x_0, x_1)$ est un ∞-groupoïde.*

Remarque 7.2. — Lorsque $X = N(C)$ avec C une petite catégorie, l'ensemble simplicial $Hom_X(x_0, x_1)$ est le préfaisceau constant sur $\mathbf{\Delta}$ de valeur $Hom_C(x_0, x_1)$.

Remarque 7.3. — Lorsque X est un complexe de Kan, pour tout point x de X, le ∞-groupoïde $Hom_X(x, x)$ est habituellement noté $\Omega(X, x)$, et est appelé l'*espace des lacets de X* (de sorte que les composantes connexes de $Hom_X(x, x)$ forment le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$).

Remarque 7.4. — Lurie travaille le plus souvent avec une définition différente du ∞-groupoïde des morphismes de x_0 vers x_1. Voir [Lu1, cor. 4.2.1.8] pour l'équivalence de ces deux notions.

Définition 7.5. — *Soient X et Y deux ∞-catégories, et $u : X \to Y$ un foncteur.*

Le foncteur u est une équivalence de ∞-catégories *s'il existe un foncteur $v : Y \to X$ ainsi que deux transformations naturelles inversibles $uv \to 1_Y$ et $1_X \to vu$.*

Le foncteur u est pleinement fidèle *si, pour tous objets x_0 et x_1 de X, le morphisme*

$$Hom_X(x_0, x_1) \to Hom_Y(u(x_0), u(x_1))$$

est une équivalence d'homotopie faible (ou encore, de façon équivalente, une équivalence de ∞-catégories).

Le foncteur u est essentiellement surjectif *si, pour tout objet y de Y, il existe un objet x de X ainsi qu'un morphisme inversible $u(x) \to y$ dans Y.*

Fait 7.6. — *Si X et Y sont deux ∞-groupoïdes, un morphisme $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible si et seulement si c'est une équivalence de ∞-catégories.*

(C'est une conséquence assez formelle des résultats classiques concernant la théorie de l'homotopie des complexes de Kan.)

Théorème 7.7 (Joyal). — *Soient X et Y deux ∞-catégories, et $u : X \to Y$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le foncteur u est une équivalence de ∞-catégories.

(ii) Le foncteur u est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

(iii) Pour tout ensemble simplicial A, le foncteur induit en composant avec u à gauche,

$$u_* : \underline{Hom}(A, X) \to \underline{Hom}(A, Y)\,,$$

est une équivalence de ∞-catégories.

(iv) Pour tout ensemble simplicial A, le fonceur induit en composant avec u à gauche,

$$u_* : ho(\underline{Hom}(A, X)) \to ho(\underline{Hom}(A, Y))\,,$$

est une équivalence de catégories.

(v) Pour toute ∞-catégorie C, le foncteur induit en composant avec u à droite,

$$u^* : \underline{Hom}(Y, C) \to \underline{Hom}(X, C)\,,$$

est une équivalence de ∞-catégories.

(vi) Pour toute ∞-catégorie C, le foncteur induit en composant avec u à droite,

$$u^* : ho(\underline{Hom}(Y, C)) \to ho(\underline{Hom}(X, C))\,,$$

est une équivalence de catégories.

On dit que deux ∞-catégories sont *équivalentes* s'il existe une équivalence de ∞-catégories de l'une vers l'autre.

Mis à part l'équivalence des conditions (i) et (ii) (qui résulte par exemple de [Lu1, prop. 2.2.4.1, thm. 2.2.5.1]), le théorème ci-dessus est une conséquence formelle de l'existence d'une structure de catégorie de modèles fermée correspondant à la théorie de l'homotopie des ∞-catégories, ce qui va être développé dans la section suivante.

8. LA STRUCTURE DE CATÉGORIE DE MODÈLES DE JOYAL

On rappelle que, dans une catégorie donnée, un morphisme $p : X \to Y$ a la propriété de relèvement à droite relativement à un morphisme $i : A \to B$ si, pour tous morphismes $a : A \to X$ et $b : B \to Y$ tels que $bi = pa$, il existe un morphisme $h : B \to X$ tel que $ph = b$ et $hi = a$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Définition 8.1. — *Une* fibration de Kan intérieure *(resp. une* fibration de Kan*, resp. une* fibration triviale*) est un morphisme d'ensembles simpliciaux $p : X \to Y$ ayant la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions $\Lambda^n_k \to \Delta^n$, $n \geq 2$, $0 < k < n$ (resp. aux inclusions $\Lambda^n_k \to \Delta^n$, $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, resp. aux inclusions $\partial\Delta^n \to \Delta^n$, $n \geq 0$).*

On rappelle que la catégorie des petites catégories admet une structure de catégorie de modèles fermée au sens de Quillen définie comme suit (on renvoie le lecteur au texte original de Quillen [Qui], ou bien par exemple au livre de Hovey [Hov], ou encore à l'appendice A du livre de Lurie [Lu1], pour les définitions et propriétés fondamentales des catégories de modèles fermées).

Les équivalences faibles sont les équivalences de catégories. Les cofibrations sont les foncteurs $u : A \to B$ tels que pour tous objets a_0 et a_1 de A, si $u(a_0) = u(a_1)$, alors $a_0 = a_1$. Les fibrations sont les isofibrations, c'est-à-dire les foncteurs $u : A \to B$ tels que, pour tout isomorphisme $g : b_0 \to b_1$ dans B et tout objet a_0 de A tels que $u(a_0) = b_0$, il existe un isomorphisme $f : a_0 \to a_1$ dans A tel que $u(a_1) = b_1$ et $u(f) = g$. Ce qu'il y a à retenir de cette structure de catégorie de modèles sont les propriétés suivantes.

(a) Tout foncteur f admet une factorisation de la forme $f = pi$ où i est une équivalence de catégories qui induit une application injective au niveau des objets, et où p est une isofibration.

(b) La classe des isofibrations est stable par changements de base et par compositions.

(c) L'image inverse d'une équivalence de catégories le long d'une isofibration est une équivalence de catégories.

(d) Pour qu'un foncteur soit à la fois une isofibration et une équivalence de catégories, il faut et il suffit que ce soit une équivalence de catégories induisant une application surjective au niveau des objets.

Ce qu'il y a retenir de ces propriétés est que, à équivalence de catégories près, tout foncteur est une isofibration, et que les produits fibrés construits en termes d'isofibrations sont invariants par équivalences de catégories. C'est ce qui donne un sens à la notion de 2-produit fibré (c'est-à-dire à la bonne notion de changement de base pour les géomètres qui travaillent avec des champs de Deligne-Mumford ou bien des orbifolds, par exemple). Afin d'avoir le même type de constructions à notre disposition, on introduit donc les notions suivantes.

DÉFINITION 8.2. — *Soient X et Y deux ∞-catégories. Un foncteur $u : X \to Y$ est une* isofibration *si u est une fibration de Kan intérieure et si, pour tout morphisme inversible : $g : y_0 \to y_1$ dans Y, et tout objet x_0 de X tels que $u(x_0) = y_0$, il existe un morphisme inversible $f : x_0 \to x_1$ dans X tel que $u(x_1) = y_1$ et $u(f) = g$.*

Exemple 8.3. — Si C et D sont deux petites catégories, un foncteur $u : C \to D$ est une isofibration si et seulement si $N(u) : N(C) \to N(D)$ est une isofibration.

Exemple 8.4. — Pour toute ∞-catégorie X, le foncteur canonique $X \to N(ho(X))$ est une isofibration.

Exemple 8.5. — Pour toute ∞-catégorie X, l'inclusion $inv(X) \to X$ est une isofibration.

Exemple 8.6. — On peut démontrer que, pour toute ∞-catégorie X et tout monomorphisme d'ensembles simpliciaux $A \to B$, le foncteur de restriction

$$\underline{Hom}(B, X) \to \underline{Hom}(A, X)$$

est une isofibration ; c'est un cas particulier d'un théorème de Joyal [Lu1, cor. 2.3.2.5].

Le théorème suivant affirme que l'on peut définir et manipuler la théorie de l'homotopie des ∞-catégories tout comme on le fait pour les complexes de Kan (à ceci près que les équivalences d'homotopie simpliciales sont remplacées par les équivalences de ∞-catégories) ; voir [Jo3, thm. 6.12], ou [Lu1, thm. 2.2.5.1 et cor. 2.4.6.5], pour deux preuves assez différentes.

THÉORÈME 8.7 (Joyal). — *La catégorie des ensembles simpliciaux admet une unique structure de catégorie de modèles fermée dont les cofibrations sont les monomorphismes, et dont les objets fibrants sont les ∞-catégories (i.e. telle que, pour tout ensemble simplicial X, le morphisme $X \to \Delta^0$ est une fibration si et seulement si X est une ∞-catégorie). En outre, les morphismes entre ∞-catégories qui sont des fibrations sont précisément les isofibrations, et les équivalences faibles sont stables par produits finis.*

Encore une fois, plutôt que d'épiloguer sur la notion abstraite de catégorie de modèles fermée, nous allons expliciter une partie substancielle des propriétés qui sont résumées par le théorème 8.7.

DÉFINITION 8.8. — *Un morphisme d'ensembles simpliciaux $u : A \to B$ est une* équivalence faible catégorique *si, pour toute ∞-catégorie X, le foncteur de composition avec u à*

$$ho(\underline{Hom}(B, X)) \to ho(\underline{Hom}(A, X))$$

est une équivalence de catégories.

Exemple 8.9. — On a vu qu'un foncteur entre ∞-catégories est une équivalence faible catégorique si et seulement si c'est une équivalence de ∞-catégories (cf. théorème 7.7). On démontre en outre que les équivalences faibles catégoriques sont les équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée de Joyal (i.e. du théorème 8.7) ; voir [Jo3, thm. 6.12].

Exemple 8.10. — Toute fibration triviale est une équivalence faible catégorique. De plus, on vérifie que toute fibration triviale a la propriété de relèvement à droite relativement à tout monomorphisme. En particulier, toute fibration triviale admet une section. Plus précisément, si $p : X \to Y$ est une fibration triviale, alors les sections de p définissent un sous-ensemble simplicial de $\underline{Hom}(Y, X)$ qui s'avère être un ∞-groupoïde équivalent au point.

Corollaire 8.11. — *Il existe un foncteur $C : Ens_\Delta \to Ens_\Delta$ et une transformation naturelle $1_{Ens_\Delta} \to C$ tels que, pour tout ensemble simplicial X, les deux propriétés suivantes soient vérifiées.*

(i) L'ensemble simplicial $C(X)$ est une ∞-catégorie.

(ii) Le morphisme $X \to C(X)$ est à la fois un monomorphisme et une équivalence faible catégorique.

En outre, on peut imposer que, pour tout ensemble simplicial X, l'application induite $X_0 \to C(X)_0$ soit l'identité.

Le théorème 8.7 implique aussi que les propriétés (a), (b), (c) et (d) énoncées page 16 restent vraies dans le cadre des ∞-catégories, en remplaçant la notion d'isofibration par celle de la définition 8.2, la notion d'équivalence de catégories par celle d'équivalence de ∞-catégories, la notion de foncteur induisant une injection sur les objets par celle de monomorphisme, et la notion d'équivalence de catégories induisant une application surjective au niveau des objets par celle de fibration triviale. En particulier, la notion de 2-produit fibré s'étend naturellement au cadre des ∞-catégories.

Le fait que les équivalence faibles catégoriques soient stablent par produits finis implique en particulier que, pour toute ∞-catégorie X et toute cofibration triviale $i : A \to B$ (i.e. i est à la fois un monomorphisme et une équivalence faibles catégorique), le foncteur de composition avec i à droite

$$i^* : \underline{Hom}(B, X) \to \underline{Hom}(A, X)$$

est une fibration triviale (en particulier, un tel morphisme admet toujours des sections). Le cas où i est l'inclusion canonique $\Lambda^2_1 \subset \Delta^2$ est intéressant en lui-même, et donne en fait une autre caractérisation des ∞-catégories.

Proposition 8.12 (Joyal [Lu1, cor. 2.3.2.2]). — *Un ensemble simplicial X est une ∞-catégorie si et seulement si le morphisme de restriction*

$$\underline{Hom}(\Delta^2, X) \to \underline{Hom}(\Lambda^2_1, X)$$

est une fibration triviale.

Remarque 8.13. — En particulier, étant donné deux morphismes composables

$$x_0 \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{g} x_2$$

dans une ∞-catégorie X, ce qui correspond à un morphisme $(f, g) : \Lambda^2_1 \to X$, la fibre du foncteur $\underline{Hom}(\Delta^2, X) \to \underline{Hom}(\Lambda^2_1, X)$ au-dessus de (f, g) est un ∞-groupoïde équivalent au point. Autrement dit, l'espace des compositions possibles de f et de g est contractile.

9. LOCALISATION

Soit C une ∞-catégorie et $S \subset C$ une sous-∞-catégorie. Pour une ∞-catégorie X, on note $\underline{Hom}_S(C, X)$ la sous-∞-catégorie pleine de $\underline{Hom}(C, X)$ engendrée par les foncteurs $C \to X$ qui envoient tous les morphismes de S sur des morphismes inversibles.

Définition 9.1. — *Une* localisation de C par S *est la donnée d'une ∞-catégorie $S^{-1}C$ et d'un foncteur $\gamma : C \to S^{-1}C$ qui envoie tous les morphismes de S sur des morphismes inversibles, et tel que, pour toute ∞-catégorie X, le foncteur de composition par γ à droite*

$$\underline{Hom}(S^{-1}C, X) \to \underline{Hom}_S(C, X)$$

soit une équivalence de ∞-catégories.

Remarque 9.2. — Lorsque C est le nerf d'une catégorie C_0 (et donc S le nerf d'une sous-catégorie $S_0 \subset C_0$), la catégorie homotopique $ho(S^{-1}C)$ est (canoniquement équivalente à) la catégorie des fractions de C_0 (pour S_0) introduite par Gabriel et Zisman [GZ]. Autrement dit, au regard du théorème 7.1, la catégorie $S^{-1}C$ est une version enrichie en ∞-groupoïdes de la catégorie de fractions classique. Par exemple, pour C_0 la catégorie des complexes (bornés) de cochaînes dans une catégorie abélienne A, et S_0 la sous-catégorie des quasi-isomorphismes, on obtient une version ∞-catégorique de la catégorie dérivée (bornée) de A.

Théorème 9.3. — *Il existe des localisations de C par S (et on peut en donner une construction fonctorielle en (C, S)).*

La construction de $S^{-1}C$ suit le schéma suivant. On construit d'abord une localisation de S par S toute entière

$$S \to S^{-1}S\,,$$

puis on forme le carré cocartésien ci-dessous dans la catégorie des ensembles simpliciaux.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ S^{-1}S \arrow[r] & L(C, S) \end{tikzcd}$$

Pour finir, on choisit une équivalence faible catégorique $L(C, S) \to S^{-1}C$ de but une ∞-catégorie (ce qui est possible en vertu du corollaire 8.11). Il reste à expliquer d'où provient la construction de $S^{-1}S$: on choisit un morphisme $S \to S^{-1}S$ qui est une équivalence d'homotopie faible et dont le but est un complexe de Kan (une telle chose s'obtient par l'argument du petit objet, comme dans [GZ], ou bien avec le foncteur Ex^{∞} de Kan, comme cela est rappelé dans [GJ], ou bien encore en posant $S^{-1}S = \mathit{Sing}(|S|)$). On peut en outre imposer que le foncteur $S \to S^{-1}S$ soit l'identité a niveau des objets (par exemple en posant $S^{-1}S = Ex^{\infty}(S)$), de sorte que l'on peut imposer le foncteur canonique $C \to S^{-1}C$ être l'application identité au niveau des objets.

10. OBJETS FINAUX, TRANCHES ET ADJONCTIONS

Soit X une ∞-catégorie.

Définition 10.1. — *Un objet ξ de X est* final *si, pour tout objet x de X, le ∞-groupoïde $\mathit{Hom}_X(x,\xi)$ est équivalent à la ∞-catégorie terminale Δ^0.*

Un objet de X est initial *s'il est final dans la ∞-catégorie opposée X^{op}.*

On dit que X admet un objet final *(resp.* initial*) si l'ensemble des objets finaux (resp. initiaux) de X n'est pas vide.*

Remarque 10.2. — Si ξ et un objet final de X, alors c'est aussi un objet final de la catégorie $ho(X)$. En particulier, si ξ_0 et ξ_1 sont deux objet finaux de X, ils sont isomorphes. La propriété que $\mathit{Hom}_X(\xi_0,\xi_1)$ soit un ∞-groupoïde équivalent au point exprime le fait qu'ils sont *canoniquement isomophes* au sens de la théorie des ∞-catégories.

Soit x un objet de X. La *tranche de X au-dessus de x* est l'ensemble simplicial $X_{/x}$ obtenu en formant le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} X_{/x} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathit{Hom}}(\Delta^1, X) \arrow[d, "b"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "x"] & X \end{tikzcd}$$

On déduit aussitôt de l'exemple 8.6 que la tranche $X_{/x}$ est une ∞-catégorie.

Fait 10.3. — *Le couple $(x, 1_x)$ est un objet final de $X_{/x}$.*

Le foncteur $X_{/x} \to X$, obtenu en composant le foncteur source s avec le foncteur canonique $X_{/x} \to \underline{\mathit{Hom}}(\Delta^1, X)$ est appelé la *projection canonique.* Pour un objet $y : \Delta^0 \to X$, la fibre de la projection canonique $X_{/x} \to X$ au-dessus de y n'est autre que le ∞-groupoïde $\mathit{Hom}_X(y,x)$. Ce constat est l'un des ingrédients pour établir l'assertion suivante ; voir [Lu1, cor. 1.2.12.5, prop. 4.2.1.6].

Proposition 10.4. — *L'objet x de X est final si et seulement si la projection canonique $X_{/x} \to X$ est une équivalence de ∞-catégories.*

Si $g : x_1 \to x_2$ est un morphisme de X, on considère la sous-∞-catégorie de $\underline{Hom}(\Delta^2, X)$, notée $\underline{Hom}(\Delta^2, X)_g$, formée des foncteurs $c : \Delta^2 \to X$ correspondant aux triangles commutatifs de la forme suivante.

$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "g"] & \\ x_0 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "c"] & & x_2 \end{tikzcd}$$

On a donc un carré cartésien de la forme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \underline{Hom}(\Delta^2, X)_g \arrow[r] \arrow[d] & \underline{Hom}(\Delta^2, X) \arrow[d] \\ \Delta^0 \arrow[r, "g"] & \underline{Hom}(\Delta^{\{1,2\}}, X) \end{tikzcd}$$

L'opération de restriction à $\Delta^{\{0,1\}}$ induit un foncteur

$$\pi_g : \underline{Hom}(\Delta^2, X)_g \to X_{/x_1}$$

et on démontre que ce dernier est une fibration triviale ; en particulier, c'est une équivalence de ∞-catégories dont la ∞-catégorie des sections est équivalente au point, et ce de façon universelle (ce par quoi on entend que ces propriétés restent vérifiées après tout changement de base). L'opération de restriction à $\Delta^{\{0,2\}}$ induit quant à elle un foncteur

$$\mu_g : \underline{Hom}(\Delta^2, X)_g \to X_{/x_2} .$$

On choisit une section γ_g de π_g. Pour conclure, en posant $g_! = \mu_g \gamma_g$, on a donc un foncteur :

$$g_! : X_{/x_1} \to X_{/x_2} .$$

Le foncteur $f_!$ est compatible aux projections canoniques $X_{/x_i} \to X$, $i = 0, 1$. En particulier, pour tout objet x de X, en passant aux fibres des projections canoniques au-dessus de x, on obtient un foncteur

$$Hom_X(x, x_1) \to Hom_X(x, x_2)$$

appelé le *foncteur de composition par g à gauche.*

Considérons à présent deux ∞-catégories X et Y, et un foncteur $u : X \to Y$. Étant donné un objet y de Y, on défini la *tranche $X_{/y}$ de X au-dessus de y* en formant le carré cartésien ci-dessous (dans lequel le foncteur $Y_{/y} \to Y$ est la projecion canonique).

$$\begin{tikzcd} X_{/y} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{/y} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Dans la littérature, on trouve aussi cette notation : $(u \downarrow y) = X_{/y}$.

Définition 10.5. — *Un* adjoint à droite *du foncteur u est un couple (v,ε), où $v : Y \to X$ est un foncteur, et $\varepsilon : uv \to 1_Y$ une transformation naturelle, tels que, pour tout objet y de Y, le couple $(v(y),\varepsilon_y)$ soit un objet final de $X_{/y}$ (on appelle alors ε une* co-unité*).*

Un adjoint à gauche *du foncteur u est un couple (v,η) tel que le couple (v^{op},η^{op}) soit un adjoint à droite de u^{op}.*

La dernière condition du prochain énoncé donne une caractérisation des adjoints à droite assez proche de l'intuition.

Théorème 10.6 (Joyal, Lurie). — *Pour un foncteur $v : Y \to X$ et une transformation naturelle $\varepsilon : uv \to 1_Y$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le couple (v,ε) est un adjoint à droite de u.

(ii) Pour tout objet y de Y, le foncteur composé (induit par u et par le foncteur de composition par ε_y à gauche)

$$X/v(y) \to Y/u(v(y)) \to Y/y$$

est une équivalence de ∞-catégories.

(iii) Pour tous objets x de X et y de Y, le morphisme composé (induit par u et par le foncteur de composition par ε_y à gauche)

$$Hom_X(x,v(y)) \to Hom_X(u(x),u(v(y))) \to Hom_X(u(x),y)$$

est une équivalence de ∞-groupoïdes.

Le théorème précédent relate une partie des conséquences immédiates de la conjonction des énoncés suivants du livre de Lurie : [Lu1, rem. 2.2.3.3, prop. 4.4.4.5, 5.2.2.8 et 5.2.4.2]. On déduit par ailleurs de ceux-ci la caractérisation ci-dessous des foncteurs admettant un adjoint à droite.

Théorème 10.7 (Joyal, Lurie). — *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le foncteur u admet un adjoint à droite.

(ii) Le foncteur $u^{op} : X^{op} \to Y^{op}$ admet un adjoint à gauche.

(iii) Pour tout objet y de Y, la ∞-catégorie $X_{/y}$ admet un objet final.

La condition (iii) de cet énoncé est l'une des formulations, dans le cadre de la théorie des ∞-catégories, de la propriété suivant laquelle "le champ $x \mapsto Hom_Y(u(x),y))$ est représentable pour chaque objet y de Y".

Remarque 10.8. — Les deux théorème précédents sont assez faciles à établir dans le cadre des catégories ordinaires, et peuvent être vus alors comme des variations autour du lemme de Yoneda. Dans le cadre des ∞-catégories, la situation est comparable, à ceci près que le plongement de Yoneda est une affaire délicate (cf. remarque 14.5).

Remarque 10.9. — On peut définir la 2-catégorie des petites ∞-catégories : les objets sont les ∞-catégories, et, pour deux ∞-catégories X et Y, la catégorie des foncteurs de X vers Y est la catégorie homotopique $ho(\underline{Hom}(X,Y))$. On peut définir la notion de 1-morphisme adjoint à droite d'un 1-morphisme dans toute 2-catégorie, et, dans le cas de la 2-catégorie des ∞-catégories, constater que cela redonne a notion introduite ci-dessus. De même, bien que le foncteur $i : \infty\text{-}Gpd \to \infty\text{-}Cat$ n'admette pas d'adjoint à gauche, si on le considère comme un 2-foncteur, il admet un 2-adjoint à gauche, essentiellement défini par la localisation $C \mapsto C^{-1}C$.

Les notions 2-catégoriques se révèlent généralement assez pertinentes lorsqu'on les applique à la théorie des ∞-catégories. C'est l'objet du travail de Riehl et Verity [RV].

11. LIMITES PROJECTIVES ET LIMITES INDUCTIVES

Soit X une ∞-catégorie, I un ensemble simplicial, et $F : I \to X$ un morphisme. Notons $p : I \to \Delta^0$ l'unique morphisme vers l'ensemble simplicial final. On a alors le foncteur

$$p^* : X = \underline{Hom}(\Delta^0, X) \to \underline{Hom}(I, X)\,,$$

obtenu en composant avec p à droite. Pour un objet x de X, le morphisme $p^*(x) : I \to X$ est le foncteur constant indexé par I, de valeur x. Vu que F est un objet de la ∞-catégorie $\underline{Hom}(I,X)$, on peut former la tranche $X_{/F}$ de X au-dessus de F. Les objets de $X_{/F}$ sont les couples (x,c), où x est un objet de X, et $c : p^*(x) \to F$ une transformation naturelle (on dit aussi que c est un *cône* de x vers F).

Définition 11.1. — *Le foncteur F admet une* limite projective dans X *si la ∞-catégorie $X_{/F}$ admet un objet final. Une* limite projective de F dans X *est la donnée d'un objet final $(\varprojlim F, l)$ dans la ∞-catégorie $X_{/F}$. On dit alors que le cône l* exhibe *l'objet $\varprojlim F$ comme une limite projective de F dans X.*

Dualement, le foncteur F admet une limite inductive dans X *si $F^{op} : I^{op} \to X^{op}$ admet une limite projective dans X^{op}. Une* limite inductive de F dans X *est la donnée d'un objet final $(\varinjlim F, l)$ dans la ∞-catégorie $X^{op}_{/F^{op}}$. On dit de même que l* exhibe *l'objet $\varinjlim F$ comme une limite inductive de F dans X.*

En vertu du théorème 10.7, dire que tout foncteur $I \to X$ admet une limite dans X équivaut à affirmer que le foncteur $p^* : X \to \underline{Hom}(I,X)$ admet un adjoint à droite, alors noté

$$\varprojlim : \underline{Hom}(I,X) \to X\,.$$

On dit alors que X *admet des limites projectives de type I.*

Remarque 11.2. — Dans la littérature, on trouve souvent la variante terminologique suivante : “limite” pour “limite projective” et “colimite” pour “limite inductive”.

Exemple 11.3. — Pour $I = \varnothing$, les limites projectives de type I sont les objets finaux.

Exemple 11.4. — Plus généralement, si E est un ensemble, et si I est le préfaisceau constant sur $\mathbf{\Delta}$ de valeurs E, un foncteur $F : I \to X$ est simplement une famille $F = (x_e)_{e \in E}$ d'objets de X indexée par E, et un cône $c : p^*(x) \to F$ n'est rien d'autre qu'une famille de morphismes $p_e : x \to x_e$ dans X. Dire que c exhibe x comme une limite projective de x dans X équivaut à affirmer que c exhibe x comme le produit de la famille F dans la catégorie $ho(X)$. Cela résulte de l'identification canonique :

$$ho(X^E) \simeq ho(X)^E \, .$$

La limite de F est notée $\prod_{e \in E} x_e$ et est appelée le *produit* de la famille $(x_e)_{e \in E}$. Lorsque $E = \{0, 1\}$ est l'ensemble à deux éléments, on note aussi

$$x_0 \times x_1 = \prod_{e \in \{0,1\}} x_e \, .$$

Exemple 11.5. — Soit $I = \Lambda^2_2$. Un morphisme $F = I \to X$ est la donnée d'un couple (p, q), où $p : x \to z$ et $q : y \to z$ sont deux morphismes de même but dans X. Si la limite d'un tel diagramme existe dans X, on la note par abus :

$$x \times_z y = \varprojlim F \, .$$

On dit alors que $x \times_z y$ est le *produit fibré* de x et de y au-dessus de z (l'article défini sous-entendant qu'un cône exhibant cet objet comme tel est spécifié).

Définition 11.6. — *Un* carré commutatif *dans une ∞-catégorie X est un morphisme $\Delta^1 \times \Delta^1 \to X$, que l'on représentera par un diagramme de la forme suivante (chaque triangle correspondant à un morphisme $\Delta^2 \to X$).*

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, "\zeta"] & y \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "f"'] & z \end{tikzcd}$$

Le couple (f, g) correspond alors à un morphisme $\Lambda^2_2 \to X$, et ce carré commutatif définit un cône de p vers (f, g). On dit qu'un tel carré est cartésien *s'il exhibe p comme le produit fibré de x et de y au-dessus de z.*

On dit qu'un carré commutatif de X est cocartésien *s'il correspond à un carré cartésien dans X (via l'unique isomorphisme $\Delta^1 \simeq (\Delta^1)^{op}$).*

Remarque 11.7. — On fera souvent l'abus de considérer le morphisme ζ comme sous-entendu, et on parlera du carré cartésien.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\xi"'] & y \arrow[d, "g"] \\ x \arrow[r, "f"'] & z \end{tikzcd}$$

Proposition 11.8. — *Soit X une ∞-catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La ∞-catégorie X admet des petites limites projectives (i.e. des limites projectives de type I pour tout ensemble simplicial I).

(ii) La ∞-catégorie X admet des limites projectives de type $N(C)$ pour toute petite catégorie C.

(iii) La ∞-catégorie X admet des sommes indexées par tout petit ensemble ainsi que des produits fibrés.

(Voir [Lu1, prop. 4.4.2.7].)

Il y a une variante finie de la proposition précédente. On rappelle qu'un n-simplexe $a : \Delta^n \to A$ d'un ensemble simplicial est *non-dégénéré* si, pour toute factorisation de a de la forme $a = bu$, avec $u : \Delta^n \to \Delta^m$ et $b : \Delta^m \to A$, on a $m \geq n$. On démontre qu'un ensemble simplicial X n'a qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés si et seulement s'il est de présentation finie (i.e. s'il est isomorphe à une limite inductive finie de simplexes standard). Par exemple, pour tout ensemble ordonné fini E, le nerf $N(E)$ n'a qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés (correspondant aux sous-ensembles totalement ordonnés et non vides de E).

Proposition 11.9. — *Soit X une ∞-catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La ∞-catégorie X admet des limites projectives finies (i.e. des limites projectives de type I pour tout ensemble simplicial I n'ayant qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés).

(ii) La ∞-catégorie X admet des limites projectives de type $N(C)$ pour toute ensemble ordonné fini C.

(iii) La ∞-catégorie X admet des sommes indexées par tout ensemble fini ainsi que des produits fibrés.

(Voir [Lu1, cor. 4.4.2.4].)

Exemple 11.10. — Soit G un groupe, vu comme un groupoïde ayant un unique objet, et posons $I = N(G)$. Donnons nous un anneau commutatif unitaire A, et désignons par $\mathcal{D}(A)$ la localisation (du nerf de) la catégorie des complexes de cochaînes de A-modules par la sous-catégorie des quasi-isomorphismes, de sorte que $ho(\mathcal{D}(A)) = D(A)$ est la catégorie dérivée de la catégorie des A-modules au sens usuel. Pour un A module M, (le complexe de A-modules calculant) la cohomologie de G à coefficients dans M est la limite du diagramme constant indexé par I de valeur M dans la ∞-catégorie $\mathcal{D}(A)$. Notons $\mathcal{D}_c(A)$ la sous-∞-catégorie pleine de $\mathcal{D}(A)$ formée des complexes parfaits (i.e. quasi-isomorphes à un complexe borné dont chaque terme est un A-module projectif de type fini). On prendra garde au fait que, bien que la ∞-catégorie $\mathcal{D}_c(A)$ soit stable par limites projectives finies dans $\mathcal{D}(A)$ au sens de la définition ci-dessus, elle n'est pas stable par limites projectives indexées par les (nerfs de) catégories finies : pour le voir, on prend $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $G = \mu_2$ le groupe à deux éléments, et on calcule la cohomologie de G à coefficients dans $M = A$ (comme on obtient une infinité de groupes de cohomologie non nuls, il n'existe pas de complexe parfait donnant lieu à cette famille de groupes de cohomologie).

Soit $\varphi : X \to Y$ un foncteur entre ∞-catégories, et soit I un ensemble simplicial. On suppose que X et Y admettent des limites projectives de type I.

On note encore avec un léger abus

$$\varphi : \underline{Hom}(I, X) \to \underline{Hom}(I, X)$$

le foncteur de composition avec φ à gauche, de sorte que l'on a un carré commutatif de la forme suivante.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p^*"'] & Y \arrow[d, "p^*"] \\ \underline{Hom}(I, X) \arrow[r, "\varphi"] & \underline{Hom}(I, Y) \end{tikzcd}$$

Pour tout foncteur $F : I \to X$, on obtient donc un foncteur $\varphi(F) : I \to Y$ et un foncteur canonique

$$\varphi : X_{/F} \to Y_{/\varphi(F)} \,.$$

Si $(\varprojlim F, c)$ est une limite projective de F dans X et $(\varprojlim \varphi(F), d)$ une limite projective de $\varphi(F)$ dans Y, alors il existe un morphisme

$$(\varphi(\varprojlim F), \varphi(c)) \to (\varprojlim \varphi(F), d)$$

dans $Y_{/\varphi(F)}$, dont l'image par la projection canonique $Y_{/\varphi(F)} \to Y$ donne un morphisme

$$\varphi(\varprojlim F) \to \varprojlim \varphi(F)$$

appelé le morphisme d'échange (l'article défini est justifié par le fait que le seul choix qui a été fait ici a été celui d'un morphisme d'un objet parfaitement déterminé de $Y_{/\varphi(F)}$ vers un objet final).

Définition 11.11. — *Le foncteur φ commute aux limites projectives de type I si, pour tout foncteur $F : I \to X$, le morphisme d'échange $\varphi(\varprojlim F) \to \varprojlim \varphi(F)$ est inversible dans Y (ou encore, de manière équivalente, le foncteur $X_{/F} \to Y_{/\varphi(F)}$ préserve les objets finaux).*

Un foncteur commute aux petites limites projectives *(resp.* aux limites projectives finies*) s'il commute au limites projectives de type I pour I un petit ensemble simplicial (resp. un ensemble simplicial n'ayant qu'un nombre fini de simplexes non-dégénérés).*

Un foncteur φ commute aux petites limites inductives (resp. aux limites inductives finies) si le foncteur φ^{op} commute aux petites limites projectives (resp. aux limites projectives finies).

Un foncteur exact *est un foncteur qui commute à la fois aux limites inductives finies et aux limites projectives finies.*

Exemple 11.12. — Si un foncteur (entre ∞-catégories admettant des petites limites projectives) a un adjoint à gauche, alors il commute aux petite limites projectives ; voir [Lu1, prop. 5.2.3.5].

12. RECTIFICATION DES ∞-CATÉGORIES

Dans une ∞-catégorie, la composition des morphismes n'est pas déterminée de façon univoque : on a seulement, pour chaque couple de morphismes composables, un espace contractile de possibilités de composition (voir la remarque 8.13). Il est possible de rectifier cela : un autre modèle des ∞-catégories est donné par les catégories enrichies en complexes de Kan, dans lesquelles on a en particulier une loi de composition bien définie, associative et unitaire. Le prix à payer est que la théorie de l'homotopie des catégories enrichies en complexes de Kan, bien qu'équivalente à celle des ∞-catégories, est parfois plus difficile à manipuler que celle des ∞-catégories. Par exemple, la version enrichie de la catégorie des foncteurs entre deux catégories enrichies en complexes de Kan est une notion assez délicate.

On rappelle qu'une (petite) *catégorie simpliciale* C est la donnée d'un ensemble d'objets $Ob(C)$, pour chaque couple d'objets, d'un ensemble simplicial $Hom_C(x,y)$, pour chaque triplet d'objets (x,y,z), d'un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$Hom_C(x,y) \times Hom_C(y,z) \to Hom(x,z) \quad , \qquad (f,g) \mapsto g \circ f\,,$$

et pour chaque objet x d'un 0-simplexe $1_x \in Hom_C(x,y)_0$, tout ceci vérifiant les axiomes exprimant que l'opération de composition est associative et unitaire. Autrement dit, une catégorie simpliciale est un préfaisceau C sur $\mathbf{\Delta}$ à valeur dans la catégorie des petites catégories, tel que l'ensemble simplicial des objets $Ob(C)$ soit constant.

Les morphismes de catégories simpliciales sont les foncteurs simpliciaux (c'est-à-dire les foncteurs au sens enrichi). On note Cat_Δ la catégorie des petites catégories simpliciales. On a une inclusion pleine $Cat \subset Cat_\Delta$: on peut voir une petite catégorie C comme une catégorie simpliciale en voyant les ensembles $Hom_C(x,y)$ comme des préfaisceaux constants sur $\mathbf{\Delta}$. Ce foncteur d'inclusion admet un adjoint à gauche

$$\pi_0 : Cat_\Delta \to Cat\,.$$

Pour une catégorie simpliciale C, la catégorie $\pi_0(C)$ a les mêmes objets que C et pour ensemble de morphismes de x vers y, celui des composantes connexes par arcs de la réalisation topologique de $Hom_C(x,y)$.

DÉFINITION 12.1. — *Une catégorie simpliciale C est dite* fibrante *si, pour tout couple d'objets (x,y), l'ensemble simplicial $Hom_C(x,y)$ est un complexe de Kan.*

On dit qu'un morphisme $f : x \to y$ dans une catégorie simpliciale C est inversible *si son image dans la catégorie $\pi_0(C)$ est un isomophisme.*

Soit $u : C \to D$ un foncteur simplicial. On dit que u est pleinement fidèle *si, pour tous objets x et y de C, le morphisme d'ensembles simpliciaux*

$$Hom_C(x,y) \to Hom_D(u(x),u(y))$$

est une équivalence d'homotopie faible. On dit que u est essentiellement surjectif *si, pour tout objet y de D, il existe un objet x de C et un morphisme inversible $x \to y$ dans D.*

Une équivalence de Dwyer-Kan *entre catégories simpliciales est un foncteur simplicial qui est à la fois pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Une isofibration *est un foncteur simplicial* $u : C \to D$ *tel que, pour tout couple* (x, y) *d'objets de* C*, le morphisme d'ensembles simpliciaux soit une fibration de Kan, et tel que, pour tout morphisme inversible :* $g : y_0 \to y_1$ *dans* D*, et tout objet* x_0 *de* C *tels que* $u(x_0) = y_0$*, il existe un morphisme inversible* $f : x_0 \to x_1$ *dans* C *tel que* $u(x_1) = y_1$ *et* $u(f) = g$*.*

L'un des intérêt de la notion de catégorie de modèles fermée de Quillen est que cela définit ce qu'est une théorie de l'homotopie abstraite, et permet de déterminer en quel sens deux telles théories sont équivalentes. Dans la perspective de formuler l'équivalence entre la théorie de l'homotopie des ∞-catégories et de celle des catégories simpliciales, on commence donc par établir le théorème suivant.

Théorème 12.2 (Bergner [Be1]). — *La catégorie* Cat_Δ *des catégories simpliciales admet une unique structure de catégorie de modèles fermée dont les équivalences faibles sont les équivalences de Dwyer-Kan, et dont les fibrations sont les isofibrations.*

Pour chaque entier $n \geq 0$, on définit une catégorie simpliciale $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ comme suit. Les objets sont les entiers k, $0 \leq k \leq n$. Pour deux objets k et l, on note $Hom_n(k, l)$ l'ensemble des sous-ensembles S de $[n]$, d'élément minimal k et d'élément maximal l. Cela définit une catégorie, avec pour loi de composition celle induite par la réunion des parties de $[n]$. La relation d'inclusion définit une relation d'ordre sur les ensembles $Hom_n(k, l)$, et on peut donc voir ces derniers comme des catégories. Il est clair que la composition est compatible à cette relation d'ordre (puisque la réunion est compatible à l'inclusion des parties), de sorte que l'on a en fait sous les yeux une catégorie enrichie en catégories (i.e. une 2-catégorie). En appliquant le foncteur nerf à chaque catégorie $Hom_n(k, l)$, on obtient donc une catégorie simpliciale ayant pour ensembles simpliciaux de morphismes :

$$Hom_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(k, l) = N(Hom_n(k, l)) \,.$$

Si $\varphi : [m] \to [n]$ est une application croissante, on lui associe un foncteur

$$\mathfrak{C}[\Delta^m] \to \mathfrak{C}[\Delta^n]$$

comme suit. Au niveau des objets, on applique simplement φ. Au niveau des morphismes, on prend le nerf du foncteur défini par les applications croissantes

$$Hom_m(k, l) \to Hom_n(\varphi(k), \varphi(l)) \ , \quad S \mapsto \{\varphi(s) \,|\, s \in S\} \,.$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\boldsymbol{\Delta} \to Cat_\Delta \quad , \qquad [n] \mapsto \mathfrak{C}[\Delta^n] \,,$$

et donc un foncteur

$$N : Cat_\Delta \to Ens_\Delta$$

défini par

$$N(C)_n = Hom_{Cat_\Delta}(\mathfrak{C}[\Delta^n], C) \ , \quad n \geq 0.$$

On appelle $N(C)$ le *nerf cohérent* de la catégorie simpliciale C.

Remarque 12.3. — Si C est une petite catégorie, vue comme une catégorie simpliciale, le nerf cohérent de C est canoniquement isomorphe au nerf de C au sens habituel.

De la même façon que l'on a construit le foncteur de réalisation topologique, on construit le foncteur

$$\mathfrak{C}[-] : \mathit{Ens}_\Delta \to \mathit{Cat}_\Delta$$

par la formule

$$\mathfrak{C}[X] = \varinjlim_{\Delta^n \to X} \mathfrak{C}[\Delta^n]\,.$$

Ce foncteur est un adjoint à gauche du foncteur nerf cohérent.

Théorème 12.4 (Lurie[Lu1, thm. 2.2.5.1]). — *Le couple* $(\mathfrak{C}[-], N)$ *est une équivalence de Quillen. Dans ce cas précis, cela se traduit par les propriétés suivantes.*

(a) Un morphisme d'ensembles simpliciaux $X \to Y$ *est une équivalence faible catégorique si et seulement si le foncteur simplicial* $\mathfrak{C}[X] \to \mathfrak{C}[Y]$ *est une équivalence de Dwyer-Kan.*

(b) Le nerf cohérent préserve les isofibrations entre objets fibrants et les fibrations triviales.

(c) Pour toute catégorie simpliciale fibrante C*, le foncteur simplicial canonique*

$$\mathfrak{C}[N(C)] \to C$$

est une équivalence de Dwyer-Kan.

Remarque 12.5. — Ce théorème implique en particulier que le foncteur nerf cohérent envoie les équivalences de Dwyer-Kan entre catégories simpliciales fibrantes sur des équivalences de ∞-catégories.

En particulier, on peut considérer la catégorie ∞-$\underline{\mathit{Cat}}$ (resp. ∞-$\underline{\mathit{Gpd}}$) des petites ∞-catégories (des petits ∞-groupoïdes), vue comme une catégorie simpliciale fibrante. Pour deux ∞-catégories (resp. ∞-groupoïdes) X et Y, le complexe de Kan des morphismes est le sous-∞-groupoïde maximal de la ∞-catégorie des foncteurs $\mathit{inv}(\underline{\mathit{Hom}}(X,Y))$ (qui est égal à $\underline{\mathit{Hom}}(X,Y)$ dès que Y est un ∞-groupoïde, par le théorème 5.2). On a donc un foncteur canonique ∞-$\mathit{Cat} \to \infty$-$\underline{\mathit{Cat}}$ (resp. ∞-$\mathit{Gpd} \to \infty$-$\underline{\mathit{Gpd}}$) de la catégorie (au sens non-enrichi) des petites ∞-catégories (resp. des petits ∞-groupoïdes) vers sa version simpliciale. En passant au foncteur nerf cohérent, on obtient la description suivante.

Proposition 12.6. — *Le foncteur canonique* $N(\infty\text{-}\mathit{Cat}) \to N(\infty\text{-}\underline{\mathit{Cat}})$ *(resp.* $N(\infty\text{-}\mathit{Gpd}) \to N(\infty\text{-}\underline{\mathit{Gpd}})$*) est une localisation (du nerf) de la catégorie des petites* ∞*-catégories (resp. des petits* ∞*-groupoïdes) par la sous-catégorie des équivalences de* ∞*-catégories.*

Vu l'équivalence de Quillen du théorème 12.4, on peut traduite la théorie de la localisation des ∞-catégories (telle que définie dans la section 9) en celle des catégories simpliciales. On retrouve alors la théorie développée par Dwyer et Kan [DK1, DK2]. La proposition précédente est finalement un cas très particulier du calcul de la localisation simpliciale d'une catégorie de modèles fermée simpliciale établi dans *loc. cit.*

On pose

$$\infty\text{-}\mathbf{Cat} = N(\infty\text{-}\underline{Cat}) \quad \text{et} \quad \infty\text{-}\mathbf{Gpd} = N(\infty\text{-}\underline{Gpd})\,.$$

Remarque 12.7. — La comparaison entre ∞-catégories et catégories enrichies en ∞-groupoïdes peut être établie par une autre voie que celle du nerf cohérent : on peut tout d'abord remplacer le nerf cohérent par un autre foncteur nerf, comme cela est fait par Dugger et Spivak [DS] ; mais aussi, suivant Joyal et Tierney [JT2], on peut comparer les ∞-catégories avec les espaces de Segal complets de Rezk [Re], puis on peut comparer ces derniers avec les catégories de Segal, puis enfin établir le lien entre celles-ci et les catégories simpliciales, comme cela a été fait par Bergner [Be2]. Puisque nous en sommes à citer les différents modèles connus pour la théorie des ∞-catégories, citons le travail de Barwick et Kan [BK], qui étudie les ∞-catégories du point de vue de la théorie de la localisation (simpliciale) des catégories ordinaires. Ce foisonnement de modèles pour la théorie de l'homotopie des ∞-catégories s'avère moins intimidant grâce à un article de Toën dans lequel une caractérisation axiomatique de la théorie de l'homotopie des ∞-catégories est donnée ; cf. [To3, thm. 5.1]. De plus, il résulte de [To3, thm. 6.3] que le seul automorphisme autre que l'identité de la ∞-catégorie des petites ∞-catégories est le foncteur $C \mapsto C^{op}$. Chacun de ces modèles a son intérêt propre. Par exemple le langage des espaces de Segal complets est le plus adapté pour prouver la propriété universelle de la théorie de l'homotopie des ∞-catégories dégagée par Toën. Celui de la localisation des catégories a un intérêt évident, puisque c'est par ce biais que l'on forme/trouve des ∞-catégories dans la nature.

13. ∞-CATÉGORIES LOCALEMENT PETITES

DÉFINITION 13.1. — *Une ∞-catégorie X est* strictement localement petite *si, pour tout couple d'objets (x, y) de X, l'ensemble simplicial $Hom_X(x, y)$ est petit.*

Une ∞-catégorie X est localement petite *s'il elle est équivalente à une ∞-catégorie strictement localement petite.*

L'énoncé suivant résulte aussitôt de [Lu1, prop. 5.4.1.2].

PROPOSITION 13.2. — *Soit X une ∞-catégorie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La ∞-catégorie X est localement petite.

(ii) Pour tout petit sous-ensemble E de X_0, la sous-∞-catégorie pleine de X dont l'ensemble des objets est E est équivalente à une petite ∞-catégorie.

(iii) Pour tout morphisme $f : x \to y$ de X, et pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\pi_n(|Hom_X(x, y)|, f)$ est petit.

Exemple 13.3. — Si C est une catégorie simpliciale fibrante et localement petite (dans le sens où $Hom_C(x, y)$ est à la fois un complexe de Kan et un petit ensemble simplicial), alors son nerf cohérent est une ∞-catégorie (strictement) localement petite. En particulier, les ∞-catégories ∞-**Cat** et ∞-**Gpd** sont localement petites.

14. LES PRÉFAISCEAUX COMME PETITES LIMITES INDUCTIVES FORMELLES

Rappelons la théorie des extensions de Kan à gauche relativement au plongement de Yoneda. Si C est une petite catégorie, le plongement de Yoneda

$$h : C \to \underline{Hom}(C^{op}, Ens) \ , \quad x \mapsto Hom_C(-, x)$$

a la propriété universelle suivante. Pour toute catégorie $\mathcal{D}$ admettant des petites limites inductives, la composition avec h à droite induit une équivalence de catégories entre la catégorie des foncteurs commutant aux petites limites inductives $\underline{Hom}(C^{op}, Ens) \to \mathcal{D}$ et la catégorie des foncteurs $C \to \mathcal{D}$; voir par exemple [GZ, Chap. II, prop. 1.3]. En particulier, pour tout foncteur $u : C \to \mathcal{D}$ il existe un couple universel $(u_!, \gamma)$, où

$$u_! : \underline{Hom}(C^{op}, Ens) \to \mathcal{D}$$

est un foncteur qui commute aux petites limites inductives, et $\gamma : u_! h \to u$ un isomorphisme de foncteur, appelé l'*extension de Kan à gauche de u le long de h.* Lorsque la catégorie $\mathcal{D}$ est localement petite, le foncteur $u_!$ admet en outre un adjoint à droite u^*, défini par la formule $u^*(X)(c) = Hom_{\mathcal{D}}(u(c), X)$; voir [SGA4, Exp. I, prop. 5.1].

Une reformulation de cette propriété universelle est que la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur C est la complétion de C par petites limites inductives. En particulier, pour C la catégorie finale, on voit que la catégorie des ensembles est la catégorie admettant des petites limites inductives librement engendrée par le point (i.e. par la catégorie finale). C'est la reformulation catégorique du fait que la catégorie des ensembles joue un rôle central en théorie des catégories.

La ∞-catégorie ∞-**Gpd** des petits ∞-groupoïdes admet à la fois des petites limites projectives et des petites limites inductives. De plus, les limites projectives (resp. les limites inductives) de la ∞-catégorie ∞-**Gpd** coïncident avec les limites homotopiques (resp. les colimites homotopiques) au sens classique de la topologie algébrique. Plus généralement la ∞-catégorie associée à une catégorie de modèles a cette propriété (voir [Lu1, cor. 4.2.4.8] pour le cas des catégories de modèles simpliciales et combinatoires, ce qui suffit pour traiter le cas de ∞-**Gpd**). Cela signifie par exemple que tout carré cartésien dans la catégorie des ensembles simpliciaux de la forme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

dans lequel p est une fibration de Kan et Y et Y' sont des complexes de Kan exhibe X' comme la limite du diagramme $Y' \xrightarrow{b} Y \xleftarrow{p} X$ dans la ∞-catégorie ∞-**Gpd**. De même le produit cartésien dans ∞-**Gpd** correspond au produit cartésien des complexes de Kan.

Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux ∞-catégories admettant des petites limites inductives, on note $\mathit{Hom}_!(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ la sous-∞-catégorie pleine de $\mathit{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dont les objets sont les foncteurs $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ qui commutent aux petites limites inductives.

Théorème 14.1. — *Le foncteur $\Delta^0 \to \infty$-**Gpd** correspondant au ∞-groupoïde final exhibe la ∞-catégorie des petits ∞-groupoïdes comme la ∞-catégorie admettant des petites limites inductives librement engendrée par le point. Autrement dit, pour toute ∞-catégorie $\mathcal{X}$ admettant des petites limites inductives, le foncteur d'évaluation sur le ∞-groupoïde final*

$$\mathit{Hom}_!(\infty\text{-}\mathbf{Gpd}, \mathcal{X}) \to \mathit{Hom}(\Delta^0, \mathcal{X}) = \mathcal{X}$$

est une équivalence de ∞-catégories.

Remarque 14.2. — Le théorème précédent indique que les ∞-groupoïdes sont aux ∞-catégories ce que les ensembles sont aux catégories ordinaires (on avait pu le deviner en voyant que les morphismes entre deux objets d'une ∞-catégorie forment naturellement un ∞-groupoïde). Cependant ce théorème a une portée qui va au delà de la théorie des catégories. En effet, les ∞-groupoïdes ayant pour modèles les CW-complexes, on peut prendre pour ∞-catégorie $\mathcal{X}$ la ∞-catégorie dérivée $\mathcal{D}(A)$ d'un anneau commutatif A (voir l'exemple 11.10). L'homologie singulière à coefficient dans un (complexe de) A-module(s) M est définie comme l'unique foncteur commutant aux petites limites inductives

$$\infty\text{-}\mathbf{Gpd} \to \mathcal{D}(A)$$

qui envoie le point sur M. Les propriétés classiques de l'homologie singulière, telles la formule des coefficients universels, ou encore la formule de Künneth, découlent immédiatement de cette description. La propriété universelle de la ∞-catégorie des petits ∞-groupoïdes peut être vue comme une version extrêment raffinée et renforcée du théorème d'Eilenberg et Steenrod caractérisant les théories de l'homologie ordinaires.

Cette propriété universelle implique en particulier que toute auto-équivalence de ∞-**Gpd** est isomorphe à l'identité et que tout endomorphisme de l'identité est isomorphe à l'identité, etc. Il est remarquable que Grothendieck, dans la *Poursuite des champs* [Gr], introduit une “hypothèse inspiratrice”, pour le guider dans ses réflexions sur les types d'homotopie : il appelle *Hot* la catégorie des CW-complexes, avec pour morphismes les classes d'homotopie d'applications continues, et fait l'hypothèse que *Hot* n'a pas d'autre auto-équivalences que l'identité et que le seul endomorphisme de l'identité est l'identité.

Plus généralement, pour une petite ∞-catégorie C, on pose

$$\widehat{C} = \underline{Hom}(C^{op}, \infty\text{-}\mathbf{Gpd})\,.$$

Les objets de la ∞-catégorie $\widehat{C}$ sont appelés des *préfaisceaux sur C*.

La construction du plongement de Yoneda $h : C \to \widehat{C}$ n'est pas une trivialité dans ce contexte : il s'agit en particulier de rendre la correspondance

$$(x, y) \mapsto Hom_C(x, y)$$

"fonctorielle", et ce alors que la composition n'est pas définie de façon littéralement univoque dans C. Autrement dit, il y a une opération de strictification à l'œuvre ici. L'une des manière d'opérer cette strictification passe par le nerf cohérent et son adjoint comme suit. On commence par choisir une équivalence de Dwyer-Kan

$$u : \mathfrak{C}[C] \to \mathcal{C}$$

avec $\mathcal{C}$ fibrante [(1)]. On a un foncteur simplicial

$$Hom_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \infty\text{-}\underline{Gpd}\,,$$

ainsi qu'un foncteur simplicial canonique :

$$\mathfrak{C}[C^{op} \times C] \to \mathfrak{C}[C^{op}] \times \mathfrak{C}[C] = \mathfrak{C}[C]^{op} \times \mathfrak{C}[C] \to \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}\,.$$

En composant, on obtient un foncteur simplicial

$$\mathfrak{C}[C^{op} \times C] \to \infty\text{-}\underline{Gpd}$$

dont le transposé induit un foncteur

$$H : C^{op} \times C \to \infty\text{-}\mathbf{Gpd}$$

qui définit le *plongement de Yoneda* :

$$h : C \to \widehat{C}\,.$$

On démontre que h est pleinement fidèle (mais c'est non-trivial ; voir [Lu1, prop. 5.1.3.1]).

Théorème 14.3 (Joyal, Lurie [Lu1, thm. 5.1.5.6]). — *Le plongement de Yoneda*

$$h : C \to \widehat{C}$$

exhibe la ∞-catégorie $\widehat{C}$ comme la complétion de C par petites limites inductives. Autrement dit, pour toute ∞-catégorie admettant des petites limites inductives $\mathcal{X}$, la composition avec h à droite induit une équivalence de ∞-catégories :

$$\underline{Hom}_!(\widehat{C}, \mathcal{X}) \to \underline{Hom}(C, \mathcal{X})\,.$$

1. On peut faire cela sans changer l'ensemble des objets, par exemple en posant $Hom_{\mathcal{C}}(x, y) = Sing(|Hom_{\mathfrak{C}[C]}(x, y)|$. Cela définit bien une catégorie simpliciale, car le foncteur $X \mapsto Sing(|X|)$ commute aux limites projectives finies.

En outre, lorsque $\mathcal{X}$ est localement petite, un foncteur $\widehat{C} \to \mathcal{X}$ commute aux petites limites inductives si et seulement s'il admet un adjoint à droite.

Pour tout objet x de C, on a un objet privilégié ϵ_x dans le ∞-groupoïde $h(x)(x)$: par construction, les objets de $h(x)(x)$ sont en bijection avec les morphismes de $u(x)$ vers $u(x)$ dans la catégorie simpliciale $\mathcal{C}$ (où on a identifié les objets de la ∞-catégorie C avec les objets de la catégorie simpliciale $\mathfrak{C}[C]$) ; on pose simplement $\epsilon_x = 1_{u(x)}$.

Soient F un préfaisceau sur C et x un objet de C. En considérant le foncteur d'évaluation en x

$$\underline{Hom}_{\widehat{C}}(h(x), F) \to \underline{Hom}_{\infty\text{-}\mathbf{Gpd}}(h(x)(x), F(x))$$

puis l'évaluation en ϵ_x, on définit un morphisme de ∞-groupoïdes

$$\underline{Hom}_{\widehat{C}}(h(x), F) \to F(x)\ , \quad \varphi \mapsto \varphi(x)(\epsilon_x)\,.$$

Lorsque $F = h(y)$ pour un certain objet y de C, ce morphisme est une équivalence. En effet, lorsqu'on le compose avec l'équivalence de ∞-groupoïdes

$$\underline{Hom}_C(x, y) \to \underline{Hom}_{\widehat{C}}(h(x), h(y))$$

induite par le plongement de Yoneda h, on obtient une équivalence de ∞-groupoïdes (cf. [Lu1, thm. 2.2.0.1]). D'autre part, en vertu de [Lu1, prop. 5.1.6.8], tout préfaisceau F sur C est canoniquement une petite limite inductive de préfaisceaux de la forme $h(y)$, pour y objet de C. D'autre part, le foncteur

$$F \mapsto \underline{Hom}_{\widehat{C}}(h(x), F)$$

commute aux petite limites inductives, tout comme le foncteur

$$F \mapsto F(x)$$

(car ce dernier admet un adjoint à gauche et un adjoint à droite). L'énoncé suivant résulte donc du cas particulier où F est de la forme $h(y)$, qu'on a déjà vu.

Théorème 14.4 (Lemme de Yoneda). — *Pour tout préfaisceau F sur C et tout objet x de C, le morphisme $\underline{Hom}_{\widehat{C}}(h(x), F) \to F(x)$ construit ci-dessus est une équivalence de ∞-groupoïdes.*

Remarque 14.5. — En particulier, pour deux objets x et y de C, on a un isomorphisme canonique

$$Hom_C(x, y) \simeq H(x, y)$$

dans la catégorie $ho(\infty\text{-}\mathbf{Gpd})$ (qui n'est autre que la catégorie des complexes de Kan à homotopie près). Par la suite, on écrira par abus $H(x, y) = Hom_C(x, y)$. En particulier, on dispose, pour chaque objet x de C, d'un foncteur

$$Hom_C(x, -) : C \to \infty\text{-}\mathbf{Gpd}\,.$$

Le plongement de Yoneda permet de donner un sens à la notion de préfaisceau *représentable* sur C : un préfaisceau F sur C donne lieu, via le plongement de Yoneda h, à la tranche $C_{/F}$. On dit que F est représentable si la ∞-catégorie $C_{/F}$ admet un objet final. Un tel objet final est un couple de la forme (y, u), où y est un objet de C, et $u : h(y) \to F$ un morphisme (nécessairement inversible) de $\widehat{C}$. On a alors, en particulier, pour tout objet x de C, un morphisme inversible

$$Hom_C(x, y) \to F(x)$$

dans la ∞-catégorie ∞-**Gpd**.

15. DÉFINITION DES ∞-TOPOS

On rappelle qu'une catégorie I est filtrante si elle n'est pas vide, et si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.

(i) Pour toute paire de morphismes $u, v : i \to j$ dans I, il existe un morphisme $w : j \to k$ tel que $wu = wv$.

(ii) Pour tous objets i et j de I, il existe un objet k, ainsi que deux morphismes $u : i \to k$ et $v : j \to k$.

Si κ est un cardinal infini, on dit qu'une catégorie I est *κ-filtrante* si elle vérifie la propriété (i) ci-dessus, et si, pour tout ensemble E de cardinal $< \kappa$, et toute famille $(i_e)_{e \in E}$ d'objets de I, il existe un objet k de I et une famille $u_e : i_e \to k$, $e \in E$, de morphismes de I.

Remarque 15.1. — On vérifie facilement qu'une catégorie est filtrante si et seulement si elle est $\aleph_0$-filtrante.

DÉFINITION 15.2. — *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux ∞-catégories admettant des petites limites inductives, et κ un cardinal infini régulier. Un foncteur $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est κ-accessible s'il commute aux limites inductives indexées par le nerf d'une catégorie κ-filtrante.*

Un foncteur est accessible *s'il est κ-accessible pour un certain cardinal régulier κ.*

Lorque $\mathcal{X}$ est localement petite, on dit qu'un objet X de $\mathcal{X}$ est κ-accessible *(resp.* accessible*) si le foncteur*

$$Hom_{\mathcal{X}}(X, -) : \mathcal{X} \to \infty\text{-}\mathbf{Gpd}$$

l'est[2].

Exemple 15.3. — On peut démontrer qu'un ∞-groupoïde X est κ-accessible (en tant qu'objet de la ∞-catégorie ∞-**Gpd**) si et seulement s'il existe un ensemble simplicial K dont l'ensemble des simplexes non-dégénérés est de cardinal $< \kappa$, et une équivalence d'homotopie faible $K \to X$ (voir [Lu1, cor. 5.4.15] dans le cas où κ n'est pas dénombrable ; le cas où $\kappa = \aleph_0$ résulte de [TVa, prop. 2.2]). En particulier, les ∞-groupoïdes $\aleph_0$-accessibles correspondent (via le foncteur de réalisation topologique) aux types d'homotopie de CW-complexes finis.

2. Nous nous conformons ici à la terminologie de SGA4 [SGA4, Exposé I, déf. 9.4]. Chez d'autres auteurs, on dit pour un objet qu'il est "κ-petit", ou encore "de κ-petite présentation", ou encore "κ-compact", au lieu de "κ-accessible".

Exemple 15.4. — Si A est un anneau, les objets $\aleph_0$-accessibles de la ∞-catégorie dérivée $\mathcal{D}(A)$ sont les complexes parfaits (c'est essentiellement un cas particulier de [TVa, prop. 2.2]).

Remarque 15.5. — Les notions d'accessibilité considérées par Lurie dans son livre sont exprimées en termes de ∞-catégories κ-filtrantes. Le fait que la notion introduite ci-dessus soit équivalente à celle de Lurie repose sur un résultat d'approximation non trivial (prouvé par Deligne dans le cadre des catégories classiques) ; voir [Lu1, prop. 5.3.1.16].

DÉFINITION 15.6. — *Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie. Une* localisation à gauche *est un foncteur*

$$\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

admettant un adjoint à droite pleinement fidèle.

Une localisation accessible *est une localisation à gauche comme ci-dessus telle que l'adjoint à droite de γ soit accessible.*

Une localisation exacte *est une localisation accessible comme ci-dessus telle que le foncteur γ soit exact (i.e. commute aux limites projectives finies).*

Une ∞-catégorie $\mathcal{X}$ est présentable *s'il existe une petite ∞-catégorie C et une localisation accessible de la forme $\widehat{C} \to \mathcal{C}$.*

Remarque 15.7. — Soit C une ∞-catégorie, et $S \subset C$ une sous-∞-catégorie. Tout adjoint à droite du foncteur canonique $C \to S^{-1}C$ est nécéssairement pleinement fidèle (pour la même raison que pour les catégories ordinaires). Réciproquement, si $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une localisation à gauche, alors γ exhibe $\mathcal{D}$ comme la localisation de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ désigne la sous-∞-catégorie des morphismes de $\mathcal{C}$ dont l'image est inversible dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire celle qui est obtenue en formant le carré cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d, "\gamma"] \\ inv(\mathcal{D}) \arrow[r, "\subset"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

On démontre que, si $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une localisation à gauche, et si $\mathcal{C}$ admet des petites limites inductives (resp. projectives), alors $\mathcal{D}$ a la même propriété. La preuve est essentiellement la même qu'en théorie des catégories classique, comme celle qu'on trouve dans [GZ, Chap. I, 1.4], par exemple.

Remarque 15.8. — Comme en théorie des catégories classiques, les ∞-catégories présentables ont des propriétés remarquables [3]. Diverses caractérisations des ∞-catégories présentables ont été dégagées par Simpson ; voir [Si1] et [Lu1, thm. 5.5.1.1]. Ces ∞-catégories se comportent particulièrement bien : on dispose de beaucoup de théorèmes

3. En théorie des catégories classique, les localisations accessibles de catégories de préfaisceaux d'ensembles sur des petites catégories correspondent aux catégories de modèles d'esquisses projectives au sens d'Ehresmann.

de représentabilité fort commodes. Par exemple, si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux ∞-catégories présentables, un foncteur $\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ admet un adjoint à droite (resp. à gauche) si et seulement s'il commute aux petites limites inductives (resp. aux petites limites projectives, et est accessible) ; cf. [Lu1, cor. 5.5.2.9]. Ou encore : un foncteur $\mathcal{X}^{op} \to \infty\text{-}\mathbf{Gpd}$ est représentable si et seulement s'il commute aux petites limites projectives ; cf. [Lu1, prop. 5.5.2.2].

Définition 15.9. — *Un* ∞-topos *est une ∞-catégorie $\mathcal{X}$ telle qu'il existe une petite ∞-catégorie C et une localisation exacte de la forme*

$$\gamma : \widehat{C} \to \mathcal{X} \,.$$

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux ∞-topos. Un morphisme de ∞-topos $u : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *est un foncteur $u_* : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ admettant un adjoint à gauche exact (i.e. qui commute aux limite projectives finies), le plus souvent noté $u^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, et appelé le* foncteur image inverse *associé à u ; le foncteur u_* est quant à lui appelé le* foncteur image directe *associé à u. On note $\underline{Hom}_*(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ la sous-∞-catégorie pleine de $\underline{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ dont les objets sont les morphismes de topos. Cela forme une catégorie enrichie en ∞-catégories.*

Cette notion de ∞-topos est l'analogue, en théorie des ∞-catégories, de celle de topos de Grothendieck en théorie des 1-catégories.

16. ANALOGUE DES AXIOMES DE GIRAUD

Pour une ∞-catégorie $\mathcal{X}$ fixée, on considèrera les quatre axiomes suivants, que l'on appellera les *axiomes de Giraud supérieurs* :

G1. la ∞-catégorie $\mathcal{X}$ est localement petite, et elle admet des petites limites inductives, ainsi qu'une petite famille génératrice accessible : il existe un petit ensemble $\mathcal{G}$ d'objets accessibles de $\mathcal{X}$ tel que la plus petite sous-∞-catégorie pleine de $\mathcal{X}$ contenant les éléments de $\mathcal{G}$, et stable par petites limites inductives, soit la catégorie $\mathcal{X}$ elle même ;

G2. les limites inductives sont universelles dans $\mathcal{X}$: pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{X}$, le foncteur image inverse (adjoint à droite du foncteur $f_! : \mathcal{X}_{/X} \to \mathcal{X}_{/Y}$)

$$f^* : \mathcal{X}/Y \to \mathcal{X}/X \quad , \qquad (Y' \to Y) \mapsto (Y' \times_Y X \to X)$$

commute aux petites limites inductives [4].

4. Lorsque $\mathcal{X}$ est présentable (ce qui est en fait une reformulation de l'axiome G1, d'après un théorème de Simpson [Lu1, thm. 5.5.1.1]), cette condition équivaut à demander que le foncteur f^* admette un adjoint à droite. Voir la remarque 15.8.

G3. les sommes sont disjointes dans $\mathcal{X}$: tout carré cocartésien de la forme suivante, où $\varnothing$ désigne un objet initial de $\mathcal{X}$,

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X \amalg Y \end{tikzcd}$$

est aussi cartésien ;

G4. tout groupoïde interne de $\mathcal{X}$ est effectif.

Le dernier axiome demande que nous nous y attardions. Tout d'abord, l'inclusion naturelle $N(\mathit{Ens}) \subset \infty$-**Gpd** (correspondant à voir les ensembles comme des types d'homotopie d'espaces discrets), composée avec le "foncteur faisceau constant", c'est-à-dire l'unique foncteur ∞-**Gpd** $\to \mathcal{X}$ qui commmute aux petites limites inductives et qui envoie le ∞-groupoïde final sur l'objet final de $\mathcal{X}$, induit un foncteur canonique :

$$N(\mathit{Ens}) \to \mathcal{X}\,.$$

En appliquant le foncteur $\underline{\mathit{Hom}}(N(\mathbf{\Delta}^{op}), -)$, on obtient le foncteur :

$$U : N(\underline{\mathit{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{op}, \mathit{Ens})) = \underline{\mathit{Hom}}(N(\mathbf{\Delta}^{op}), N(\mathit{Ens})) \to \underline{\mathit{Hom}}(N(\mathbf{\Delta}^{op}), \mathcal{X})\,.$$

Étant donné un ensemble simplicial et un foncteur $G : N(\Delta^{op}) \to \mathcal{X}$, on notera G^K le Hom interne des morphismes de $U(K)$ dans G (i.e. l'image de G par l'adjoint à droite du foncteur $A \mapsto A \times U(K)$).

Définition 16.1. — *Un* groupoïde interne *de $\mathcal{X}$ est un foncteur*

$$G : N(\mathbf{\Delta}^{op}) \to X$$

vérifiant les conditions suivantes.

(i) Pour tout entier $n \geq 2$, le morphisme canonique de restriction

$$G_n = G^{\Delta^n} \to G^{I_n} = G_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} \cdots \times_{G_0} G_1$$

est inversible.

(ii) Le carré cartésien de $\mathbf{\Delta}$

$$\begin{tikzcd} \Delta^0 \arrow[r, "\delta_0^1"] \arrow[d, "\delta_0^1"'] & \Delta^1 \arrow[d, "\delta_0^2"] \\ \Delta^1 \arrow[r, "\delta_1^2"] & \Delta^2 \end{tikzcd}$$

induit un carré cartésien dans $\mathcal{X}$:

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "d^1"'] & G_1 \arrow[d, "d^0"] \\ G_1 \arrow[r, "d^0"] & G_0 \end{tikzcd}$$

(où on a posé $d^i = G(\delta_i^{\varepsilon})$) ;

Si G est un groupoïde interne, le *quotient de G_0 par G* est défini comme la colimite de G dans $\mathcal{X}$.

Une source de groupoïdes internes est fournie par la construction de Čech. Plus précisément, si B est un objet de $\mathcal{X}$, le foncteur d'évaluation en zéro

$$\underline{Hom}(N(\mathbf{\Delta}^{op}), \mathcal{X}/B) \to \mathcal{X}/B \quad , \qquad p \mapsto p_0$$

admet un adjoint à droite

$$C : \mathcal{X}/B \to \underline{Hom}(N(\mathbf{\Delta}^{op}), \mathcal{X}/B) \, .$$

Pour un morphisme $p : E \to B$, vu comme un objet de $\mathcal{X}/B$, l'objet simplicial $C(p)$ évalué à l'entier $n \geq 0$ est calculé par la formule bien connue :

$$C(p)_n = \underbrace{E \times_B E \times_B \cdots \times_B E}_{n+1 \text{ fois}} \, .$$

On dit que le morphisme p est un *épimorphisme effectif* si la limite inductive de $C(p)$ dans $\mathcal{X}_{/B}$ est l'objet final.

On notera encore par abus $C(p)$ le foncteur $N(\mathbf{\Delta}^{op}) \to \mathcal{X}$ obtenu par composition avec le foncteur d'oubli de la base $\mathcal{X}/B \to \mathcal{X}$. Alors $C(p)$ est un groupoïde interne de $\mathcal{X}$. En outre, lorque p est un épimorphisme effectif, le quotient de $C(p)_0 = E$ par $C(p)$ s'identifie canoniquement à B.

DÉFINITION 16.2. — *Un groupoïde interne G de $\mathcal{X}$ est* effectif *s'il existe un épimorphisme effectif $p : E \to B$ dans $\mathcal{C}$, et un morphisme inversible de la forme $G \to C(p)$ dans $\underline{Hom}(N(\mathbf{\Delta}^{op}), \mathcal{X})$.*

Remarque 16.3. — Lorsque les axiomes G1, G2 et G3 sont vérifiés, si G est un groupoïde interne de $\mathcal{X}$, on a un morphisme canonique $p : G_0 \to \varinjlim_{N(\mathbf{\Delta}^{op})} G$, d'où un morphisme canonique $c : G \to C(p)$. Dire que G est effectif équivaut à affirmer que ce morphisme c est inversible. Le groupoïde interne G et le morphisme p se déterminent donc l'un et l'autre totalement. Nous laissons au lecteur le plaisir de reformuler (sous ces hypothèses) cette correspondance sous la forme d'une équivalence de ∞-catégories reliant les épimorhismes effectifs de $\mathcal{X}$ et les groupoïdes internes effectifs. La construction de Čech induit donc une adjonction entre la ∞-catégorie des groupoïdes internes et celles des groupoïdes internes effectifs. L'axiome G4 affirme que cette adjonction est une équivalence de ∞-catégories (du moins, en présence des autres axiomes).

THÉORÈME 16.4 (Lurie [Lu1, thm. 6.1.0.6]). — *Une ∞-catégorie $\mathcal{X}$ est un ∞-topos si et seulement elle vérifie les axiomes de Giraud supérieurs.*

Remarque 16.5. — Si, dans l'énoncé précédent, on remplace le mot "∞-catégorie" par le mot "catégorie", on retrouve exactement la caractérisation, due à Giraud, des topos de Grothendieck au sens classique, à ceci près qu'il faut remplacer l'axiome G4 par sa version "0-tronquée" : toute relation d'équivalence est effective. Voir [SGA4, Exposé IV, Thm. 1.2].

Remarque 16.6. — Dans un ∞-topos $\mathcal{X}$ un morphisme $u : X \to Y$ est un épimorphisme effectif si et seulement si le foncteur image inverse

$$u^* : \mathcal{X}_{/Y} \to \mathcal{X}_{/X}$$

est conservatif (i.e. si les morphismes inversibles de $\mathcal{X}_{/Y}$ sont exactement les morphismes qui deviennent inversibles dans $\mathcal{X}_{/X}$ après application du foncteur u^*). En particulier, les épimorphismes effectifs forment une classe de morphismes stable par changement de base et par composition.

Remarque 16.7. — Bien qu'elle semble n'être qu'une reformulation ∞-catégorique d'une propriété 1-catégorique, l'axiome G4 est une assertion non triviale. Par exemple, si G est un groupoïde interne de $\mathcal{X}$ tel que $G_0 = *$ soit un objet final (on peut alors voir G comme une sorte d'objet groupe dans $\mathcal{X}$), l'effectivité de G signifie qu'il existe un objet X de $\mathcal{X}$ muni d'une section globale x, et un carré cartésien de la forme ci-dessous,

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "x"] \\ * \arrow[r, "x"] & X \end{tikzcd}$$

avec $x : * \to X$ un épimorphisme effectif, ce qui s'interprète ici simplement par la propriété que X soit localement connexe [(5)]. Autrement dit, on a un morphisme inversible $G_1 \to \Omega(X, x)$ identifiant G_1 à l'espace des lacets de X au point x. En outre, cette identification s'étend à G tout entier : la structure de groupoïde interne de G correspond alors à la structure de A_∞-espace sur l'espace des lacets de X. De plus, X est le quotient de $G_0 = *$ par G, c'est-à-dire $X = BG$ est le classifiant de G (de sorte que les sections globales de X classifient les G-torseurs sur le ∞-topos $\mathcal{X}$). La vérification du fait que ∞-**Gpd** vérifie les axiomes de Giraud supérieurs contient donc une généralisation du théorème de Stasheff caractérisant les espaces de lacets comme certaines algèbres sur l'opérade A_∞.

17. ANALOGUE DES AXIOMES DE LAWVERE

En présence des deux axiomes G1 et G2 de Giraud, les axiomes G3 et G4 peuvent être remplacés par l'existence d'un objet classifiant les fibrations dans $\mathcal{X}$. Plus précisément, on a l'énoncé suivant.

---

5. Cela signifie que, pour toute sections globales x_0 et x_1 de X, il existe un recouvrement U de $\mathcal{X}$ (i.e. un objet tel que le foncteur $Y \mapsto U \times Y$ détecte les morphismes inversibles), et un morphisme de x_0 vers x_1 dans le ∞-groupoïde des sections de X au-dessus de U. Si on demande en outre qu'il existe un recouvrement V de $\mathcal{X}$ tel que X admette une section au-dessus de V, on dit alors classiquement que X est une *gerbe*. La donné d'un épimorphisme effectif de la forme $* \to X$ correspond dont exactement à une section globale d'une gerbe.

Théorème 17.1 (Rezk, Lurie [Lu1, thm. 6.1.6.8]). — *Une ∞-catégorie $\mathcal{X}$ est un ∞-topos si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) la catégorie $\mathcal{X}$ est présentable ;

(ii) les (petites) limites inductives sont universelles dans $\mathcal{X}$;

(iii) pour tout cardinal régulier assez grand κ, il existe un classifiant des morphismes à fibres κ-accessibles dans $\mathcal{X}$.

La condition (iii) a la signification suivante. Soit κ un cardinal régulier. Les *morphismes à fibres κ-accessibles*, sont les morphismes $Y \to X$ tels que, pour tout objet κ-accessible Z de $\mathcal{X}$, et tout morphisme $Z \to X$, la fibre $Z \times_X Y$ soit κ-accessible. On note $\mathcal{X}_\kappa^{cart}$ la sous-catégorie de $\underline{Hom}(\Delta^1, \mathcal{X})$ dont les objets sont les morphismes à fibres κ-accessibles, et dont les morphismes sont les carrés cartésiens. Autrement dit, les morphismes $\Delta^n \to \mathcal{X}_\kappa^{cart}$ sont les morphismes $\Delta^n \to \underline{Hom}(\Delta^1, \mathcal{X})$ dont la restriction à chaque $\Delta^{\{i\}}$, $0 \leq i \leq n$, correspond à un morphisme à fibres κ-accessibles $Y_i \to X_i$ dans $\mathcal{X}$, et dont la restriction à chaque $\Delta^{\{i,i+1\}}$, $0 \leq i < n$, correspond à un carré cartésien de $\mathcal{X}$ comme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d] & Y_{i+1} \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & X_{i+1} \end{tikzcd}$$

Si $\pi : E \to B$ est un morphisme à fibres κ-accessibles, on définit un foncteur

$$\pi^* : \mathcal{X}_{/B} \to \mathcal{X}_\kappa^{cart}$$

en associant à un morphisme $X \to B$ la première projection $X \times_B E \to X$. Pour une définition rigoureuse de π^*, on remarque d'abord qu'on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{/B} \times \mathcal{X}_{/B} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{Hom}(\Lambda^2_2, \mathcal{X}) \arrow[d, "2^*"] \\ \Delta^0 \arrow[r, "B"] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

où 2^* désigne l'opération d'évaluation au point 2. On a donc une inclusion

$$\mathcal{X}_{/B} = \mathcal{X}_{/B} \times \Delta^0 \to \mathcal{X}_{/B} \times \mathcal{X}_{/B} \to \underline{Hom}(\Lambda^2_2, \mathcal{X})$$

induite par l'objet (B, π) de $\mathcal{X}_{/B}$. On dispose d'autre part d'une inclusion

$$i : \Lambda^2_2 \to \Delta^1 \times \Delta^1 = N([1] \times [1])$$

correspondant au diagramme

$$\begin{tikzcd} & (0,1) \arrow[d] \\ (1,0) \arrow[r] & (1,1) \end{tikzcd}$$

dans $[1] \times [1]$. Par ailleurs, on a un foncteur $j : \Delta^1 \to \Delta^1 \times \Delta^1$ correspondant au morphisme $(0,0) \to (1,0)$, ce qui définit un foncteur

$$j^* : \underline{Hom}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{X}) \to \underline{Hom}(\Delta^1, \mathcal{X})\,.$$

Or la ∞-catégorie $\mathcal{X}$ admet des petites limites projectives (puisqu'elle est présentable), ce qui implique que le foncteur de composition par i à droite

$$i^* : \underline{Hom}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{X}) \to \underline{Hom}(\Lambda^2_2, \mathcal{X})$$

admet un adjoint à droite

$$i_* : \underline{Hom}(\Lambda^2_2, \mathcal{X}) \to \underline{Hom}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{X})$$

que l'on calcule explicitement : il associe à un diagramme de la forme $Y' \to Y \leftarrow X$ dans $\mathcal{X}$ le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

exhibant X' comme le produit fibré de Y' et de X au-dessus de Y. Le foncteur π^* est obtenu comme la restriction à $\mathcal{X}_{/B}$ du foncteur $j^* i_*$ (et prend ses valeurs dans $\mathcal{X}^{cart}_\kappa$ par hypothèse sur π).

La condition (iii) du théorème 17.1 signifie que, dès que le cardinal κ est assez grand, il existe un morphisme π à fibres κ-accessibles tel que le foncteur π^* soit une équivalence de ∞-catégories, auquel cas on dit que B est un *classifiant* pour les morphismes à fibres κ-accessibles et que π est le morphisme à fibres κ-accessibles *universel*.

Remarque 17.2. — Lorsque $\pi : E \to B$ est le morphisme à fibres κ-accessibles universel, l'équivalence de ∞-catégories π^* est en fait définie au-dessus de $\mathcal{X}$, où l'on voit $\mathcal{X}_{/B}$ au-dessus de $\mathcal{X}$ par la projection canonique, et $\mathcal{X}^{cart}_\kappa$ au-dessus $\mathcal{X}$ via le foncteur but $b : \underline{Hom}(\Delta^1, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}$. On peut démontrer que π^* induit une équivalence fibres à fibres (car c'est un foncteur cartésien entre ∞-catégories fibrées). L'équivalence de ∞-catégories π^* induit donc des équivalences de ∞-groupoïdes

$$Hom_{\mathcal{X}}(X, B) \to inv(\mathcal{X}_{/X})_\kappa\,,$$

où $inv(\mathcal{X}_{/X})_\kappa$ est la réunion des composantes connexes du ∞-groupoïde $inv(\mathcal{X}_{/X})$ correspondant aux morphismes $Y \to X$ à fibres κ-accessibles ; voir [GK].

Remarque 17.3. — Pour un topos de Grothendieck $\mathcal{X}$, l'analogue de la condition (iii) du théorème 17.1 est qu'il existe un objet Ω qui classifie les sous-objets, i.e. muni d'une bijection fonctorielle

$$\{\text{sous-objets de } X\} \simeq Hom_{\mathcal{X}}(X, \Omega)$$

pour tout objet X. La situation générale est qu'un $(n+1)$-topos a pour objets des faisceaux en n-groupoïdes et doit avoir un faisceau classifiant les $(n-1)$-groupoïdes κ-accessibles pour tout cardinal régulier assez grand κ. Pour $n = \infty$, on retrouve donc la condition (iii) du théorème 17.1. Pour $n = 1$, les 1-topos (i.e. les topos de Grothendieck ordinaires) ont donc pour objets des faisceaux de 0-groupoïdes (=des faisceaux d'ensembles) et doivent avoir un faisceau classifiant les faisceaux (-1)-groupoïdes. Or la catégorie homotopique des (-1)-groupoïdes est équivalente à l'ensemble ordonné des valeurs de vérités, de sorte qu'on se retrouve avec l'objet Ω classifiant les sous-objets. On renvoie le lecteur à [Lu1, thm. 6.4.1.5] pour diverses caractérisations des n-topos pour $-1 \leq n \leq \infty$.

Dans un topos de Grothendieck classique, l'objet classifiant les sous-objets Ω est une algèbre Heyting interne et est l'espace des valeurs de vérité qui gouvernent la logique interne du topos. Cette approche logique de la théorie des topos a été menée à maturité avec le travail de Lawvere et Tierney à la fin des années 1970, et a donné par exemple une nouvelle saveur géométrique aux techniques de “forcing” ; voir [Car, MM].

Dans le cas des ∞-topos, les objets classifiants les morphismes à fibres κ-accessibles sont aussi liés à la logique : ils définissent (lorsque κ est un cardinal inaccessible) des univers univalents au sens de Voevodsky [KLV, Coq]. Gepner et Kock [GK] expliquent comment tout ∞-topos peut être présenté de manière à fournir une sémantique à la théorie des types de Martin-Löf avec l'axiome d'univalence de Voevodsky (modulo le fait que l'univers doit être décrit syntaxiquement “à la Tarski”, ce qui ne semble pas être une pratique courante pour le moment). La logique interne des ∞-topos et la théorie des types dépendants vérifiant l'axiome d'univalence de Voevodsky semblent donc être profondément liées.

18. CONSTRUCTION DES ∞-CATÉGORIES PRÉSENTABLES

Soit M une catégorie de modèles fermée combinatoire au sens de Smith [Lu1, def. A.2.6.1] (comme, par exemple, la catégorie des objets simpliciaux d'un topos de Grothendieck, munie de la structure de catégorie de modèles de Joyal [Jo1]). Pour faire vite : cela signifie que la catégorie sous-jacente est présentable (comme c'est le cas, par exemple pour la catégorie des faisceaux en une espèce de structure sur un petit site de Grothendieck), et que les factorisations en une cofibration triviale suivie d'une fibration, et, en une cofibration suivie d'une fibration triviale, peuvent être obtenue par l'argument du petit objet. Autrement dit, mis à part la catégorie de modèles des espaces topologiques et celle des pro-ensembles simpliciaux, une partie très substancielle des catégories de modèles fermée rencontrées dans la nature consiste en catégories de modèles fermées combinatoires (outre les faisceaux simpliciaux, on peut mentionner comme exemple les faisceaux de groupes abéliens sur une petit site, avec pour cofibrations les monomorphismes et pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes, et les catégories de modèles utilisées pour donner un sens à la théorie de l'homotopie des schémas [MV], et donc aux catégories de motifs au sens de Voevodsky).

On associe à M une ∞-catégorie comme suit. Si elle n'est pas simpliciale, on s'arrange pour qu'elle le soit (cf. [Du3]). Ensuite, on considère la sous-catégorie pleine M_{cf} de M

formée des objets qui sont à la fois fibrants et cofibrants, et on note $\underline{M}_{cf}$ la version de M_{cf} munie de sa structure simpliciale. On prend son nerf cohérent, que l'on note

$$\mathbf{M} = N(\underline{M}_{cf})\,.$$

On choisit un foncteur $\gamma : M \to M_{cf}$ tel qu'on ait des équivalences faibles fonctorielles

$$X \to \theta(X) \leftarrow \gamma(X)$$

pour tout X dans M (ce qui correspond au choix d'une résolution fibrante et d'une résolution cofibrante fonctorielles). En composant γ avec le foncteur simplicial canonique $M_{cf} \to \underline{M}_{cf}$, puis en passant au nerf cohérent, on obtient un foncteur

$$N(M) \to \mathbf{M}\,.$$

D'après les résultats de Dwyer et Kan, la catégorie simpliciale $\underline{M}_{cf}$ s'identifie à la localisation simpliciale de M par ses équivalences faibles. L'équivalence de Quillen du théorème 12.4 permet donc de traduire cette construction de la manière suivante.

Proposition 18.1. — *Le foncteur ci-dessus exhibe la ∞-catégorie $\mathbf{M}$ comme la localisation de $N(M)$ par la sous-catégorie de ses équivalences faibles. En particulier, la catégorie $ho(\mathbf{M})$ s'identifie canoniquement à la catégorie des fractions de M (pour les équivalences faibles) au sens de Gabriel et Zisman.*

Si C est une catégorie simpliciale, on peut considérer la catégorie de modèles projective $M = P(C)$ des préfaisceaux simpliciaux sur C : les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les morphismes de préfaisceaux simpliciaux $X \to Y$ tels que, pour tout objet c de C, le morphisme $X(c) \to Y(c)$ soit une équivalence d'homotopie faible (resp. une fibration de Kan). Notons $\mathbf{P}(C) = \mathbf{M}$ dans ce cas. On a alors la proposition suivante, dont l'analogue en termes de catégories simpliciales est dû à Dwyer et Kan (cf. [Lu1, prop. 5.1.1.1] pour une démonstration dans le langage des ∞-catégories).

Proposition 18.2. — *Si C est une catégorie simpliciale fibrante, la ∞-catégorie $\mathbf{P}(C)$ est canoniquement équivalente à la ∞-catégorie des préfaisceaux sur la ∞-catégorie $N(C)$.*

Définition 18.3. — *Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie et S un ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$. Un objet F de $\mathcal{C}$ est* S-local *si, pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans S, le morphisme de composition avec f*

$$f^* : Hom_{\mathcal{C}}(Y, F) \to Hom_{\mathcal{C}}(Y, F)$$

est une équivalence de ∞-groupoïdes.

Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est une S-équivalence *si, pour tout objet S-local F dans C, le morphisme de composition avec f*

$$f^* : Hom_{\mathcal{C}}(Y, F) \to Hom_{\mathcal{C}}(Y, F)$$

est une équivalence de ∞-groupoïdes.

On note $L_S\mathcal{C}$ la sous-∞-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les objets S-locaux de $\mathcal{C}$.

On dit que S est essentiellement petit *s'il existe un petit sous-ensemble S_0 tel que tout élément de S soit isomorphe à un élément de S_0 dans $ho(\underline{Hom}(\Delta^1, \mathcal{C}))$.*

Les deux énoncés ci-dessous résultent immédiatement de [Lu1, prop. 5.5.4.2].

Proposition 18.4. — *Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie présentable, et soit S un ensemble essentiellement petit de morphismes de $\mathcal{C}$. Alors l'inclusion $L_S\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ admet un adjoint à gauche*

$$\gamma : \mathcal{C} \to L_S\mathcal{C}$$

qui exhibe $L_S\mathcal{C}$ comme la localisation de $\mathcal{C}$ par la classe des S-équivalences. On vérifie en outre qu'un morphisme de $\mathcal{C}$ devient inversible dans $L_S\mathcal{C}$ si et seulement s'il est une S-équivalence. Enfin, le foncteur γ est une localisation accessible, ce qui implique que $L_S\mathcal{C}$ est une ∞-catégorie accessible.

Toutes les localisations accessibles de ∞-catégories présentables sont de la forme $L_S\mathcal{C}$:

Proposition 18.5. — *Soit $\mathcal{C}$ une ∞-catégorie présentable. Pour toute localisation accessible $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, il existe un petit ensemble S de morphismes de $\mathcal{C}$ et une équivalence de ∞-catégories $L_S\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ qui identifie le foncteur γ à un adjoint à gauche de l'inclusion $L_S\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$.*

En général, lorsqu'on travaille à équivalence de ∞-catégories près, la construction de la ∞-catégorie $\mathbf{M}$ associée à une catégorie de modèles fermée combinatoire M est invariante par équivalence de Quillen (ce qui a été utilisé implicitement pour se restreindre au cas des catégories de modèles simpliciales). On peut alors traduire les travaux de Dugger [Du1, Du2] et la théorie des localisations de Bousfield à gauche des catégories de modèles [Hi] à l'aide des deux propositions précédentes de la façon suivante (on ne donne ici qu'une version grossière d'une correspondance bien plus précise).

Proposition 18.6. — *Pour toute catégorie de modèles fermée combinatoire M, la ∞-catégorie associée $\mathbf{M}$ est présentable. En outre, toute ∞-catégorie présentable peut être obtenue de cette manière (à équivalence de ∞-catégories près).*

Pour deux ∞-catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ admettant des petites limites inductives et S un ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$, on pose

$$\underline{Hom}_{!,S}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \underline{Hom}_!(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \cap \underline{Hom}_S(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \subset \underline{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

pour la ∞-catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ qui commutent aux petites limites inductives et qui envoient les éléments de S sur des morphismes inversibles de $\mathcal{D}$.

On déduit alors de [Lu1, cor. 5.5.2.9 et prop. 5.5.4.20] l'énoncé suivant, qui caractérise $L_S\mathcal{C}$ par une propriété universelle.

Proposition 18.7. — *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux ∞-catégories présentables, et soit S un ensemble essentiellement petit de morphismes de $\mathcal{C}$. Le foncteur de localisation $\gamma : \mathcal{C} \to L_S\mathcal{C}$ induit une équivalence de ∞-catégories :*

$$\gamma^* : \underline{Hom}_{!,S}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \underline{Hom}_!(L_S\mathcal{C}, \mathcal{D})\,.$$

Exemple 18.8. — On pose $S^{-1} = \varnothing$, l'objet initial de la ∞-catégorie des ∞-groupoïdes. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit récursivement S^n en formant le carré cocartésien suivant dans ∞-**Gpd** (où $*$ est l'objet final).

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & S^n \end{tikzcd}$$

De façon suggestive, on baptise le ∞-groupoïde S^n la *sphère de dimension n.*

Pour tout entier $n \geq -2$, on appelle *n-groupoïdes* les objets $\{S^{n+1} \to *\}$-locaux de ∞-**Gpd**, et on note n-**Gpd** la sous-∞-catégorie pleine de ∞-**Gpd** dont les objets sont les n-groupoïdes. L'adjoint à gauche de l'inclusion n-**Gpd** $\subset$ ∞-**Gpd** est noté

$$\tau^{\leq n} : \infty\text{-}\mathbf{Gpd} \to n\text{-}\mathbf{Gpd}$$

et est appelé le *n-ème foncteur de troncation.* C'est un exercise assez plaisant de vérifier que :

(i) la ∞-catégorie des (-2)-groupoïdes est équivalente à la ∞-catégorie Δ^0 ;
(ii) la ∞-catégorie des (-1)-groupoïdes est équivalente à la ∞-catégorie Δ^1 ;
(iii) la ∞-catégorie des 0-groupoïdes est équivalente à la ∞-catégorie $N(\mathit{Ens})$ des petits ensembles ;
(iv) la ∞-catégorie des 1-groupoïdes est équivalente au nerf cohérent de la 2-catégorie des petits groupoïdes classiques (vue comme une catégorie simpliciale en prenant le nerf des Hom).

19. TOPOLOGIES DE GROTHENDIECK

Définition 19.1. — *Soit C une ∞-catégorie.*

Un crible *de C est une sous-∞-catégorie pleine R de C telle que, pour tout morphisme $f : x \to y$ dans C, si y est un objet de R, alors x est aussi un objet de R.*

Si x est un objet de C, on appelle cribles de x *les cribles de la tranche $C_{/x}$.*

Remarque 19.2. — Pour tout carré cartésien d'ensembles simpliciaux

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(R) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & C \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "j"] & D \end{tikzcd}$$

dans lequel C et D sont des ∞-catégories, R est un crible de D, et j est l'inclusion de R dans D, on s'aperçoit aussitôt que $f^{-1}(R)$ est un crible de R. Si f est une équivalence de ∞-catégories, alors cette opération induit une bijection de l'ensemble des cribles de D sur celui des cribles de C.

Si $f : x \to y$ est un morphisme dans une ∞-catégorie C, et si R est crible de y, on note f^*R le crible de x obtenu comme l'image inverse de R par le foncteur de composition avec f. Autrement dit, f^*R est déterminé par le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} f^*R \arrow[r] \arrow[d] & C_{/x} \arrow[d, "f_!"] \\ R \arrow[r] & C_{/y} \end{tikzcd}$$

Remarque 19.3. — Si $R \subset C_{/x}$ est un crible, on lui associe un morphisme $i : u \to h(x)$ dans $\widehat{C}$ (où h désigne le plongement de Yoneda). Le couple (u, i), vu comme un objet de $\widehat{C}_{/h(x)}$, est simplement la limite inductive du foncteur évident

$$R \to C_{/x} \to \widehat{C}_{/h(x)}\,.$$

On vérifie que i est un *monomorphisme*, dans le sens où le carré

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "1_u"] \arrow[d, "1_u"'] & u \arrow[d, "i"] \\ u \arrow[r, "i"] & h(x) \end{tikzcd}$$

est cartésien dans $\widehat{C}$.

Réciproquement, si $i : u \to h(x)$ est un monomorphisme de but représentable, on lui associe le crible $R \subset C_{/x}$ dont les objets sont les morphismes $f : y \to x$ tels qu'il existe un triangle commutatif de la forme ci-dessous dans $\widehat{C}$.

$$\begin{tikzcd} & h(y) \arrow[dl] \arrow[d, "h(f)"] \\ u \arrow[r, "i"'] & h(x) \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des cribles sur x et les classes d'équivalence (ou, si on préfère, d'isomorphie) de monomorphismes $i : u \to h(x)$ (cf. [Lu1, prop. 6.2.2.5]).

Suivant Toën et Vezzosi, on considère l'analogue des topologies de Grothendieck sur les ∞-catégories.

DÉFINITION 19.4. — *Une* topologie de Grothendieck *J sur une ∞-catégorie C est la donnée, pour chaque objet x de C, d'une partie $J(x)$ de l'ensemble des cribles de x, dont les éléments sont appelés les* cribles couvrants *sur x, vérifiant les propriétés suivantes.*

T1) (Stabilité par changement de base). *Si $f : x \to y$ est un morphisme de C, et si R est un crible couvrant sur y, alors f^*R est un crible couvrant sur x.*

T2) (Caractère local). *Si x est un objet de C, R un crible couvrant de x, et R' un autre crible sur x, tels que, pour tout morphisme $f : y \to x$ dans R, le crible f^*R' est couvrant sur y, alors le crible R' est couvrant sur x.*

T3) Si x est un objet de C, le crible $C_{/x}$ est couvrant sur x.

Un site *est un couple (C, J) formé d'une ∞-catégorie C et d'une topologie de Grothendieck J.*

Un monomorphisme couvrant *est un morphisme $j : U \to X$ dans $\widehat{C}$ tel que, pour tout objet x de C et tout carré cartésien de la forme ci-dessous,*

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "i"] \arrow[d] & h(x) \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

le morphisme i est un monomorphisme associé à un crible couvrant R sur x (voir la remarque 19.3).

Exemple 19.5. — La *topologie grossière* sur une ∞-catégorie C est définie en ne prenant pour cribles couvrants de chaque objet x que le crible total $C_{/x}$.

Exemple 19.6. — Si C est une (petite) catégorie, la donnée d'une topologie de Grothendieck sur $N(C)$ équivaut à celle d'une topologie de Grothendieck sur C au sens usuel ; voir [SGA4, Exp. II, déf. 1.1]. En particulier, pour tout espace topologique X, l'ensemble ordonné $Ouv(X)$ des ouverts de X, vu comme une catégorie et muni de la topologie canonique, définit un site $N(Ouv(X))$.

Remarque 19.7. — Pour une petite ∞-catégorie C, la donnée d'une topologie de Grothendieck sur C équivaut à celle d'une topologie de Grothendieck sur la catégorie homotopique $ho(C)$. Cela résulte du fait que, pour chaque objet x de C, le foncteur évident

$$ho(C_{/x}) \to ho(C)_{/x}$$

est plein et essentiellement surjectif, d'où on déduit une bijection canonique entre l'ensemble des cribles de $ho(C_{/x})$ celui des cribles de $ho(C)_{/x}$.

Définition 19.8. — *Soit (C, J) un site. Un* faisceau *sur C (pour la topologie J) est un préfaisceau $F : C^{op} \to \infty$-**Gpd** tel que, pour tout objet x de C et tout crible couvrant R sur x, le monomorphisme associé à R, $i : u \to h(x)$, induit une équivalence de ∞-groupoïdes :*

$$\underline{Hom}_{\widehat{C}}(h(x), F) \to \underline{Hom}_{\widehat{C}}(u, F)\,.$$

On note $Sh_J(C)$ la sous-∞-catégorie pleine de $\widehat{C}$ formée des faisceaux sur C.

Si X est un espace topologique, on note $Sh(X) = Sh_J(C)$ avec $C = N(Ouv(X))$ le nerf de l'ensemble ordonné des ouverts de X, et J la topologie canonique.

Remarque 19.9. — On vérifie (grâce à l'universalité des limites inductives dans $\widehat{C}$) qu'un préfaisceau F sur C est un faisceau si et seulement si tout monomorphisme couvrant $j : U \to X$ induit une équivalence de ∞-groupoïdes :

$$\underline{Hom}_{\widehat{C}}(X, F) \to \underline{Hom}_{\widehat{C}}(U, F) \,.$$

On obtient ainsi un ∞-topos (voir [Lu1, lem. 6.2.2.7]) :

Théorème 19.10. — *Soit (C, J) un site. On note S l'ensemble (essentiellement petit) des monomorphismes couvrants de la forme $i : u \to h(x)$, avec x parcourant les objets de C. La ∞-catégorie des faisceaux s'identifie alors à la ∞-catégorie $L_S\widehat{C}$ des objets S-locaux, et l'adjoint à gauche de l'inclusion $Sh_J(C) \subset \widehat{C}$ définit une localisation exacte*

$$a : \widehat{C} \to Sh_J(C) \,.$$

En particulier, la ∞-catégorie $Sh_J(C)$ est un ∞-topos.

Remarque 19.11. — Étant donné une localisation exacte $a : \widehat{C} \to \mathcal{X}$ d'une ∞-catégorie de préfaisceaux sur une petite ∞-catégorie C, on définit une topologie sur C dont les cribles couvrants sur un objet x de C sont ceux pour lesquels le monomorphisme associé $i : u \to h(x)$ devient inversible après application du foncteur a. Pour $\mathcal{X} = Sh_J(C)$, la topologie ainsi obtenue est la topologie de départ J (cela résulte facilement de [Lu1, lem. 6.2.2.8]).

Définition 19.12. — *Soit $\mathcal{X}$ une ∞-catégorie présentable. Une* localisation topologique *de $\mathcal{X}$ est une localisation de la forme $L_S\mathcal{X}$ associée à un ensemble essentiellement petit S de morphismes de $\mathcal{X}$, et vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) Tout élément de S est un monomorphisme.

(ii) Pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

si f est une S-équivalence, alors il en va de même de f'.

Théorème 19.13 (Lurie [Lu1, prop. 6.2.2.9]). — *Soit C une petite ∞-catégorie. L'application $J \mapsto Sh_J(C)$ établit une bijection de l'ensemble des topologies de Grothendieck sur C sur celui des (classes d'équivalences de) localisations topologiques de $\widehat{C}$.*

20. HYPERCOMPLÉTION

Définition 20.1. — *Soit $\mathcal{X}$ une ∞-catégorie.*

Pour un entier $n \geq 0$, on dit qu'un un objet X de $\mathcal{X}$ est n-tronqué *si, pour tout objet A de $\mathcal{X}$, le ∞-groupoïde $\underline{Hom}_{\mathcal{X}}(A, X)$ est un n-groupoïde. On objet X est* tronqué *s'il est n-tronqué pour un certain entier $n \geq 0$.*

Un morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{X}$ est ∞-acyclique *si, pour tout objet tronqué X, le morphisme induit par f*

$$\underline{Hom}_{\mathcal{X}}(B, X) \to \underline{Hom}_{\mathcal{X}}(A, X)$$

est une équivalence de ∞-groupoïdes.

Un objet X de $\mathcal{X}$ est hypercomplet *si, pour tout morphisme ∞-acyclique $A \to B$, le morphisme induit par f*

$$\underline{Hom}_{\mathcal{X}}(B, X) \to \underline{Hom}_{\mathcal{X}}(A, X)$$

est une équivalence de ∞-groupoïdes[6]*.*

On note $\mathcal{X}^{\wedge}$ la sous-∞-catégorie pleine de $\mathcal{X}$ formée des objets hypercomplets. Pour $n \geq -2$, on note $\mathcal{X}^{\leq n}$ la sous-∞-catégorie pleine de $\mathcal{X}$ formée des objets n-tronqués.

On a, par définition, des inclusions pleines :

$$\mathcal{X}^{\leq n} \subset \mathcal{X}^{\wedge} \subset \mathcal{X}\,.$$

Proposition 20.2 (Lurie [Lu1, lem. 6.5.2.6]). — *Si $\mathcal{X}$ est présentable, pour tout entier $n \geq -2$, l'incusion $\mathcal{X}^{\leq n} \subset \mathcal{X}$ admet un adjoint à gauche*

$$\tau^{\leq n} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\leq n}$$

qui fait de $\mathcal{X}^{\leq n}$ une localisation accessible de $\mathcal{X}$ (en particulier, la ∞-catégorie $\mathcal{X}^{\leq n}$ est présentable).

D'autre part, la conjonction de [Lu1, prop. 6.2.1.1 et 6.5.2.8] donne le fait suivant.

Théorème 20.3 (Lurie). — *Si $\mathcal{X}$ est un ∞-topos, alors l'inclusion $\mathcal{X}^{\wedge} \subset \mathcal{X}$ admet un adjoint à gauche qui fait de $\mathcal{X}^{\wedge}$ une localisation exacte de $\mathcal{X}$. En particulier, la ∞-catégorie $\mathcal{X}^{\wedge}$ est un ∞-topos.*

Définition 20.4. — *Pour un ∞-topos $\mathcal{X}$, le ∞-topos $\mathcal{X}^{\wedge}$ est appelé l'*hypercomplétion *de $\mathcal{X}$.*

Un ∞-topos $\mathcal{X}$ est hypercomplet *si $\mathcal{X}^{\wedge} = \mathcal{X}$.*

Exemple 20.5. — Pour tout ∞-topos $\mathcal{X}$, le ∞-topos $\mathcal{X}^{\wedge}$ est hypercomplet ; voir [Lu1, lem. 6.5.2.12]. En outre, en vertu de [Lu1, prop. 6.5.2.13], pour tout ∞-topos hypercomplet $\mathcal{Y}$, le morphisme de ∞-topos canonique $\mathcal{X}^{\wedge} \to \mathcal{X}$ induit une équivalence de ∞-catégories :

$$\underline{Hom}_{*}(\mathcal{X}^{\wedge}, \mathcal{Y}) \to \underline{Hom}_{*}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\,.$$

6. Toën et Vezzosi [TVe1] considèrent la notion d'objet hypercomplet sous le nom "d'objet t-complet".

Exemple 20.6. — Soit C_0 une petite catégorie munie d'une topologie de Grothendieck J. La ∞-catégorie $C = N(C_0)$ est alors munie d'une topologie de Grothendieck que nous noterons aussi J. On peut décrire la ∞-catégorie $Sh_J(C)^\wedge$ (i.e. l'hypercomplétion de $Sh_J(C)$) comme la localisation (du nerf de) la catégorie de faisceaux d'ensembles simpliciaux sur C_0 par les équivalences faibles de la structure de catégorie de modèles fermée de Joyal [Jo1, DHI]. Si le topos des faisceaux d'ensembles sur C_0 admet assez de points, cette classe d'équivalences faibles est formée des morphismes de faisceaux simpliciaux $F \to G$ qui induisent une équivalence d'homotopie faible $F_x \to G_x$ sur les fibres en chaque point x. Autrement dit, dans la littérature classique (d'avant Rezk et Lurie) sur la cohomologie (abélienne ou non-abélienne) des faisceaux, c'est avec le ∞-topos $Sh_J(C)^\wedge$ que l'on travaille (explicitement ou non).

Remarque 20.7. — Pour tout objet X d'un ∞-topos $\mathcal{X}$, on peut former sa *tour de Postnikov*

$$\cdots \to \tau^{\leq n+1}(X) \to \tau^{\leq n}(X) \to \cdots \to \tau^{\leq -2}(X) = * \,,$$

et on a un morphisme canonique

$$X \to \varprojlim_n \tau^{\leq n}(X)$$

Lorsque ce morphisme est inversible pour tout X, il est clair que $\mathcal{X}$ est hypercomplet. C'est ce qui arrive pour les ∞-topos de la forme $\widehat{C}$ avec C une petite ∞-catégorie. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Un exemple de ∞-topos hypercomplet pour lesquels le morphisme ci-dessus n'est pas toujours inversible est donné dans [MV, ex. 1.30, p. 58].

Exemple 20.8. — Soit p un nombre premier, et considérons le groupe pro-fini $G = \mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques. Soit C_0 la catégorie des orbites de G (i.e. la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations de G dont les objets sont les ensembles quotients $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, munis de l'action par translations). On munit C_0 de la topologie de Grothendieck J dont les cribles couvrants sont les cribles non-vides, et on pose $C = N(C_0)$, que l'on voit comme un site avec la topologie J. Le topos des faisceaux d'ensembles sur C_0 est celui des représentations continues de G (i.e. des ensembles E munis d'une action de G telle que, pour tout élément x de E, le stabilisateur de x soit ouvert dans G). L'hypercomplétion du ∞-topos $Sh_J(C)$ étant la ∞-catégorie associée à la structure de catégorie de modèles de Joyal sur la catégorie des faisceaux simpliciaux sur C_0, on peut la décrire comme la localisation de la catégorie des objets simpliciaux de la catégorie des G-ensembles continus par la classes des morphismes $E \to F$ qui insuisent une équivalence d'homotopie faible après oubli de l'action de G. De plus, on démontre que le foncteur induit par l'oubli de l'action de G, de $Sh_J(C)$ vers ∞-$\mathbf{Gpd}$, n'est pas conservatif. Cela implique que le ∞-topos $Sh_J(C)$ n'est pas hypercomplet (voir [Lu1, 7.2.2.31]). Cependant les deux ∞-topos $Sh_J(C)$ et $Sh_J(C)^\wedge$ induisent la même topologie de Grothendieck sur C (ou encore, de manière équivalente, sur C_0).

Ce contre-exemple, associé au théorème 19.13 ainsi qu'à celui qui suit, soulignent l'ambiguïté du lien entre la notion de topologie de Grothendieck et celle de ∞-topos.

Théorème 20.9 (Toën-Vezzosi [TVe1, thm. 3.8.3]). — *Soit C une petite ∞-catégorie. La correspondance $J \mapsto Sh_J(C)^\wedge$ induit une correspondance bijective entre l'ensemble des topologies de Grothendieck sur C et celui des (classes d'équivalence de) localisations exactes et hypercomplètes de $\widehat{C}$.*

Remarque 20.10. — Même lorsqu'on se limite aux ∞-topos hypercomplets, la construction $Sh_J(N(C))^\wedge$, associée à un petit site (C, J) au sens usuel, ne permet pas de retrouver tous les ∞-topos. Par exemple, pour tout ∞-groupoïde X, le ∞-topos $\widehat{X}$ est équivalent à la tranche ∞-$\mathbf{Gpd}_{/X}$ (cela fait partie de la verson ∞-catégorique de la théorie de Galois topologique ; cf. [To2]). Si X n'est pas 0-tronqué (i.e. s'il n'est pas équivalent à un petit ensemble), le ∞-topos ∞-$\mathbf{Gpd}_{/X}$ est hypercomplet, mais il n'est pas équivalent à $Sh_J(N(C))^\wedge$, et ce quelle que soit la petite catégorie C : les objets 0-tronqués n'engendrent pas la ∞-catégorie ∞-$\mathbf{Gpd}_{/X}$ par petites colimites.

Remarque 20.11. — Il semble qu'en général, ce soit la version topologique $Sh_J(C)$ qui ait les meilleures propriétés formelles [7], mais la version hypercomplète a aussi ses avantages. Et il est frappant que, bien que ce soit seulement la version hypercomplète qui ait émergé avant Rezk et Lurie, la littérature contienne un certain nombres de résultats assurant secrètement que $Sh_J(C)$ est hypercomplet (et donc de passer librement de $Sh_J(C)$ à $Sh_J(C)^\wedge$ et vice versa). Par exemple, un théorème bien connu de Brown et Gersten [BG] admet la reformulation suivante. Soit X un schéma noethérien de dimension de Krull finie. Brown et Gersten démontrent qu'un préfaisceau de ∞-groupoïdes F sur (l'ensemble ordonné des ouverts de) X est un faisceau hypercomplet si et seulement si les sections de F sur l'ouvert vide forme un ∞-groupoïde contractile, et si, pour tous ouverts U et V de X, le carré commutatif induit par les opérations évidentes de restriction

$$\begin{tikzcd} F(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[d] \\ F(U) \arrow[r] & F(U \cap V) \end{tikzcd}$$

est cartésien dans la ∞-catégorie ∞-$\mathbf{Gpd}$. Il est facile de voir que cela implique que le ∞-topos $Sh(X)$ des faisceaux de ∞-groupoïdes au sens de la définition 19.8 sur l'espace topologique sous-jacent à X est hypercomplet (et donc, d'après l'exemple 20.6, coïncide avec la localisation de la catégorie des faisceaux simpliciaux sur X au sens usuel, par la classe des morphismes induisant des équivalences d'homotopie faibles sur

7. Un très bel exemple de propriété montrant que la version non-hypercomplète est formellement meilleure est le théorème de changement de base propre pour les espaces topologiques localement compacts [Lu1, cor. 7.3.1.18].

les fibres) [8]. Le résultat de Brown et Gersten a ensuite été axiomatisé et généralisé : une version pour la topologie de Nisnevich est prouvée par Morel et Voevodsky dans [MV], puis Voevodsky a dégagé dans [Voe1, Voe2] le formalisme général des topologies de Grothendieck induites par des *cd-structures* [9]. Il prouve dans [Voe1] l'analogue du théorème de Brown et Gersten pour les sites associés à des cd-structures complètes et bornées, ce qui comprend (lorsqu'on se limite aux schémas noethériens de dimension finie) la topologie de Zariski, la topologie de Nisnevich, mais aussi la topologie cdh (qui consiste à ajouter aux recouvrements de Nisnevich certains recouvrements associés aux éclatements). En fait, les faisceaux de ∞-groupoïdes sur un site associé à une cd-structure complète et bornée au sens de Voevodsky donne lieu à un ∞-topos localement de dimension homotopique finie au sens de [Lu1, def. 7.2.1.1 et 7.1.2.8], ce qui est une condition suffisante pour être hypercomplet (cf. [Lu1, cor. 7.1.2.12]). Cette condition est d'ailleurs vérifiée pour le ∞-topos des faisceaux sur un espace topologique paracompact de dimension finie (voir [Lu1, thm. 7.2.3.6]).

RÉFÉRENCES

[SGA1] A. GROTHENDIECK – *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960-1961 (SGA 1), Documents Mathématiques **3**, Société Mathématique de France, 2003. Édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics, publié en 1971 par Springer.

[SGA4] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1963-1964 (SGA 4), Lecture Notes in Mathematics **269**, **270**, **305**, Springer, Berlin-New York, 1972-1973.

[AM] M. ARTIN, B. MAZUR – *Étale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics **100**, Springer, Berlin-New York, 1969.

[AFR] D. AYALA, J. FRANCIS, N. ROZENBLYUM – *A stratified homotopy hypothesis*, arXiv:1502.01713.

8. Ce résultat de Brown et Gersten illustre encore une fois en quoi la version non-hypercomplète a de meilleures propriétés en général : la K-théorie algébrique (au sens de Quillen, ou bien la version non-connective de Thomason et Trobaugh [TT]) ne forme un faisceau qu'au sens du topos $Sh_J(C)$ pour C le (petit) site Zariski (ou Nisnevich) du schéma considéré, mais pas au sens de la version hypercompète $Sh_J(C)^\wedge$ en général, sauf si on travaille avec des schémas noethériens de dimension finie (justement grâce au théorème de Brown et Gersten). D'une manière générale, la version non-hypercomplète de la notion de faisceau en ∞-groupoïdes permet de s'affranchir assez systématiquement, et à peu de frais, des hypothèses de noethérianité en géométrie algébrique, dérivée ou non.

9. Ces articles de Voevodsky ont été publiés tardivement (en 2010) mais ils sont disponibles en version électronique depuis l'année 2000, c'est-à-dire avant l'apparition des travaux de Rezk, Lurie, Toën et Vezzosi sur les ∞-topos.

[Bh] B. BHATT – *Algebraization and Tannaka duality*, arXiv:1404.7483.

[BK] C. BARWICK, D. KAN – *Relative categories : another model for the homotopy theory of homotopy theories*, Indag. Math. (N.S.) **23** (2012), 42–68.

[Be1] J. E. BERGNER – *A model category structure on the category of simplicial categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 2043–2058.

[Be2] J. E. BERGNER – *Three models for the homotopy theory of homotopy theories*, Topology **46** (2007), 397–436.

[BV] J. M. BOARDMAN, R. M. VOGT – *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics **347**, Springer, Berlin-New York, 1973.

[Bou] N. BOURBAKI – *Univers*, dans Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Tome 1 : Théorie des topos, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1963-1964 (SGA 4), sous la direction de M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics **269**, Springer, Berlin-New York, 1972, 185–217.

[BG] K. S. BROWN, S. M. GERSTEN, *Algebraic K-theory and generalized sheaf cohomology*, Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Mathematics **341**, Springer, Berlin-New York, 1973, 266–292.

[Car] P. CARTIER – *Logique, catégories et faisceaux (d'après F. Lawvere et M. Tierney)*, Séminaire Bourbaki, 30ème année (1977-1978), Exp. No. 513, Lecture Notes in Mathematics **710**, Springer, Berlin, 1979, 123–146.

[Coq] T. COQUAND – *Théorie des types dépendants et axiome d'univalence*, Séminaire Bourbaki, 66ème année (2013-2014), Exp. No. 1085.

[Du1] D. DUGGER – *Universal homotopy theories*, Adv. Math. **164** (2001), 144–176.

[Du2] D. DUGGER – *Combinatorial model categories have presentations*, Adv. Math. **164** (2001), 177–201.

[Du3] D. DUGGER – *Replacing model categories with simplicial ones*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5003–5027.

[DHI] D. DUGGER, S. HOLLANDER, D. C. ISAKSEN – *Hypercovers and simplicial presheaves*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136** (2004), 9–51.

[DS] D. DUGGER, D. SPIVAK – *Rigidification of quasi-categories*, Algebr. Geom. Topol. **11** (2011), 263–325.

[DK1] W. G. DWYER, D. M. KAN – *Simplicial localizations of categories*, J. Pure Appl. Algebra **17** (1980), 267–284.

[DK2] W. G. DWYER, D. M. KAN – *Calculating simplicial localizations*, J. Pure Appl. Algebra **18** (1980), 17–35.

[Fre] P. FREYD – *Homotopy is not concrete*, The Steenrod algebra and its applications : a conference to celebrate N. E. Steenrod's sixtieth birthday, Lecture Notes in Mathematics **168**, Spinger, Berlin-New York, 1970, 25–34.

[Fri] E. M. FRIEDLANDER – *Étale homotopy of simplicial schemes*, Annals of Mathematics Studies **104**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982.

[FI] H. FUKUYAMA, I. IWANARI – *Monoidal infinity category of complexes from tannakian viewpoint*, arXiv:1004.3087.

[GZ] P. GABRIEL, M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **35**, Springer, 1967.

[GL] D. GAITSGORY, J. LURIE – *Weil's conjecture for function fields*, disponible à l'adresse `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/tamagawa.pdf`.

[GK] D. GEPNER, J. KOCK – *Univalence in locally cartesian closed* ∞*-categories*, arXiv:1208.1749v3.

[GJ] P. G. GOERSS, J. F. JARDINE – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics **174**, Birkhäuser, Basel, 1999.

[Gr] A. GROTHENDIECK – *Pursuing Stacks (À la poursuite des champs)*, Documents Mathématiques, Société Mathématique de France, manuscrit datant de 1983, à paraître dans un avenir plus ou moins proche.

[Ha] M. HAKIM – *Topos annelés et schémas relatifs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **64**, Springer, Berlin-New York, 1972.

[Hi] D. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs **99**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Hov] M. HOVEY – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs **63**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Hoy] M. HOYOIS – *A note on étale homotopy*, preprint disponible sur la page de son auteur : `http://math.mit.edu/~hoyois/`.

[Ja] J. F. JARDINE – *Simplicial presheaves*, J. Pure Appl. Algebra **47** (1987), 35–87.

[Jo1] A. JOYAL – Lettre à A. Grothendieck du 11 avril 1984. Une version électronique, éditée par G. Maltsiniotis et annotée par A. Joyal est disponible à cette adresse : `http://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/ps/lettreJoyal.pdf`.

[Jo2] A. JOYAL – *Quasi-categories and Kan complexes*, Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly. J. Pure Appl. Algebra **175** (2002), 207–222.

[Jo3] A. JOYAL – *The theory of quasi-categories and its applications*, lectures at CRM Barcelona February 2008. Texte disponible à cette adresse : `http://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern45-2.pdf`.

[JT1] A. JOYAL, M. TIERNEY – *Strong stacks and classifying spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1488**, Springer, Berlin-New York, 1991, 213–236.

[JT2] A. JOYAL, M. TIERNEY – *Quasi-categories vs Segal spaces*, in Categories in algebra, geometry and mathematical physics, Contemp. Math. **431**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, 277–326.

[KLV] C. KAPULKIN, P. LEFANU LUMSDAINE, V. VOEVODSKY – *Univalence in simplicial sets*, arXiv:1203.2553v3.

[Lu1] J. LURIE – *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies **170**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[Lu2] J. LURIE – *Higher algebra*, disponible à l'adresse `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/higheralgebra.pdf`

[Lu3] J. LURIE – *Derived Algebraic Geometry V : structured spaces*, disponible à l'adresse `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG-V.pdf`.

[Lu4] J. LURIE – *Derived Algebraic Geometry VIII : quasi-coherent sheaves and Tannaka duality theorems*, disponible à l'adresse `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG-VIII.pdf`.

[Lu5] J. LURIE – *Tannaka duality for geometric stacks* disponible à l'adresse `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/Tannaka.pdf`.

[MM] S. MACLANE, I. MOERDIJK – *Sheaves in geometry and logic*, Universitext, Springer, Berlin-New-York, 1992.

[Moe] I. MOERDIJK – *Prodiscrete groups and Galois toposes*, Indag. Math. (Proceedings) **92** (1989), 219–234.

[MV] F. MOREL, V. VOEVODSKY – $\mathbf{A}^1$*-Homotopy theory of schemes*, Publ. Math. I.H.É.S. **90** (1999), 45–143.

[Qui] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics **43**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[Re] C. REZK – *A model for the homotopy theory of homotopy theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 973–1007.

[RV] E. RIEHL, D. VERITY – *The 2-category theory of quasi-categories*, preprint arXiv:1306.5144.

[Si1] C. SIMPSON – *A Giraud-type characterization of the simplicial categories associated to closed model categories as* ∞*-pretopoi*, math.AT/9903167.

[Si2] C. SIMPSON – *Homotopy theory of higher categories*, New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[TT] R. W. THOMASON, T. TROBAUGH – *Higher algebraic* K*-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift III, a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck, P. Cartier, G. Laumon, L. Illusie, Yu. I. Manin, N. M. Katz, K. A. Ribet editors, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1990.

[To1] B. TOËN – *Dualité de Tannaka supérieure I : structures monoïdales*, prépublication de l'Institut Max Planck (2000), `https://www.mpim-bonn.mpg.de/preprints?number=2000-57`.

[To2] B. TOËN – *Vers une interprétation galoisienne de la théorie de l'homotopie*, Cah. Topol. Geom. Différ. Catég. **43** (2002), 257–312.

[To3] B. TOËN – *Vers une axiomatisation de la théorie des catégories supérieures*, K-theory **34** (2005), 233–263.

[TVa] B. TOËN, M. VAQUIÉ – *Moduli of objects in dg-categories*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **40** (2007), 387–444.

[TVe1] B. TOËN, G. VEZZOSI – *Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), 257–372.

[TVe2] B. TOËN, G. VEZZOSI – *Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902.

[Voe1] V. VOEVODSKY – *Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 1384–1398.

[Voe2] V. VOEVODSKY – *Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 1399–1406.

[Wal] J. WALLBRIDGE – *Tannaka duality over ring spectra*, arXiv:1204.5787.

Denis-Charles CISINSKI

Université Paul Sabatier
UMR 5219 du CNRS
Institut de Mathématiques de Toulouse
118 route de Narbonne
F–31062 Toulouse Cedex 9
E-mail : `denis-charles.cisinski@math.univ-toulouse.fr`