

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

HECTOR ANDRÉS ROSERO GARCÍA

**Superfícies Isocurvadas no Semiespaço
Euclidiano Tridimensional**

Goiânia
2017

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico:** **Dissertação** **Tese**

1 2. Identificação da Tese ou Dissertação

2

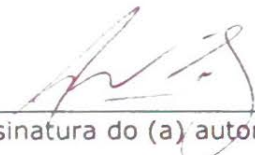
Nome completo do autor: Hector Andrés Rosero García

Título do trabalho: Superfícies isocurvadas no semiespaço Euclidiano tridimensional

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do (a) autor (a) ²

Data: 17 / 04 / 2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

²A assinatura deve ser escaneada.

HECTOR ANDRÉS ROSERO GARCÍA

Superfícies Isocurvadas no Semiespaço Euclidiano Tridimensional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de matemática e estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

García, Hector Andrés Rosero
Superfícies isocurvadas no semiespaço euclidiano tridimensional
[manuscrito] / Hector Andrés Rosero García. - 2017.
0 67 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística (IME), Matemática, Goiânia, 2017.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui lista de figuras.

1. Curvatura Gaussiana. 2. Métricas conformes. 3. Espaço
hiperbólico. 4. Superfícies mínimas. 5. Congruência de geodésicas. I. ,
Levi Rosa Adriano, orient. II. Título.

CDU 514.77





UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE HECTOR ANDRES ROSERO GARCIA – Aos trinta e um dias do mês de março do ano de dois mil e dezessete (31/03/2017), às 14:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Levi Rosa Adriano - Orientador, Prof. Romildo da Silva Pina e Prof. Pedro Roitman, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada na sala de aula do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **“Superfícies Isocurvadas no semiespaço euclidiano tridimensional”**, em nível de Mestrado, área de concentração em Geometria, de autoria de Hector Andres Rosero Garcia, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Levi Rosa Adriano, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor da dissertação que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1068 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas as correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Geometria pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 17:00 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ulisses José Gabry, secretário do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.


Prof. Dr. Levi Rosa Adriano
Presidente - IME/UFG


Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Membro - IME/UFG


Prof. Dr. Pedro Roitman
Membro - DM/UnB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Hector Andrés Rosero García

Graduou-se em Matemáticas na Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colômbia). Durante sua graduação, foi representante estudantil ante o conselho do departamento de matemáticas da UDFJC. Durante os estudos de mestrado, na Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do Conselho Nacional de Pesquisa-CNPq.

Aos meus avós, Belén e Aristóbulo.

Agradecimentos

Agradeço principalmente aos meus pais, Gloria e Hector, que por tantos anos tem acreditado em mim, apoiado minhas decisões e, ainda na distancia, dado a força para atingir meus objetivos.

Ao meu orientador, Dr. Levi Rosa Adriano, agradeço o valioso tempo e dedicação ao longo da realização deste trabalho, assim como aos integrantes do seminário de geometria do IME-UFG e ao professor Pedro Roitman (MAT-UNB) pelas sessões de intercambio de conhecimento e as suas valiosas opiniões, aportes e comentários.

Agradeço aos meus professores de graduação e mestrado, pilar e exemplo na minha formação como matemático e pessoa, especialmente aos professores Carlos Ochoa, em Bogotá, e Romildo Pina, do IME-UFG, por me impregnar o seu amor pela matemática e a geometria. Agradeço também aos demais professores e funcionários que trabalham cada dia pelo progresso e sustento do IME-UFG.

Aos meus colegas e amigos brasileiros agradeço seu apoio e a sua hospitalidade, que fizeram da minha estancia neste país ainda mais enriquecedora e gratificante.

Aos colombianos em Brasil. À minha família e amigos na Colômbia, em Portugal, na Argentina e o Peru.

À Ana, à Diana e ao Mauricio, pela companhia, carinho, conselho e apoio.

Agradeço finalmente o patrocínio da CNPq durante meus estudos de mestrado, e a todo aquele que direta ou indiretamente tenha aportado ao desenvolvimento do presente trabalho.

A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

Godfred Harold Hardy,
7 de Fevereiro de 1877 - 1 de Dezembro de 1947.

Resumo

Rosero García, Hector Andrés. **Superfícies Isocurvadas no Semiespaço Euclidiano Tridimensional**. Goiânia, 2017. 65p. Dissertação de Mestrado. Instituto de matemática e estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, desenvolvemos as bases do conceito de *Superfície Isocurvada*, introduzido em [2] por Barroso e Roitman, isto é, uma superfície imersa numa variedade 3-dimensional M a qual tem a mesma curvatura Gaussiana induzida por duas métricas diferentes em M . Segundo isso, mostramos um método geométrico para a geração de exemplos não triviais de superfícies isocurvadas *elípticas* e *hiperbólicas* no caso particular de $M = \mathbb{R}_+^3$ com as métricas conformes Euclidiana e hiperbólica. Também exibimos alguns exemplos subjacentes ao método acima.

Palavras-chave

Curvatura Gaussiana, métricas conformes, espaço hiperbólico, superfícies mínimas, congruência de geodésicas.

Abstract

Rosero García, Hector Andrés. **Isocurved surfaces in Euclidean three-dimensional half-space**. Goiânia, 2017. 65p. MSc. Dissertation. Instituto de matemática e estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we develop the basics of the concept of *Isocurved Surface*, introduced in [2] by Barroso and Roittman, that is, a surface immersed in a 3-dimensional manifold M and which have the same Gaussian curvature induced by two different metrics. Later on, we show a geometric method to generate non-trivial examples of *elliptic* and *hyperbolic* isocurved surfaces for the particular case of $M = \mathbb{R}_+^3$ and the Euclidean and hyperbolic metrics induced on it. We also exhibit some examples coming from the geometric method above.

Keywords

Gaussian curvature, conformal metrics, hyperbolic space, minimal surfaces, congruence of geodesics.

Sumário

Lista de Figuras	10
Introdução	11
1 Preliminares	13
1.1 Superfícies no espaço Euclidiano.	13
1.2 Espaço hiperbólico	15
1.2.1 Modelo do semi-espaço	15
1.2.2 Modelo do hiperboloide	15
1.3 Superfícies Isocurvadas	16
2 Princípios básicos das superfícies isocurvadas	18
2.1 A EDP característica dos gráficos isocurvados.	18
2.2 Invariância das superfícies isocurvadas	22
3 Construção de superfícies isocurvadas	27
3.1 Superfícies isocurvadas elípticas	27
3.2 Superfícies isocurvadas hiperbólicas	38
4 Exemplos	43
4.1 Superfícies isocurvadas elípticas	43
4.2 Exemplos de superfícies isocurvadas elípticas	44
4.2.1 Superfície isocurvada de revolução	44
4.2.2 Superfície isocurvada 1-periódica	46
4.2.3 Superfície isocurvada tipo Scherk	48
4.3 Superfícies isocurvadas hiperbólicas	50
4.3.1 Superfície isocurvada Hiperbólica tipo Enneper	51
4.4 Superfícies isocurvadas parabólicas	54
A Geometria de superfícies no espaço de Lorentz-Minkowski	56
A.1 Conceitos básicos	56
A.2 Superfícies de tipo-tempo e tipo-espaço em \mathbb{L}^3	60
A.2.1 Cálculos locais de curvatura	61
Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

1.1	Exemplos básicos de superfícies isocurvadas	17
4.1	Helicoide e catenoide	45
4.2	Superfície isocurvada de revolução	46
4.3	Superfície mínima de Catalan	47
4.4	Superfície isocurvada 1–periódica	48
4.5	Superfície mínima de Scherk	49
4.6	Superfície isocurvada tipo Scherk	50
4.7	Superfície mínima Lorentz Enneper	52
4.8	Superfície isocurvada tipo Enneper	53
4.9	Curva tractriz	54
4.10	Superfícies isocurvadas parabólicas	55
A.1	Representação clássica do espaço e a pseudoesfera unitária	58

Introdução

O cenário típico em problemas sobre geometria de subvariedades é usualmente dado por uma variedade Riemanniana M e a busca por uma subvariedade $S \subset M$ com algumas propriedades geométricas especiais com respeito ao ambiente Riemanniano em M . Neste sentido, inumeráveis trabalhos tem sido escritos na procura de generalizar subvariedades que, sob condições particulares, possuem curvaturas, tensores ou algumas outras propriedades geométricas iguais. Neste projeto, que será baseado no trabalho de Barroso e Roitman ([2]), vamos considerar um problema que generaliza a questão acima no seguinte sentido, ao invés de uma única métrica em M , iremos considerar um par de métricas, g_1 e g_2 , e buscar por uma subvariedade $S \subset M$ com uma propriedade especial que depende de ambas as métricas g_1 e g_2 . É claro que se as métricas g_1 e g_2 são arbitrárias este problema pode se tornar um tanto complicado. Entretanto, assumindo que g_1 e g_2 estão numa mesma classe de métricas conformes, existe um fértil e ainda inexplorado campo a ser estudado. Nesta ordem de ideias, vamos considerar o problema abaixo.

Lembramos que duas métricas g_1 e g_2 numa variedade Riemanniana M são ditas *conformes* se existe $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $g_1 = f^2 g_2$ chamada comumente de fator de conformidade ou fator conforme (ver [5]). Como foi implícito acima, o fato de "ser conforme a" gera uma relação de equivalência no conjunto das métricas Riemannianas sobre M .

Seja S uma superfície imersa em $\mathbb{R}_+^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$, e ds_e^2 e ds_h^2 as métricas Euclidiana e hiperbólica em \mathbb{R}_+^3 dadas por

$$ds_e^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$
$$ds_h^2 = \frac{ds_e^2}{x_3^2}.$$

Vamos denotar por K_e e K_h as curvaturas Gaussianas das métricas em S induzidas por ds_e^2 e ds_h^2 , respectivamente. Em geral, ao longo deste trabalho, os diferentes elementos com índices h e e , farão referência aos calculados segundo a métrica hiperbólica ou euclidiana respectivamente.

Problema: Encontrar superfícies imersas em \mathbb{R}_+^3 tais que $K_h = K_e$.

Para simplificar nosso trabalho, tais superfícies serão chamadas de *Superfícies Isocurvadas*.

Alguns exemplos triviais de superfícies isocurvadas surgem naturalmente, os planos horizontais imersos em \mathbb{R}_+^3 tem $K_h = K_e \equiv 0$, no presente trabalho procuramos por uma generalização destas superfícies, propriedades particulares e métodos geométricos concretos que permitam encontrar infinitos exemplos não-triviais de superfícies isocurvadas. Com este objetivo, organizamos nosso estudo como segue.

No capítulo 1, *Preliminares*, introduzimos os conceitos básicos da geometria de superfícies que serão utilizados ao longo do trabalho, bem como o conceito e exemplos imediatos de superfícies isocurvadas.

No capítulo 2 procuramos por uma generalização das superfícies isocurvadas, localmente elas podem ser vistas como o gráfico de uma função diferenciável $\varphi(u, v)$ definida num domínio em $\partial\mathbb{R}_+^3$, com o que obteremos uma expressão em termos e equações diferenciais parciais e uma classificação relacionada diretamente com a geometria própria da superfície. Também neste capítulo é mostrada uma propriedade de invariância da condição de isocurvatura nas superfícies paralelas (no sentido hiperbólico) da superfície original.

Como é comum no campo das equações diferenciais parciais, nem sempre é fácil encontrar soluções explícitas para as EDP que caracterizam as superfícies isocurvadas, o que faz com que se seja conveniente encontrar um método geométrico mais apropriado para a geração de exemplos não triviais destas superfícies.

No capítulo 3, mostramos métodos geométricos para obter estes exemplos a partir da surpreendente relação que as superfícies isocurvadas tem com as superfícies mínimas imersas em \mathbb{R}^3 e as superfícies mínimas tipo-tempo em \mathbb{L}^3 . Esta relação é obtida ao estudar as congruências de geodésicas de \mathbb{H}^3 que tem superfícies isocurvadas como superfícies ortogonais.

Finalmente, no capítulo 4, fazendo uso desses métodos geométricos e a geração de superfícies mínimas a partir de dados de Weierstrass, mostramos alguns exemplos relacionados às superfícies mínimas mais conhecidas na literatura, assim como alguns outros exemplos não triviais.

Preliminares

Ao longo deste trabalho estudaremos superfícies, e suas propriedades, em ambientes euclidianos e não euclidianos, faremos uso de conceitos geométricos já conhecidos como as *curvaturas principais*, *curvatura média*, *gaussiana*, *seccional* ou *extrínseca* de uma variedade ou uma superfície em \mathbb{R}^3 , métricas conformes, geodésicas, campos vetoriais, entre outros, que podem ser estudados mais a fundo em inumeráveis fontes bibliográficas clássicas (ver por exemplo [7], [8], [22]). Alguns destes conceitos necessários vão ser expostos neste capítulo e, alguns outros, ao longo do texto conforme for preciso.

1.1 Superfícies no espaço Euclidiano.

Definição 1.1 *Seja S um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^3 . Diz-se que S é uma **superfície regular** se, para cada $p \in S$ existem uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ de p , um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo diferenciável $X : U \rightarrow V \cap S$ tal que a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.*

Dizemos que a aplicação X é uma *parametrização* de S .

Um *vetor tangente* a um ponto $p \in S$ é um vetor tangente a uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes a S em p , denotado por $T_p S$ é chamado de *plano tangente* a S em p . Se X é uma parametrização de S em p , então $T_p S$ coincide com o subespaço vetorial gerado por $\left\{ \frac{\partial X}{\partial x_i}; i = 1, 2. \right\}$, onde $p = X(q)$.

O produto interno natural de \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente a S , $T_p S$, um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$, esta restrição do produto interno canônico de \mathbb{R}^3 aos planos tangentes é chamada de *primeira forma fundamental* I de S . Logo, para cada $p \in S$, $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad (1-1)$$

com $w_1, w_2 \in T_p S$.

Em coordenadas locais (ver [7]), dada uma parametrização $\mathbb{X}(u, v)$ e o vetor tangente $w \in T_p S$, podemos ver $w = \alpha'(0)$ para uma curva parametrizada $\alpha(t) = (u(t), v(t)), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ com $p = \alpha(0) = \mathbb{X}(u_0, v_0)$, donde

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v', \mathbb{X}_u u' + \mathbb{X}_v v' \rangle \\ &= \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle (u')^2 + 2 \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle (u')(v') + \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle (v')^2 \\ &= E(u')^2 + F(u')(v') + G(v')^2 \end{aligned} \quad (1-2)$$

e se definem assim os coeficientes E, F, G da primeira forma fundamental como

$$E = \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u \rangle, \quad F = 2 \langle \mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbb{X}_v, \mathbb{X}_v \rangle. \quad (1-3)$$

Uma superfície regular S é dita *orientável* se é possível cobrir ela com uma família de vizinhanças coordenadas tais que, para cada ponto $p \in S$ contido em duas (ou mais) vizinhanças desta família, o Jacobiano do cambio de coordenadas é positivo em p . Equivalentemente em \mathbb{R}^3 , ver [7], uma superfície regular S é orientável se e somente se existe um campo vetorial unitário $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Neste caso, dizemos que N determina uma orientação em S e, se S é de fato orientável, a aplicação N toma valores na esfera unitária S^2 , e a aplicação $N : S \rightarrow S^2$ é chamada de *aplicação normal de Gauss*.

A aplicação de Gauss é diferenciável, e a sua diferencial dN_p em $p \in S$ é linear de $T_p S$ em $T_p S^2 \cong T_p S$, além de mais, é auto-adjunta, o que permite associar a dN_p uma forma quadrática II_p , chamada de *segunda forma fundamental*, em $T_p S$ e definida da seguinte forma:

$$II_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle,$$

com $w_1, w_2 \in T_p S$. Consequentemente, a segunda II forma fundamental é uma forma bilinear simétrica sobre $T_p S$, para todo $p \in S$.

Em coordenadas locais, os coeficientes da segunda forma fundamental e, f, g (em alguns textos chamados de l, m, n), vem dados por

$$e = \langle N, \mathbb{X}_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, \mathbb{X}_{uv} \rangle, \quad g = \langle N, \mathbb{X}_{vv} \rangle.$$

Definição 1.2 As *curvaturas principais* k_1, k_2 de S em um ponto p , são os autovalores de dN_p . Dessa forma, se definem a *curvatura média* H e a *curvatura Gaussiana* K por:

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\text{tra}(-dN_p)}{2} \quad (1-4)$$

e

$$K = k_1 k_2 = \det(-dN_p), \quad (1-5)$$

onde tra e det denotam, respectivamente, o traço e o determinante de dN_p .

Podemos também obter expressões para as curvaturas média e Gaussiana em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais em coordenadas locais como segue

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1-6)$$

Definição 1.3 Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita **mínima** se sua curvatura média é identicamente nula ($H \equiv 0$).

1.2 Espaço hiperbólico

Diferentes modelos equivalentes podem ser usados para definir o espaço ambiente, em termos da geometria hiperbólica, no qual vamos considerar imersas as nossas superfícies, a continuação, definiremos os que serão mais uteis para este trabalho e alguns dos seus elementos e propriedades particulares. [20].

1.2.1 Modelo do semi-espaço

Seja $\mathbb{R}_+^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\}$, munido com a métrica

$$ds_h^2 = \frac{ds_e^2}{x_3^2} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}.$$

Definimos $\mathbb{H}^3 = (\mathbb{R}_+^3, ds_h^2)$, chamado de *modelo do semi-espaço superior* do espaço hiperbólico. Pode-se mostrar (ver [8]) que \mathbb{H}^3 é uma variedade diferenciável com curvatura seccional constante igual a -1 .

Em cada um dos modelos do espaço hiperbólico as linhas geodésicas, em diante chamadas h-geodésicas, tem formas diferentes de ser definidas, no modelo do semi-espaço acima definido, as h-geodésicas da variedade são semi-retas verticais e semicírculos perpendiculares ao plano $x_3 = 0$ ($\equiv \partial\mathbb{R}_+^3$) com centro também nesse plano.

Podemos notar que ds_e^2 e ds_h^2 são métricas conformes, em \mathbb{R}_+^3 , com fator de conformidade x_3^2 .

1.2.2 Modelo do hiperboloide

Um outro modelo do espaço hiperbólico 3-dimensional se define como uma subvariedade do espaço 4-dimensional de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4 = (\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ é o

semi-produto interno *Lorentziano*, definido para $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ como

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

O chamado *modelo de Minkowski* do espaço hiperbólico é definido pelo conjunto

$$\mathbb{H}^3 = \{v \in \mathbb{L}^4; \langle v, v \rangle_L = -1, x_1 = 0\},$$

munido com a métrica ambiente $ds_L^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$.

As h-geodésicas neste modelo são interseções de \mathbb{H}^3 com hiperplanos que passam pela origem de \mathbb{L}^4 , e são da forma $\lambda(t) = e_1 \cosh(t) + e_2 \sinh(t)$. Ver [20], seção 3.2.

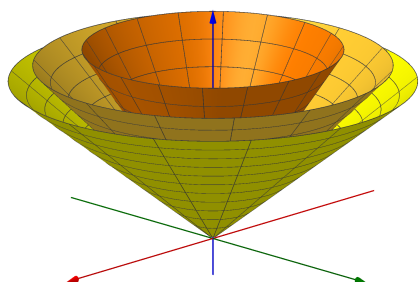
O modelo de Minkowski definido acima vai ser útil principalmente na seção 2.2, onde estudaremos propriedades puramente hiperbólicas das superfícies. Não deve ser confundido com o espaço \mathbb{L}^3 onde na Seção 3.2 consideraremos imersas algumas superfícies; um estudo resumido da geometria de superfícies no espaço 3-dimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 , pode ser encontrado no Apêndice A em conjunto com algumas referencias aí citadas.

Existem vários outros modelos equivalentes para definir e estudar diferentes componentes da geometria hiperbólica em diferentes dimensões, que não vão ser estudados neste trabalho, porém, se precisar, o leitor pode encontrar um breve estudo destes modelos e outros detalhes em [3].

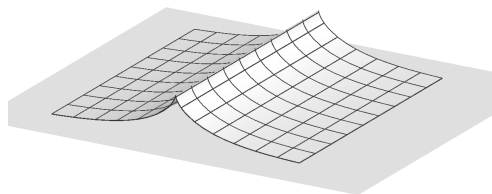
1.3 Superfícies Isocurvadas

Voltando ao modelo do semi-espaço, e dando continuidade ao problema estabelecido na nossa introdução, consideramos agora uma superfície S imersa em \mathbb{R}_+^3 ; como \mathbb{R}_+^3 admite as duas métricas conformes ds_e^2 e ds_h^2 , S herda as duas métricas induzidas pelo ambiente, e, com isto, os elementos geométricos próprios induzidos por cada uma delas. O nosso propósito, a continuação, é estudar as curvaturas Gaussianas relativas às métricas Euclidiana e hiperbólica induzidas sobre S e caracterizar superfícies tais que $K_e = K_h$ e as suas propriedades particulares.

Os exemplos mais imediatos para garantir inicialmente a existência das superfícies isocurvadas são os planos paralelos a $\partial\mathbb{R}_+^3$, $x_3 = c$ para $c = cte.$, pois $K_e = K_h = 0$ em todo ponto, não assim os planos não horizontais, pois por definição a métrica e curvaturas se vem afetados pelas variações na terceira coordenada. Tomando agora um cone circular C de eixo vertical e vértice $v \in \partial\mathbb{R}_+^3$, temos novamente $K_e = K_h \equiv 0$, donde $C - \{v\}$, é também uma superfície isocurvada (Ver **Figura 1.1** (a)).



(a) Família de cones.



(b) Superfície regrada.

Figura 1.1: Exemplos de superfícies isocurvadas.

Para um último exemplo, ainda com curvatura nula, considere uma curva tractriz α contida num plano vertical P , a partir de α podemos construir uma superfície regrada S com a família de retas horizontais que passam pelos pontos de α e são perpendiculares (no sentido Euclidiano) a P (ver **Figura 1.1** (b)), como é fácil calcular a partir dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamentais de S , $K_e \equiv 0$, de igual maneira, como veremos no seguinte capítulo, $K_h \equiv 0$, logo S é isocurvada.

Princípios básicos das superfícies isocurvadas

Neste capítulo estabelecemos a EDP característica dos gráficos isocurvados, bem como a invariância da propriedade de *isocurvatura* para superfícies paralelas no sentido hiperbólico.

2.1 A EDP caraterística dos gráficos isocurvados.

Nosso primeiro objetivo no estudo das superfícies isocurvadas, será caracterizá-las mediante identidades que permitam gerar uma quantidade suficiente de exemplos que justifique nosso estudo e o estudo das suas propriedades particulares. Com isso em mente, vamos agora mostrar a relação entre as curvaturas Gaussianas K_e e K_h de $S \subset \mathbb{R}_+^3$. Suponha N_e um campo de vetores normal unitário sobre S , daí, com o produto interno euclideo, para todo $p = (x_1, x_2, x_3) \in S$, $\langle N_e(p), N_e(p) \rangle_e = 1$; agora, na métrica hiperbólica teremos

$$\langle N_e(p), N_e(p) \rangle_{h,p} = \frac{\langle N_e(p), N_e(p) \rangle_e}{x_3^2} = \frac{1}{x_3^2}, \text{ donde } \langle x_3 N_e(p), x_3 N_e(p) \rangle_{h,p} = 1$$

para todo $p \in S$, e assim $x_3 N_e$ é um campo normal unitário sobre S no sentido hiperbólico.

Da geometria clássica de superfícies, lembramos que as curvaturas principais, k_1^e e k_2^e , são obtidas como autovalores da aplicação $dN_{e,p} : T_p S \rightarrow T_p S$, isto é, $dN_{e,p}(e_i) = k_i^e(e_i)$, ($i = 1, 2$), onde e_1 e e_2 são as direções principais de $dN_{e,p}$. Em termos hiperbólicos, com $N_h \equiv x_3 N_e$,

$$dN_{h,p}(v) = \frac{d}{dt} N_h(p + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (x_3 N_e)(p + tv)|_{t=0}$$

fazendo $v = e_i$ temos que $dN_{h,p}(e_i) = e_3 N_e(p) + x_3 dN_{e,p}(e_i)$, donde encontramos que as curvaturas principais euclidianas e hiperbólicas estão relacionadas por

$$k_i^h = x_3 k_i^e + n_3, \quad i = 1, 2; \tag{2-1}$$

onde n_3 é a terceira coordenada de N_e em p .

Com isto, é possível calcular a curvatura média e gaussiana de S em termos hiperbólicos, por um lado

$$H_h = \frac{k_1^h + k_2^h}{2} = \frac{x_3 k_1^e + x_3 k_2^e + 2n_3}{2} = x_3 H_e + n_3; \quad (2-2)$$

por outra parte, a curvatura extrínseca de S vem dada por

$$K_{ext} = k_1^h k_2^h = (x_3 k_1^e + n_3)(x_3 k_2^e + n_3) = x_3^2 K_e + 2H_e x_3 n_3 + n_3^2,$$

agora, aplicando a equação de Gauss, ([8]) $K_h = K_{ext} + k_0$, onde k_0 é a curvatura seccional da variedade, temos que a relação entre a curvatura gaussiana euclideana e a curvatura gaussiana hiperbólica está dada por

$$K_h = x_3^2 K_e + 2H_e x_3 n_3 + n_3^2 - 1. \quad (2-3)$$

Observação 2.1 *Este resultado pode ser generalizado para qualquer métrica $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}/f^2$ conforme à métrica euclidiana, onde em termos gerais as curvaturas principais vão estar relacionadas pela equação $\bar{k}_i = f k_i^e + \langle N, \nabla f \rangle$, conseguindo analogamente expressões que relacionam as curvaturas média e Gaussiana como foi feito acima, [5].*

Exemplo 2.1 *No capítulo 1 foi mencionado que para uma superfície Σ regradada horizontalmente a partir de uma tractriz contida no plano xz como a vista na figura 1.1 (b), $K_h \equiv 0$. De fato. Aplicando a equação 2-3 para uma parametrização de Σ , $\mathbb{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\mathbb{X}(u, v) = [u - \tanh u, v, \operatorname{sech} u]$, vemos que $x_3^2 K_e + 2H_e x_3 n_3 + n_3^2 - 1 = \operatorname{sech} u * 0 + \operatorname{csch} u \operatorname{sech} u \tanh u + \tanh^2 u - 1 = 0$ para todo ponto de $\mathbb{X}(\Omega)$.*

Localmente, podemos considerar a superfície S como o gráfico de uma função diferenciável φ definida num domínio de $\partial\mathbb{R}_+^3$ ([7], [22]) e aplicar as definições clássicas para curvaturas média, gaussiana e campo normal em 2-3. Explicitamente (ver por exemplo [7]), elas estão dadas por

$$x_3 = \varphi, \quad K_e = \frac{\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2}{(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)^2}, \quad H_e = \frac{(1 + \varphi_u^2)\varphi_{vv} - 2\varphi_u\varphi_v\varphi_{uv} + (1 + \varphi_v^2)\varphi_{uu}}{2(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)^{3/2}}$$

$$N_e = \frac{(-\varphi_u, -\varphi_v, 1)}{(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)^{1/2}}, \quad \text{donde } n_3 = \frac{1}{(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)^{1/2}};$$

donde 2-3 é equivalente a

$$K_h = \varphi^2 \frac{\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2}{(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)^2} + \varphi \frac{(1 + \varphi_u^2)\varphi_{vv} - 2\varphi_u\varphi_v\varphi_{uv} + (1 + \varphi_v^2)\varphi_{uu}}{(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)^2} + \frac{1}{(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)} - 1.$$

Agora, no nosso caso particular, procuramos por superfícies tais que $K_h = K_e$, assim, o gráfico de uma função diferenciável φ é uma superfície isocurvada se, e somente

se, φ é solução da seguinte equação diferencial parcial

$$(1 - \varphi^2) \frac{\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2}{1 + |\nabla\varphi|^2} - \frac{\varphi[(1 + \varphi_v^2)\varphi_{uu} - 2\varphi_u\varphi_v\varphi_{uv} + (1 + \varphi_u^2)\varphi_{vv}]}{1 + |\nabla\varphi|^2} + |\nabla\varphi|^2 = 0 \quad (2-4)$$

onde $|\nabla\varphi|^2 = \varphi_u^2 + \varphi_v^2$. Estudaremos um pouco mais a importante igualdade obtida acima.

A equação 2-4 é uma EDP de Monge-Ampere de segunda ordem do tipo misto, isto é, uma equação da forma

$$A(\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2) + B\varphi_{uu} + 2C\varphi_{uv} + D\varphi_{vv} + E = 0, \quad (2-5)$$

onde A, B, C, D e E são funções em termos de u, v, φ, φ_u e φ_v ([14]). O estudo das equações de Monge-Ampere é extenso, e escapa aos objetivos do nosso trabalho, porém a classificação analítica de ditas equações ([14], [17]) pode ser interpretada geometricamente e será utilizada para classificar as superfícies isocurvadas e os métodos para calcular novas superfícies com a propriedade de isocurvatura.

Seja agora $\Delta = AE - BD + C^2$, a equação 2-5 (e de igual maneira 2-4), ou as suas soluções, são classificadas como *elípticas* se $\Delta < 0$, *hiperbólicas* se $\Delta > 0$ ou *parabólicas* no caso que $\Delta = 0$. Esta classificação será agora adotada também para as superfícies isocurvadas obtidas como solução da equação 2-4, isto é, se φ é solução elíptica de 2-4 é uma solução elíptica, a superfície isocurvada será denominada também como *superfície isocurvada elíptica*, de maneira análoga se φ for hiperbólica ou parabólica assim será classificada a superfície. A seguinte proposição relaciona esta classificação diretamente com a geometria própria da superfície.

Proposição 2.1 *Seja S uma superfície isocurvada que é o gráfico de uma função $\varphi(u, v)$ definida num domínio do plano $x_3 = 0$. Para pontos $(u, v, \varphi(u, v))$ tais que o vetor normal a S não é vertical, i.e. $\|\nabla\varphi\| \neq 0$, seja $\rho(u, v)$ o raio euclidiano do círculo ortogonal a $x_3 = 0$ que representa a h -geodésica que passa através de $(u, v, \varphi(u, v))$ e é ortogonal a S nesse ponto. Então φ é*

- Uma solução elíptica de (2-4) se e somente se $\rho > 1$ ou $\|\nabla\varphi\| = 0$.
- Uma solução parabólica de (2-4) se e somente se $\rho = 1$.
- Uma solução hiperbólica de (2-4) se e somente se $\rho < 1$.

Prova. Rescrevendo novamente a equação (2-4) na forma (2-5) temos

$$\frac{1 - \varphi^2}{1 + |\nabla\varphi|^2} (\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2) - \frac{\varphi(1 + \varphi_v^2)}{1 + |\nabla\varphi|^2} \varphi_{uu} + \frac{2\varphi_u\varphi_v\varphi}{1 + |\nabla\varphi|^2} \varphi_{uv} - \frac{\varphi(1 + \varphi_u^2)}{1 + |\nabla\varphi|^2} \varphi_{vv} + |\nabla\varphi|^2 = 0, \quad (2-6)$$

igualdade que se tem se, e somente se

$$(1 - \varphi^2)(\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2) - \varphi(1 + \varphi_v^2)\varphi_{uu} + 2\varphi_u\varphi_v\varphi\varphi_{uv} - \varphi(1 + \varphi_u^2)\varphi_{vv} + (|\nabla\varphi|^2)(1 + |\nabla\varphi|^2) = 0. \quad (2-7)$$

Deste modo, temos $A = 1 - \varphi^2$, $B = -\varphi(1 + \varphi_v^2)$, $C = \varphi_u\varphi_v\varphi$, $D = -\varphi(1 + \varphi_u^2)$ e $E = (\varphi_u^2 + \varphi_v^2)(1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2)$, e o discriminante Δ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= AE - BD + C^2 \\ &= (1 - \varphi^2)(|\nabla\varphi|^2)(1 + |\nabla\varphi|^2) - \varphi^2(1 + \varphi_u^2)(1 + \varphi_v^2) + \varphi^2\varphi_u^2\varphi_v^2 \\ &= (1 - \varphi^2)(\varphi_u^2 + \varphi_v^2)(1 + |\nabla\varphi|^2) - \varphi^2(1 + |\nabla\varphi|^2) \\ &= (1 + |\nabla\varphi|^2)(|\nabla\varphi|^2 - \varphi^2|\nabla\varphi|^2 - \varphi^2) \\ &= -(1 + |\nabla\varphi|^2)(\varphi^2(1 + |\nabla\varphi|^2) - |\nabla\varphi|^2) \end{aligned}$$

Donde φ é elíptica nos pontos em que $|\nabla\varphi|^2 = 0$, pois $\Delta = -\varphi^2 < 0$. Suponha agora que $|\nabla\varphi|^2 \neq 0$. Vamos calcular o raio da h-geodésica que passa através de $P = (u, v, \varphi(u, v))$ ortogonal a S nesse ponto. A dita geodésica está contida no plano Σ que contem o vetor normal em P , η e é perpendicular ao plano $x_3 = 0$, isto é, o gerado pelas direções unitárias e_1 e e_3 onde e_3 é o vetor canônico $(0, 0, 1)$ e e_1 é a projeção (normalizada) de η em $\partial\mathbb{R}_+^3$. Daí, tomando $\eta = (-\varphi_u, -\varphi_v, 1)$, temos $e_1 = \frac{\pi(\eta)}{\|\pi(\eta)\|} = \frac{(-\varphi_u, -\varphi_v, 0)}{|\nabla\varphi|}$.

Assim, podemos notar em Σ , $\eta = |\nabla\varphi|e_1 + e_3$. Rotacionando este vetor $\pi/2$ radianos, obtemos o vetor auxiliar

$$\tilde{\eta} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\nabla\varphi| \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ |\nabla\varphi| \end{bmatrix} = -e_1 + |\nabla\varphi|e_3,$$

ou, em termos da base canônica,

$$\tilde{\eta} = \left(\frac{\varphi_u}{|\nabla\varphi|}, \frac{\varphi_v}{|\nabla\varphi|}, |\nabla\varphi| \right).$$

O centro σ da h-geodésica procurada está na interseção da reta $\alpha(t) = P + t\tilde{\eta}$ com $\partial\mathbb{R}_+^3$, logo,

$$\sigma = (u, v, \varphi) + t_0 \left(\frac{\varphi_u}{|\nabla\varphi|}, \frac{\varphi_v}{|\nabla\varphi|}, |\nabla\varphi| \right),$$

tal que $t_0|\nabla\varphi| + \varphi = 0$, donde $t_0 = -\varphi/|\nabla\varphi|$ e assim

$$\sigma = (u, v, \varphi) - \frac{\varphi}{|\nabla\varphi|} \left(\frac{\varphi_u}{|\nabla\varphi|}, \frac{\varphi_v}{|\nabla\varphi|}, |\nabla\varphi| \right) = \left(u - \frac{\varphi\varphi_u}{|\nabla\varphi|^2}, v - \frac{\varphi\varphi_v}{|\nabla\varphi|^2}, 0 \right). \quad (2-8)$$

O raio ρ é a distancia (euclidiana) entre P e σ , isto é,

$$\begin{aligned}
 \rho &= \left| (u, v, \varphi) - \left(u - \frac{\varphi\varphi_u}{|\nabla\varphi|^2}, v - \frac{\varphi\varphi_v}{|\nabla\varphi|^2}, 0 \right) \right| \\
 &= \left(\frac{\varphi^2\varphi_u^2}{|\nabla\varphi|^4} + \frac{\varphi^2\varphi_v^2}{|\nabla\varphi|^4} + \varphi^2 \right)^{1/2} \\
 &= \varphi \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{|\nabla\varphi|^4} + 1 \right)^{1/2} \\
 &= \frac{\varphi\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}{|\nabla\varphi|}
 \end{aligned} \tag{2-9}$$

Com isto, $\rho = 1 \Leftrightarrow \varphi^2(1+|\nabla\varphi|^2) = |\nabla\varphi|^2$, donde $\varphi^2(1+|\nabla\varphi|^2) - |\nabla\varphi|^2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$, e φ é parabólica. Analogamente, $\rho > 1 \Leftrightarrow \varphi^2(1+|\nabla\varphi|^2) - |\nabla\varphi|^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$, pois $-(1+|\nabla\varphi|^2)$ é sempre negativo, e assim φ é hiperbólica. Finalmente vemos também que $\rho < 1 \Leftrightarrow \varphi^2(1+|\nabla\varphi|^2) - |\nabla\varphi|^2 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$ e, neste caso, φ é elíptica, com o que conclui a demonstração. \square

Note que, dependendo da função φ , ela pode ser de diferentes tipos (elíptica, hiperbólica ou parabólica) dependendo do domínio onde seja estudada, de igual maneira, como será comentado no capítulo 4, podemos encontrar superfícies isocurvadas que mudam também a sua classificação em diferentes pontos.

2.2 Invariância das superfícies isocurvadas

No estudo clássico da geometria de superfícies é conhecido que, em grande parte dos casos, as propriedades e informações relevantes de uma superfície S podem ser herdadas por superfícies que são resultado de uma ou varias transformações (translações, rotações, etc.) da superfície original. Nos diferentes modelos da métrica hiperbólica, estas transformações podem afetar de maneira negativa as curvaturas e propriedades das superfícies isocurvadas, pois as translações verticais ou rotações afetam diretamente a coordenada x_3 e, com isto, a relação entre curvaturas gaussianas e médias, resultando na perda das propriedades que são objetivo principal do nosso estudo. Porém, como veremos adiante, certas relações menos intuitivas entre superfícies, como o conceito de *paralelismo hiperbólico* ou as *congruências geodésicas* podem preservar ou inclusive dotar as novas superfícies da propriedade de isocurvatura desejada. Definimos a seguir estes dois conceitos usando o modelo hiperbólico de Minkowski, $(\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4)$. Um estudo mais completo destas relações em geometrias não euclidianas pode ser encontrado em [21].

Em termos gerais, uma congruência geodésica num espaço tridimensional M de curvatura seccional constante, é uma família a 2-parâmetros de geodésicas em M , isto é,

sob certas condições, uma aplicação que associa, a cada ponto de uma subvariedade N de M uma geodésica de M . Localmente uma congruência geodésica em $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ é dada por

$$\cosh(\lambda)X(u, v) + \sinh(\lambda)\xi(u, v),$$

onde $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ é uma inclusão isométrica e ξ é um campo vetorial unitário em \mathbb{H}^3 .

Definição 2.2 *Seja $S \in \mathbb{H}^3$ uma superfície orientável, e seja N um campo normal em S . Dizemos que uma superfície S^t é **h-paralela** a S se existe uma congruência de geodésicas entre S e S^t tal que a distância entre pontos correspondentes é constante, isto é, para cada $p \in S$ temos $p^t = \cosh(t)p + \sinh(t)N$, onde $t \neq 0$ é uma constante real. Dizemos que S e S^t são **superfícies h-paralelas a uma distância t***

Embora as métricas euclidiana e hiperbólica tenham a mesma relevância na definição de superfícies isocurvadas, a seguinte propriedade sugere que essas superfícies podem ter uma descrição geométrica alternativa unicamente em termos da geometria hiperbólica.

Teorema 2.3 *Seja S uma superfície isocurvada e S^t a superfície h-paralela à distância t . Se S^t é suave, então é também uma superfície isocurvada.*

Prova. A equação 2-3 que define as superfícies isocurvadas, pode ser readaptada da seguinte maneira: Por definição, $K_h = K_e$, logo $K_{ext} = K_h + 1 = K_e + 1$, assim

$$\begin{aligned} K_h + 1 - x_3^2 K_e - 2H_e x_3 n_3 - n_3^2 = 0 &\Leftrightarrow K_h + 1 - x_3^2 K_e - x_3^2 - 2H_e x_3 n_3 - n_3^2 + x_3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow K_{ext}(1 - x_3^2) - 2H_e x_3 n_3 - n_3^2 + x_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (2-10)$$

mas $H_h = x_3 H_e + n_3$, donde $H_e = \frac{H_h - n_3}{x_3}$, e assim, (2-10) é equivalente a

$$\begin{aligned} K_{ext}(1 - x_3^2) - 2\frac{H_h - n_3}{x_3} x_3 n_3 - n_3^2 + x_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow K_{ext}(1 - x_3) - 2H_h n_3 + n_3^2 + x_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

Portanto, basta provar que se (2-11) vale para S , então

$$K_{ext}^t(1 - (x_3^t)^2) - 2H_h^t n_3^t + (n_3^t)^2 + (x_3^t)^2 = 0 \quad (2-12)$$

se cumpre para S^t , onde as quantidades com superíndice t são relativas à superfície S^t . Para isto, é conveniente começar por reescrever S e S^t no modelo do hiperboloide $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ para obter assim expressões mais manejáveis no modelo do semi-espço superior.

Sejam $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ o vetor posição e o campo normal de S no modelo do hiperboloide de \mathbb{H}^3 . Então, a superfície paralela S^t , neste modelo, tem vetor posição e campo vetorial normal unitário dados por [Ver [21], p. 23-26]

$$P^t = \cosh(t)P + \sinh(t)\eta \quad \text{e} \quad \eta^t = \sinh(t)P + \cosh(t)\eta. \quad (2-13)$$

Agora, considere-se a aplicação $\phi : \mathbb{L}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$

$$\phi(u_1, u_2, u_3, u_4) = \left(\frac{u_2}{u_1 - u_4}, \frac{u_3}{u_1 - u_4}, \frac{1}{u_1 - u_4} \right)$$

que aplica a folha superior do hiperboloide $-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = -1$ sobre o semi-espaço superior. Usando ϕ e 2-13, vemos que a terceira coordenada e o vetor normal euclidiano de S e S^t estão dados por

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{p_1 - p_4}, & x_3^t &= \frac{1}{P_1^t - P_4^t} \\ & & &= \frac{1}{cP_1 + s\eta_1 - cP_4 + s\eta_4} \\ & & &= \frac{1}{c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)} \end{aligned} \quad (2-14)$$

e

$$n_3 = -\frac{\eta_1 - \eta_4}{P_1 - P_4}, \quad n_3^t = -\frac{s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4)}{c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)} \quad (2-15)$$

onde $c = \cosh t$ e $s = \sinh t$.

Usando 2-14 e 2-15 podemos ver que 2-11 é equivalente à expressão

$$K_{ext}((P_1 - P_4)^2 - 1) + 2H_h(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4) + (\eta_1 - \eta_4)^2 + 1 = 0. \quad (2-16)$$

Vamos também precisar das seguintes igualdades (as quais podem se encontrar em [21]), que relacionam a curvatura gaussiana e média de S com as da superfície h-paralela S^t .

$$K_h^t = \frac{K_h}{\cosh 2t - \sinh 2t H_h + \sinh^2 t K_h}, \quad (2-17)$$

$$H_h^t = \frac{-\sinh 2t + \cosh 2t H_h - \sinh t \cosh t K_h}{\cosh 2t - \sinh 2t H_h + \sinh^2 t K_h}. \quad (2-18)$$

Podemos adaptar 2-17 e 2-18 usando as identidades elementares da trigonometria hiperbólica e novamente o fato de $K_{ext} - 1 = K_h$ e $K_{ext}^t - 1 = K_h^t$, donde, retomando a

notação de 2-14 e 2-15,

$$\begin{aligned}
K_{ext}^t &= \frac{k_{ext} - 1}{c^2 + s^2 - 2scH_h + s^2(k_{ext} - 1)} + 1 \\
&= \frac{k_{ext} - 1 + c^2 + s^2 - 2scH_h + s^2(k_{ext} - 1)}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2} \\
&= \frac{(s^2 + 1)(k_{ext} - 1) + c^2 + s^2 - 2scH_h}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2} \\
&= \frac{c^2k_{ext} - 2scH_h + s^2}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2}
\end{aligned} \tag{2-19}$$

e

$$\begin{aligned}
H_h^t &= \frac{(c^2 + s^2)H_h - 2sc - sc(k_{ext} - 1)}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2} \\
&= \frac{(c^2 + s^2)H_h - 2sc - sck_{ext} - sc}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2} \\
&= \frac{(c^2 + s^2)H_h - sc(k_{ext} + 1)}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2}.
\end{aligned} \tag{2-20}$$

Substituindo 2-19 e 2-20 em 2-12 obtemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{c^2k_{ext} - 2scH_h + s^2}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2} \left(1 - \left(\frac{1}{c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)} \right)^2 \right) \\
&+ 2 \frac{(c^2 + s^2)H_h - sc(k_{ext} + 1)}{s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2} \frac{s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4)}{c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)} + \left(\frac{s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4)}{c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)} \right)^2 \\
&+ \left(\frac{1}{c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)} \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando esta última igualdade por $(c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4))^2 (s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2)$ temos

$$\begin{aligned}
&(c^2k_{ext} - 2scH_h + s^2)[(c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4))^2 - 1] \\
&+ 2((c^2 + s^2)H_h - sc(k_{ext} + 1))(s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4))(c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)) \\
&+ (s^2k_{ext} - 2scH_h + c^2)[(s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4))^2 + 1] = 0.
\end{aligned}$$

Expandindo completamente esta expressão teremos

$$\begin{aligned}
&K_{ext}[c^2(c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4))^2 - c^2 - 2s^2c^2(P_1 - P_4)^2 - 2s^3c(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4) \\
&- 2sc^3(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4) - 2s^2c^2(\eta_1 - \eta_4)^2 + s^2(s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4))^2 + s^2] \\
&+ 2H_h[(c^2 + s^2)(s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4))(c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4)) - sc(c(P_1 - P_4) \\
&+ s(\eta_1 - \eta_4))^2 + sc - sc(s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4))^2 - sc] \\
&+ s^2(c(P_1 - P_4) + s(\eta_1 - \eta_4))^2 - s^2 - 2sc[sc(P_1 - P_4)^2 + s^2(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4) \\
&+ c^2(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4) + sc(\eta_1 - \eta_4)^2] + c^2(s(P_1 - P_4) + c(\eta_1 - \eta_4))^2 + c^2 = 0,
\end{aligned}$$

fatorando a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} & K_{ext}[c^4(P_1 - P_4)^2 + s^4(P_1 - P_4) - 2s^2c^2(P_1 - P_4)^2 + s^2 - c^2] \\ & + 2H_h[c^4(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4) + s^4(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4) - 2s^2c^2(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4)] \\ & + (c^4 - 2s^2c^2 + s^4)(\eta_1 - \eta_4)^2 + c^2 - s^2 = 0, \end{aligned}$$

donde finalmente

$$\begin{aligned} & K_{ext}[(c^2 - s^2)^2(P_1 - P_4)^2 - c^2 + s^2] + 2H_h[((c^2 - s^2)^2)(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4)] \\ & + (c^2 - s^2)^2(\eta_1 - \eta_4)^2 + c^2 - s^2 = 0. \end{aligned}$$

Mas $c^2 - s^2 = \cosh t^2 - \sinh t^2 = 1$, donde,

$$\begin{aligned} & K_{ext}^t(1 - (x_3^t)^2) - 2H_h^t n_3^t + (n_3^t)^2 + (x_3^t)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow K_{ext}[(P_1 - P_4)^2 - 1] + 2H_h[(P_1 - P_4)(\eta_1 - \eta_4)] + (\eta_1 - \eta_4)2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Isto é, S^t é uma superfície isocurvada se, e somente se, S é isocurvada. \square

A família de cones vista na seção 1, Fig. 1.1 (a), é um exemplo simples de uma família de superfícies isocurvadas h-paralelas.

Construção de superfícies isocurvadas

Com as ferramentas e propriedades estabelecidas até agora, encontramos-nos ante um dos principais objetivos do nosso estudo, a construção de métodos geométricos explícitos para encontrar famílias de exemplos não triviais de superfícies isocurvadas. Baseados na classificação dada na seção 2.1, mostraremos neste capítulo métodos para construir infinitos exemplos de superfícies isocurvadas elípticas e hiperbólicas (se desconhece ainda um método geral para a construção de exemplos de superfícies isocurvadas parabólicas) e, no capítulo seguinte, construiremos alguns exemplos de maneira explícita.

Nos métodos a seguir retomaremos o conceito de congruência de geodésicas já mencionado na seção 2.2, no sentido de associar a cada ponto de uma superfície Σ uma família de geodésicas C_Σ que pode ter associada uma superfície isocurvada como superfície ortogonal. Como mostrará o teorema 3.2 e 3.4, o elemento base para a congruência no nosso método resulta ser uma superfície simplesmente conexa e mínima em \mathbb{R}^3 para o caso das isocurvadas elípticas, ou mínima do tipo tempo (*timelike*) em \mathbb{L}^3 para o caso das superfícies isocurvadas hiperbólicas.

3.1 Superfícies isocurvadas elípticas

Lembrando que as geodésicas em \mathbb{H}^3 no modelo do semi-espço superior são representadas ou por círculos ortogonais ao plano $x_3 = 0$ (com centro contido também neste plano) ou por linhas verticais em \mathbb{R}_+^3 , começaremos por definir, desde uma superfície qualquer Σ simplesmente conexa em \mathbb{R}^3 , uma congruência de h-geodésicas C_Σ cujos elementos serão também representados por círculos ou semi-retas geodésicas de \mathbb{H}^3 .

Definiremos a congruência C_Σ para as h-geodésicas que são semicírculos verticais, o caso das linhas verticais pode ser tratado como um caso limite. Assim, de agora em diante, assumiremos que para todo $p \in \Sigma$ o plano tangente $T_p\Sigma$ é não horizontal. Como foi visto na demonstração da proposição 2.1, um círculo ortogonal ao plano $x_3 = 0$ é determinado de maneira única pelo seu centro σ , que pertence ao plano, seu raio R e um vetor horizontal e_1 (no sentido euclidiano) que, juntamente com $e_3 = (0, 0, 1)$, definem o plano vertical onde o círculo está contido. Com isto em mente, definimos C_Σ como segue.

Seja $\Pi_{12} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \partial\mathbb{R}_+^3$ a projeção natural ortogonal sobre o plano $x_3 = 0$, $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a rotação positiva por $\pi/2$ radianos também no plano $x_3 = 0$ e $N = (n_1, n_2, n_3)$ um campo vetorial normal e unitário sobre Σ .

Para cada $p \in \Sigma$ definimos o centro do círculo como

$$\sigma(p) = \Pi_{12}(p) \quad (3-1)$$

a direção e_1 como

$$e_1(p) = \frac{J(\Pi_{12}(N(p)))}{|\Pi_{12}(N(p))|} \quad (3-2)$$

e o raio da geodésica como

$$R(p) = \frac{1}{|\Pi_{12}(N(p))|}. \quad (3-3)$$

Com isto, fica completamente definida a congruência de h-geodésicas aos parâmetros p e t , dada por

$$\lambda(p, t) = \sigma(p) + R(p)(\cos t e_1(p) + \sin t e_3), \quad (3-4)$$

para $p \in \Sigma$ e $t \in (0, \pi)$. É natural perguntarmos agora, sob quais condições iniciais em Σ a nossa congruência de h-geodésicas C_Σ admite uma superfície ortogonal.

Se a existência de uma distribuição suave de planos associada a C_Σ , de modo que tais planos forem ortogonais as h-geodésicas de C_Σ , for previamente garantida, é imediato pensar em utilizar uma versão geométrica do teorema de Frobenius (Ver [23], [1]) para verificar as condições de existência de superfícies integrais desta distribuição. Porém, embora pode ser mais complicado, é também mais interessante considerar um caso mais geral no qual a congruência C_Σ não necessariamente define ou tem associada uma distribuição suave de planos. Com isto, como veremos mas adiante, é possível considerar auto-interseções e singularidades nas superfícies isocurvadas resultantes que são o objeto do nosso método.

Seguindo esta ideia, procuramos pelo cumprimento de uma condição mais fraca que a existência da distribuição suave de planos, propriamente dito, pela existência de uma aplicação diferenciável $Y : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, dada por

$$Y = \sigma(p) + R(p)[\cos \theta e_1(p) + \sin \theta e_3], \quad (3-5)$$

com $\sigma(p)$, $e_1(p)$ e $R(p)$ definidos como em 3-1, 3-2 e 3-3, respectivamente, e onde $\theta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável desconhecida tal que para cada ponto $p \in \Sigma$ onde Y é imersão, o plano tangente a Y , em $Y(p)$, é ortogonal à geodésica de C_Σ associada a p ($\lambda(p, t)$). Se Y cumpre de fato esta última condição ($\lambda(p, t)$ ortogonal a Y em $Y(p)$), diremos que Y tem a *propriedade de ortogonalidade*.

A condição geométrica acima mencionada pode ser reformulada em termos de um sistema de Frobenius para estabelecer a existência da função desconhecida θ . A seguinte proposição mostra que, salvo um caso limite, a função θ existe se, e somente se, Σ é uma superfície mínima.

Teorema 3.1 *Seja Σ uma superfície simplesmente conexa orientada no semi-espaço superior tal que para todo $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ é não horizontal. A função θ , que aparece na expressão da aplicação Y dada por 3-5 e tal que Y tem a propriedade ortogonal, existe se e somente se Σ é uma superfície mínima ou um cilindro vertical sobre uma curva plana contida no plano $\partial\mathbb{R}_+^3$.*

A demonstração deste teorema pode parecer um pouco longa e, para não perder a ideia da mesma, será dividida em três partes. Primeiro vamos procurar por um sistema que estabeleça uma condição de integrabilidade para nossa família de h-geodésicas, isto é, uma condição para a existência de uma superfície ortogonal a C_Σ , com isto, vamos trabalhar dois casos: primeiro, os pontos em Σ onde $T_p\Sigma$ é não vertical e a superfície pode ser tratada localmente como o gráfico de uma função diferenciável $\Psi(u, v)$, e a seguir, com uma parametrização geral, trabalharemos no caso em que $T_p\Sigma$ é vertical, o que prova a parte dos cilindros verticais mencionada no enunciado do teorema e completa a demonstração.

Prova. Pela definição, Y tem a propriedade de ortogonalidade, se, e somente se, o plano tangente em cada ponto $p \in \Sigma$ e ortogonal ao vetor tangente da geodésica $\lambda(p, t)$, λ' , no ponto de interseção,

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\frac{d}{d\theta}(\sigma + R[\cos\theta e_1 + \sin\theta e_3])}{\left|\frac{d}{d\theta}\sigma + R[\cos\theta e_1 + \sin\theta e_3]\right|} \\ &= \frac{R[-d\theta \sin\theta e_1 + d\theta \cos\theta e_3]}{\left|R[-d\theta \sin\theta e_1 + d\theta \cos\theta e_3]\right|} \\ &= \frac{Rd\theta(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3)}{\sqrt{R^2(d\theta)^2[\sin^2\theta + \cos^2\theta]}} \\ &= -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3, \end{aligned}$$

donde $\langle dY, -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3 \rangle = 0$. Trabalhando com uma parametrização qualquer em coordenadas u e v , temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Y_u, -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3 \rangle \\ &= \langle \sigma_u + R_u(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_3) + R(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_3)_u, -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3 \rangle \\ &= \langle \sigma_u + R_u \cos\theta e_1 + R_u \sin\theta e_3 - R\theta_u \sin\theta e_1 + R \cos\theta (e_1)_u \\ &\quad + R\theta_u \cos\theta e_3 + R \sin\theta (e_3)_u, -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3 \rangle. \end{aligned} \tag{3-6}$$

Para simplificar a expressão obtida acima podemos fazer uso dos seguintes fatos: com e_3 constante, temos que $(e_3)_u = 0$. Além disso, a terceira coordenada do vetor (e_1) é nula, logo $\langle (e_1)_u, e_3 \rangle = 0$. Por outro lado, $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ implica que $2\langle (e_1)_u, e_1 \rangle = 0$ e $\langle (e_1)_u, e_1 \rangle = 0$. Em coordenadas canônicas, $\sigma_u = (1, 0, 0)$, logo $\langle \sigma_u, e_3 \rangle = 0$. Finalmente, lembrando que $\langle e_3, e_1 \rangle = 0$, de 3-6 obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \sigma_u + (R_u \cos \theta - R\theta_u \sin \theta)e_1 + R \cos \theta (e_1)_u + (R_u \sin \theta + R\theta_u \cos \theta)e_3, -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_3 \rangle \\
&= \langle \sigma_u, -\sin \theta e_1 \rangle + \langle \sigma_u, \cos \theta e_3 \rangle + \langle (R_u \cos \theta - R\theta_u \sin \theta)e_1, -\sin \theta e_1 \rangle \\
&\quad + \langle (R_u \cos \theta - R\theta_u \sin \theta)e_1, \cos \theta e_3 \rangle + \langle R \cos \theta (e_1)_u, -\sin \theta e_1 \rangle + \langle R \cos \theta (e_1)_u, \cos \theta e_3 \rangle \\
&\quad + \langle (R_u \sin \theta + R\theta_u \cos \theta)e_3, -\sin \theta e_1 \rangle + \langle (R_u \sin \theta + R\theta_u \cos \theta)e_3, \cos \theta e_3 \rangle \\
&= -\sin \theta \langle \sigma_u, e_1 \rangle + \cos \theta \langle \sigma_u, e_3 \rangle - \sin \theta (R_u \cos \theta - R\theta_u \sin \theta) \langle e_1, e_1 \rangle \\
&\quad + \cos \theta (R_u \cos \theta - R\theta_u \sin \theta) \langle e_1, e_3 \rangle - R \cos \theta \sin \theta \langle (e_1)_u, e_1 \rangle + R \cos^2 \theta \langle (e_1)_u, e_3 \rangle \\
&\quad - \sin \theta (R_u \sin \theta + R\theta_u \cos \theta) \langle e_3, e_1 \rangle + \cos \theta (R_u \sin \theta + R\theta_u \cos \theta) \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= -\sin \theta \langle \sigma_u, e_1 \rangle - R_u \sin \theta \cos \theta + R\theta_u \sin^2 \theta + R_u \sin \theta \cos \theta + R\theta_u \cos^2 \theta \\
&= R\theta_u - \sin \theta \langle \sigma_u, e_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{3-7}$$

Procedendo de maneira análoga para v , temos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle Y_v, -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_3 \rangle \\
&= \langle \sigma_v + R_v(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_3) + R(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_3)_v, -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_3 \rangle \\
&= R\theta_v - \sin \theta \langle \sigma_v, e_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{3-8}$$

De 3-7 e 3-8 podemos concluir que

$$\theta_u = \frac{\sin \theta}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle \text{ e } \theta_v = \frac{\sin \theta}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle. \tag{3-9}$$

A fim de expressarmos a condição de integrabilidade em termos das derivadas cruzadas isoladas, faremos a mudança de variável $\sin \theta = 1/\cosh \beta$, assim $\cos \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 \beta} = \tanh \beta$. Deste fato, e usando 3-9, temos

$$\begin{aligned}
\theta_u \cos \theta &= -\frac{\sinh \beta \beta_u}{\cosh^2 \beta} \Rightarrow \left(\frac{\langle \sigma_u, e_1 \rangle}{R \cosh \beta} \right) \cos \theta = -\frac{\tanh \beta \beta_u}{\cosh \beta} \Rightarrow \beta_u = -\frac{\langle \sigma_u, e_1 \rangle}{R}, \\
\theta_v \cos \theta &= -\frac{\sinh \beta \beta_v}{\cosh^2 \beta} \Rightarrow \left(\frac{\langle \sigma_v, e_1 \rangle}{R \cosh \beta} \right) \cos \theta = -\frac{\tanh \beta \beta_v}{\cosh \beta} \Rightarrow \beta_v = -\frac{\langle \sigma_v, e_1 \rangle}{R}.
\end{aligned}$$

Assim, a condição de Frobenius para a integrabilidade é dada por

$$\left(\frac{\langle \sigma_u, e_1 \rangle}{R} \right)_v = \left(\frac{\langle \sigma_v, e_1 \rangle}{R} \right)_u. \quad (3-10)$$

Como foi dito anteriormente, trabalharemos agora os dois casos possíveis para $p \in \Sigma$:

Caso 1. Suponha $T_p \Sigma$ não vertical, assim, Σ pode ser representada localmente como o gráfico de uma função diferenciável ψ definida sobre um domínio $\Omega \subset \partial \mathbb{R}_+^3$ e uma carta local de Σ é dada por $X(u, v) = (u, v, \psi(u, v))$. Além disso, a função θ pode ser escrita novamente nestas coordenadas locais como uma função $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Seguindo nossa construção geométrica dada em 3-1, 3-2 e 3-3, temos explicitamente

$$\sigma(p) = \Pi_{12}(p) = (u, v, 0), \quad (3-11)$$

$$e_1(p) = \frac{J(\Pi_{12}(N(p)))}{|\Pi_{12}(N(p))|} = \frac{(-\psi_v, \psi_u, 0)}{|\nabla \psi|}, \quad (3-12)$$

e

$$R(p) = \frac{1}{|\Pi_{12}(N(p))|} = \frac{|(-\psi_v, \psi_u, 1)|}{|(-\psi_v, \psi_u, 0)|} = \frac{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}}{|\nabla \psi|}, \quad (3-13)$$

daí, $\langle \sigma_u, e_1 \rangle = -\psi_v/|\nabla \psi|$, $\langle \sigma_v, e_1 \rangle = \psi_u/|\nabla \psi|$, e assim

$$\begin{aligned} \left(\frac{\langle \sigma_u, e_1 \rangle}{R} \right)_v &= \left(\frac{-\psi_v}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}} \right)_v \\ &= \frac{-\psi_{vv}(1 + |\nabla \psi|^2) + \psi_v(\psi_u \psi_{uv} + \psi_v \psi_{vv})}{(1 + |\nabla \psi|^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3-14)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\langle \sigma_v, e_1 \rangle}{R} \right)_u &= \left(\frac{\psi_u}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}} \right)_u \\ &= \frac{\psi_{uu}(1 + |\nabla \psi|^2) - \psi_u(\psi_u \psi_{uu} + \psi_v \psi_{uv})}{(1 + |\nabla \psi|^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (3-15)$$

donde 3-10 é garantido se, e somente se,

$$\begin{aligned} \psi_{uu}(1 + |\nabla \psi|^2) - \psi_u(\psi_u \psi_{uu} + \psi_v \psi_{uv}) &= -\psi_{vv}(1 + |\nabla \psi|^2) + \psi_v(\psi_u \psi_{uv} + \psi_v \psi_{vv}) \\ \Leftrightarrow (\psi_{uu} + \psi_{vv})(1 + \psi_u^2 + \psi_v^2) - \psi_u^2 \psi_{uu} - \psi_u \psi_v \psi_{uv} - \psi_v \psi_u \psi_{uv} - \psi_v^2 \psi_{vv} &= 0 \\ \Leftrightarrow \psi_{uu}(1 + \psi_v^2) - 2\psi_u \psi_v \psi_{uv} + \psi_{vv}(1 + \psi_u^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3-16)$$

A igualdade final em 3-16 caracteriza uma superfície mínima vista como gráfico de uma

função diferenciável ψ (ver, por exemplo [7] Cap. 3). Isto é, $\theta(u, v)$ existe se, e somente se, Σ é uma superfície mínima.

Caso 2. Pontos nos quais $T_p\Sigma$ é vertical. Seja \bar{X} uma parametrização geral de Σ dada por

$$\bar{X} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Sabemos que ter $T_p\Sigma$ vertical implica que o vetor normal a Σ em p é horizontal. Com respeito à parametrização \bar{X} dada acima, o campo normal N é dado por

$$N = \frac{\bar{X}_u \times \bar{X}_v}{|\bar{X}_u \times \bar{X}_v|} = \frac{(y_u z_u - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)}{|(y_u z_u - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)|} \quad (3-17)$$

e assim, N será horizontal nos pontos nos quais $x_u y_v - y_u x_v = 0$. É claro também que o raio das nossas h-geodésicas será igual a 1 nesses pontos. Com isto, a nossa condição de integrabilidade de Frobenius (nos pontos nos quais N é horizontal) é dada por

$$(\langle \sigma_u, e_1 \rangle)_v = (\langle \sigma_v, e_1 \rangle)_u. \quad (3-18)$$

Agora, com a definição de \bar{X} , $\sigma = (x, y, 0)$, usando a informação em 3-17 temos que

$$\begin{aligned} (\langle \sigma_u, e_1 \rangle)_v &= \left(\left\langle (x_u, y_u, 0), \frac{(y_u z_u - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, 0)}{|y_u z_u - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, 0|} \right\rangle \right)_v \\ &= \left(\frac{x_u^2 z_v - x_u x_v z_u + y_u^2 z_v - y_u y_v z_u}{\sqrt{z_v^2 (x_u^2 + y_u^2) + z_u^2 (x_v^2 + y_v^2) - 2z_u z_v (x_u x_v + y_u y_v)}} \right)_v, \end{aligned} \quad (3-19)$$

e analogamente

$$(\langle \sigma_v, e_1 \rangle)_u = \left(\frac{-x_v^2 z_u + x_u x_v z_v - y_v^2 z_u + y_u y_v z_v}{\sqrt{z_v^2 (x_u^2 + y_u^2) + z_u^2 (x_v^2 + y_v^2) - 2z_u z_v (x_u x_v + y_u y_v)}} \right)_u. \quad (3-20)$$

Ao calcular as respectivas derivadas, o resultado é uma série de extensas equações, porém, fatorando de maneira apropriada, e utilizando a igualdade $x_u y_v - y_u x_v = 0$, o resultado é

obtido de maneira direta:

$$\begin{aligned}
& c[(\langle \sigma_u, e_1 \rangle)_v - (\langle \sigma_v, e_1 \rangle)_u] \\
&= \left[(2x_u x_{uv} z_v + x_u^2 z_{vv} - x_{uv} x_v z_u - x_u x_{vv} z_u - x_u x_v z_{uv} + 2y_u y_{uv} z_v + y_u^2 z_{vv} \right. \\
&\quad - y_{uv} y_v z_u - y_u y_{vv} z_u - y_u y_v z_{uv}) (z_v^2 (x_u^2 + y_u^2) + z_u^2 (x_v^2 + y_v^2) - 2z_u z_v (x_u x_v + y_u y_v)) \\
&\quad - (x_u^2 z_v - x_u x_v z_u + y_u^2 z_v - y_u y_v z_u) (z_v z_{vv} (x_u^2 + y_u^2) + z_v^2 (x_u x_{uv} + y_u y_{uv}) \\
&\quad + z_u z_{uv} (x_v^2 + y_v^2) + z_u^2 (x_v x_{vv} + y_v y_{vv}) - z_{vv} z_u (x_u x_v + y_u y_v) - z_v z_{uv} (x_u x_v + y_u y_v) \\
&\quad \left. - z_u z_v (x_{uv} x_v + x_u x_{vv} + y_v y_{uv} + y_u y_{vv})) \right] - \left[(-2x_v x_{uv} z_u - x_v^2 z_{uu} + x_{uv} x_v z_v \right. \\
&\quad + x_u x_{uv} z_v + x_u x_v z_{uv} - 2y_v y_{uv} z_u - y_v^2 z_{uu} + y_{uv} y_u z_v + y_v y_{uu} z_v + y_v y_u z_{uv}) \\
&\quad (z_v^2 (x_u^2 + y_u^2) + z_u^2 (x_v^2 + y_v^2) - 2z_u z_v (x_u x_v + y_u y_v)) - (-x_v^2 z_u + x_u x_v z_v - y_v^2 z_u \\
&\quad + y_u y_v z_v) (z_v z_{uv} (x_u^2 + y_u^2) + z_v^2 (x_u x_{uu} + y_u y_{uu}) + z_u z_{uu} (x_v^2 + y_v^2) + z_u^2 (x_v x_{uv} + y_v y_{uv}) \\
&\quad \left. - z_{uv} z_u (x_u x_v + y_u y_v) - z_v z_{uu} (x_u x_v + y_u y_v) - z_u z_v (x_{uu} x_v + x_u x_{uv} + y_v y_{uu} + y_u y_{uv})) \right] \\
&= -z_v^3 [y_u^2 x_{uu} x_v - y_u x_u y_{uu} x_v - y_u x_u x_{uu} y_v + y_{uu} x_u^2 y_v] + z_v^2 [2y_u^2 x_{uv} x_v z_u - y_u y_{uu} x_v^2 z_u \\
&\quad + y_u x_{uu} y_v x_v z_u - 2x_u y_{uv} x_v y_u z_u - 2x_u y_v x_{uv} y_u z_u + x_u y_v y_{uu} x_v z_u - x_u x_{uu} y_v^2 z_u \\
&\quad + 2x_u^2 y_{uv} y_v z_u + y_u^2 z_{uu} x_v^2 - 2y_u z_{uu} x_u y_v x_v + z_{uu} x_u^2 y_v^2] - z_v z_u [y_u^2 x_{vv} x_v z_u - y_u y_{vv} x_u x_v z_u \\
&\quad - 2y_u y_{uv} x_v^2 z_u - y_u y_v x_u x_{vv} z_u + 2y_u y_v x_{uv} x_v z_u + y_{vv} x_u^2 y_v z_u + 2y_{uv} x_u y_v x_v z_u \\
&\quad - 2x_u y_v^2 x_{uv} z_u + 2z_{uv} y_u^2 x_v^2 - 4y_u z_{uv} x_u y_v x_v + 2z_{uv} x_u^2 y_v^2] - z_u^2 [z_u y_u x_v y_{vv} x_v - z_u y_u x_v x_{vv} y_v \\
&\quad - z_u x_u y_v y_{vv} x_v + z_u x_u x_{vv} y_v^2 - z_{vv} y_u^2 x_v^2 - 2y_u x_u y_v z_{vv} x_v + x_u^2 y_v^2 z_{vv}] \\
&= -z_v^3 [(y_u x_{uu} + x_u y_{uu}) (y_u x_v - x_u y_v)] \\
&\quad + z_v^2 [(2y_u x_{uv} z_u - y_{uu} x_v z_u + y_v z_u x_{uu} - 2x_u y_{uv} z_u) (y_u x_v - x_u y_v) + z_{uu} (y_u x_v - x_u y_v)^2] \\
&\quad - z_u z_v [(y_u x_{vv} z_u - y_{vv} x_u z_u - 2y_{uv} x_v z_u + 2y_v x_{uv} z_u) (y_u x_v - x_u y_v) + 2z_{uv} (y_u x_v - x_u y_v)^2] \\
&\quad - z_u^2 [z_u (y_{vv} x_v - x_{vv} y_v) (y_u x_v - x_u y_v) - z_{vv} (y_u x_v - x_u y_v)^2] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde c é o denominador das derivadas $(\langle \sigma_u, e_1 \rangle)_v$ e $(\langle \sigma_v, e_1 \rangle)_u$ que em virtude de 3-19 e 3-20 é o mesmo para as duas derivadas e é diferente de zero. Logo $(\langle \sigma_u, e_1 \rangle)_v - (\langle \sigma_v, e_1 \rangle)_u = 0$, concluindo assim que, para uma parametrização geral de Σ , a condição de integrabilidade é sempre cumprida nos pontos nos quais o vetor normal é horizontal. Logo θ existe sempre que Σ é um cilindro vertical sobre uma curva em $\partial \mathbb{R}_+^3$. \square

Do teorema 3.1 temos como conclusão que podemos partir de uma superfície mínima Σ e construir uma congruência de geodésicas C_Σ que admite superfícies ortogonais, mas ainda não foi estabelecido se estas superfícies ortogonais possuem alguma propriedade geométrica particular. Nesse sentido, em seguida mostramos um dos resultados principais do presente estudo, a saber, se a aplicação Y associada a C_Σ é uma imersão,

então $Y(\Sigma)$ é uma superfície isocurvada.

Para demonstrar este fato, partindo de uma superfície orientada imersa em \mathbb{R}_+^3 arbitrária S , se encontram as condições em S tais que seja ortogonal às h -geodésicas de C_Σ induzidas por uma superfície Σ através do método geométrico visto anteriormente. Com isto, se obtém o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *Seja S uma superfície imersa em \mathbb{R}_+^3 . Se S é ortogonal as h -geodésicas da congruência C_Σ induzida por uma superfície imersa e orientada Σ , então S é uma superfície isocurvada.*

Prova. Seja $p \in S$. Sem perda de generalidade podemos supor que o plano tangente em a S em p , $T_p S$ não é vertical. De fato, se tivéssemos $T_p S$ vertical, poderíamos substituir S pela superfície h -paralela S^t , para um t suficientemente pequeno S^t continuará sendo imersão, e o $T_{p^t} S^t$ será não vertical (pois segue o caminho da h -geodésica perpendicular a S em p , que é um semicírculo). Para o seguinte argumento, vamos supor também que $T_p S$ é não horizontal e trataremos deste caso como um caso limite no final da demonstração.

Em uma vizinhança do ponto p , a superfície S pode ser vista como o gráfico de uma função φ suave definida num domínio Ω no plano $x_3 = 0$. Usaremos u e v como coordenadas, denotando assim o gráfico como

$$Y(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)).$$

A superfície S é ortogonal à família de h -geodésicas C_Σ , logo, como foi estabelecido na prova da proposição 2.1, em cada ponto de $\varphi(\Omega)$ temos a direção e_1 , o centro σ e raio R da h -geodésica de C_Σ associada, dados por

$$e_1 = \frac{(-\varphi_u, -\varphi_v, 0)}{|\nabla\varphi|}, \quad (3-21)$$

$$\sigma = \left(u - \frac{\varphi\varphi_u}{|\nabla\varphi|^2}, v - \frac{\varphi\varphi_v}{|\nabla\varphi|^2}, 0 \right) \quad (3-22)$$

e

$$R = \frac{\varphi\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}}{|\nabla\varphi|}, \quad (3-23)$$

e assim, existe uma função diferenciável ψ definida em Ω tal que Σ é localmente parametrizada por uma aplicação X dada por

$$X(u, v) = \sigma(u, v) + \psi(u, v)e_3. \quad (3-24)$$

Seja N o campo normal a Σ e θ o ângulo entre N e o plano $x_3 = 0$. Da nossa construção geométrica, temos que a projeção de N sobre o plano $x_3 = 0$ é dada por $-J(e_1)$ e a relação

entre o ângulo θ e o raio é dada por $R = \frac{1}{\cos\theta}$ Donde

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} = \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}$$

e N pode ser escrito como

$$\begin{aligned} N &= -\cos\theta J(e_1) + \sin\theta e_3 \\ &= -\frac{1}{R}J(e_1) + \left(\frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R}\right) e_3. \end{aligned} \quad (3-25)$$

A ortogonalidade de N com respeito a Σ , $\langle dX, N \rangle = 0$, implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X_u, N \rangle \\ &= \left\langle \sigma_u + \psi_u e_3, -\frac{1}{R}J(e_1) + \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} e_3 \right\rangle \\ &= -\left\langle \sigma_u, \frac{1}{R}J(e_1) \right\rangle + \left\langle \sigma_u, \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} e_3 \right\rangle - \left\langle \psi_u e_3, \frac{1}{R}J(e_1) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \psi_u e_3, \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} e_3 \right\rangle, \end{aligned}$$

onde o segundo e terceiro termos são nulos, e portanto

$$\psi_u \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} - \frac{1}{R} \langle \sigma_u, J(e_1) \rangle = 0$$

e

$$\psi_u = \frac{\langle \sigma_u, J(e_1) \rangle}{\sqrt{R^2 - 1}}. \quad (3-26)$$

Da mesma forma,

$$0 = \langle X_v, N \rangle = \left\langle \sigma_v + \psi_v e_3, -\frac{1}{R}J(e_1) + \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} e_3 \right\rangle, \quad (3-27)$$

donde

$$\psi_v = \frac{\langle \sigma_v, J(e_1) \rangle}{\sqrt{R^2 - 1}} \quad (3-28)$$

e a condição de integrabilidade de Frobenius para esse sistema fica estabelecida pela igualdade

$$\left(\frac{\langle \sigma_u, J(e_1) \rangle}{\sqrt{R^2 - 1}} \right)_v - \left(\frac{\langle \sigma_v, J(e_1) \rangle}{\sqrt{R^2 - 1}} \right)_u = 0. \quad (3-29)$$

Para expressar 3-29 em termos da função ϕ , fazemos uso das equações 3-21, 3-22 e 3-23,

obtendo as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned}
Je_1 &= \frac{(\varphi_v, -\varphi_u, 0)}{|\nabla\varphi|}, \\
\sigma_u &= \left(1 - \frac{(\varphi_u^2 + \varphi\varphi_{uu})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_u(2\varphi_u\varphi_{uu} + 2\varphi_v\varphi_{uv})}{|\nabla\varphi|^4}, \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\varphi_u\varphi_v + \varphi\varphi_{uv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_v(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^4}, 0 \right), \\
\sigma_v &= \left(-\frac{(\varphi_v\varphi_u + \varphi\varphi_{uv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_u(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^4}, \right. \\
&\quad \left. 1 - \frac{(\varphi_v^2 + \varphi\varphi_{vv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_v(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^4}, 0 \right), \\
\sqrt{R^2 - 1} &= \sqrt{\frac{\varphi^2(1 + |\nabla\varphi|^2)}{|\nabla\varphi|^2} - 1} = \frac{\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla\varphi|^2) - |\nabla\varphi|^2}}{|\nabla\varphi|}.
\end{aligned} \tag{3-30}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle J(e_1), \sigma_u \rangle &= \left\langle \frac{(\varphi_v, -\varphi_u, 0)}{|\nabla\varphi|}, \left(1 - \frac{(\varphi_u^2 + \varphi\varphi_{uu})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_u(2\varphi_u\varphi_{uu} + 2\varphi_v\varphi_{uv})}{|\nabla\varphi|^4}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(\varphi_u\varphi_v + \varphi\varphi_{uv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_v(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^4}, 0 \right) \right\rangle \\
&= \frac{\varphi_v}{|\nabla\varphi|} - \frac{\varphi_v(\varphi_u^2 + \varphi\varphi_{uu})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_u\varphi_v(2\varphi_u\varphi_{uu} + 2\varphi_v\varphi_{uv})}{|\nabla\varphi|^5} \\
&\quad + \frac{\varphi_u(\varphi_u\varphi_v + \varphi\varphi_{uv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_u\varphi_v(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^5} \\
&= \frac{\varphi_v|\nabla\varphi|^4 - \varphi_v(\varphi_u^2 + \varphi\varphi_{uu})|\nabla\varphi|^2 + \varphi_u(\varphi_u\varphi_v + \varphi\varphi_{uv})}{|\nabla\varphi|^5} \\
&= \frac{\varphi_v^3 + \varphi_v\varphi_u^2 - \varphi\varphi_v\varphi_{uu} + \varphi\varphi_u\varphi_{uv}}{|\nabla\varphi|^3}, \\
\langle J(e_1), \sigma_v \rangle &= \left\langle \frac{(\varphi_v, -\varphi_u, 0)}{|\nabla\varphi|}, \left(-\frac{(\varphi_u\varphi_v + \varphi\varphi_{uv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_u(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^4}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 1 - \frac{(\varphi_v^2 + \varphi\varphi_{vv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_v(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^4}, 0 \right) \right\rangle \\
&= -\frac{\varphi_v(\varphi_u\varphi_v + \varphi\varphi_{uv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_v\varphi_u(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^5} \\
&\quad - \frac{\varphi_u}{|\nabla\varphi|} + \frac{\varphi_u(\varphi_v^2 + \varphi\varphi_{vv})|\nabla\varphi|^2 - \varphi\varphi_u\varphi_v(2\varphi_u\varphi_{uv} + 2\varphi_v\varphi_{vv})}{|\nabla\varphi|^5} \\
&= \frac{\varphi\varphi_u\varphi_{vv} - \varphi_u^3 - \varphi_u\varphi_v^2 - \varphi\varphi_v\varphi_{uv}}{|\nabla\varphi|^3}
\end{aligned}$$

donde obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned}\frac{\langle J(e_1), \sigma_u \rangle}{\sqrt{R^2 - 1}} &= \frac{\varphi_v^3 + \varphi_v \varphi_u^2 - \varphi \varphi_v \varphi_{uu} + \varphi \varphi_u \varphi_{uv}}{\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2 |\nabla \varphi|^2}}, \\ \frac{\langle J(e_1), \sigma_v \rangle}{\sqrt{R^2 - 1}} &= -\frac{\varphi_u^3 + \varphi_u \varphi_v^2 - \varphi \varphi_u \varphi_{vv} + \varphi \varphi_v \varphi_{uv}}{\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2 |\nabla \varphi|^2}}.\end{aligned}\quad (3-31)$$

Das expressões

$$\begin{aligned}(\varphi_v^3 + \varphi_v \varphi_u^2 - \varphi \varphi_v \varphi_{uu} + \varphi \varphi_u \varphi_{uv})_v &= \\ 3\varphi_v^2 \varphi_{vv} + \varphi_{vv} \varphi_u^2 + 3\varphi_u \varphi_v \varphi_{uv} + \varphi(\varphi_{uv}^2 + \varphi_u \varphi_{uvv}) - \varphi_v^2 \varphi_{uu} - \varphi(\varphi_{vv} \varphi_{uu} + \varphi_v \varphi_{uvv}), \\ \left(\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2 |\nabla \varphi|^2} \right)_v &= \\ \frac{\varphi \varphi_v (1 + |\nabla \varphi|^2) + (\varphi^2 - 1)(\varphi_u \varphi_{uv} + \varphi_v \varphi_{vv})}{\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2}} |\nabla \varphi|^2 + 2\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2} (\varphi_u \varphi_{uv} + \varphi_v \varphi_{vv}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_u^3 + \varphi_u \varphi_v^2 - \varphi \varphi_u \varphi_{vv} + \varphi \varphi_v \varphi_{uv})_u &= \\ 3\varphi_u^2 \varphi_{uu} + \varphi_{uu} \varphi_v^2 + 3\varphi_u \varphi_v \varphi_{uv} + \varphi(\varphi_{uv}^2 + \varphi_v \varphi_{uvv}) - \varphi_u^2 \varphi_{vv} - \varphi(\varphi_{uu} \varphi_{vv} + \varphi_u \varphi_{uvv}),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2 |\nabla \varphi|^2} \right)_u &= \\ \frac{\varphi \varphi_u (1 + |\nabla \varphi|^2) + (\varphi^2 - 1)(\varphi_u \varphi_{uu} + \varphi_v \varphi_{uv})}{\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2}} |\nabla \varphi|^2 + 2\sqrt{\varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2) - |\nabla \varphi|^2} (\varphi_u \varphi_{uu} + \varphi_v \varphi_{uv}),\end{aligned}$$

temos que a igualdade 3-29 é garantida se, e somente se,

$$(1 - \varphi^2) \frac{\varphi_{uu} \varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2}{|\nabla \varphi|^2 + 1} - \varphi \frac{\varphi_{vv}(\varphi_u^2 + 1) - 2\varphi_u \varphi_v \varphi_{uv} + \varphi_{uu}(\varphi_v^2 + 1)}{|\nabla \varphi|^2 + 1} + |\nabla \varphi|^2 = 0,$$

que coincide com a expressão 2-4 que caracteriza a superfície isocurvada. Logo a função ψ existe se, e somente se, S é uma superfície isocurvada. Foram então encontradas as condições necessárias para S ser de fato perpendicular às h-geodésicas de C_Σ , o fato de Σ ser imersão garante a existência da função ψ , com o que concluímos esta parte da demonstração.

Para finalizar, foi assumido para os argumentos acima que $T_p S$ fosse não horizontal, a fim de que pudéssemos tomar as h-geodésicas perpendiculares como semicírculos e dar sentido à aplicação X em 3-24. Suponhamos agora que $T_p S$ é horizontal. Estamos então diante dois casos possíveis, a saber, ou existe uma vizinhança U de p tal que, para todo $q \in U$, $T_q S$ é horizontal, ou p é tal que existe uma sequência de pontos p_n em S que converge a p tal que $T_{p_n} S$ é não horizontal para cada n .

No primeiro caso, a vizinhança U está contida num plano horizontal, o que implica que ela é de fato uma superfície isocurvada. No segundo caso, e pelo argumento principal desta demonstração, a condição de isocurvatura está garantida para todo ponto p_n , logo, por continuidade da curvatura Gaussiana, deve ser também satisfeita por p , assim, S é uma superfície isocurvada. \square

Observação 3.1 *Da equação 3-13, temos que $R(p) > 1$, logo, em virtude do teorema acima e a proposição 2.1 que classifica as superfícies isocurvadas, temos que as superfícies geradas pelo nosso método são, de fato, superfícies isocurvadas do tipo elíptico.*

3.2 Superfícies isocurvadas hiperbólicas

Uma pequena variação do método geométrico usado para construir superfícies isocurvadas elípticas partindo de uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 , irá nos permitir construir superfícies isocurvadas hiperbólicas a partir de superfícies mínimas tipo-tempo no espaço de Minkowski \mathbb{L}^3 , isto é (análogo á definição de \mathbb{L}^4 no capítulo 1), \mathbb{R}^3 com a métrica de Lorentz $ds_L^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$. Uma breve introdução aos elementos geométricos no espaço de Minkowski pode ser encontrada no Apêndice A e as referencias aí citadas.

Para uma superfície dada Σ , do tipo tempo, orientada imersa em \mathbb{L}^3 com campo normal unitário segundo a métrica de Minkowski, N , induzimos a congruência de h-geodésicas, C_Σ , como segue. Usando a nova métrica, definimos o centro σ e o plano vertical contendo o círculo exatamente como foi feito no início da seção 3.1, a única diferença está na escolha do raio: novamente consideramos o raio como a inversa do tamanho da projeção horizontal de N , mas, dado que agora usamos a métrica de \mathbb{L}^3 , o comprimento desta projeção é agora maior ou igual a 1 (ver eq. 3-35). Neste sentido a expressão de R muda e a função raio será agora menor ou igual a um, o que nos mostra que, pela proposição 2.1, obteremos de fato superfícies isocurvadas hiperbólicas.

Observação 3.2 *Os fatos estudados nesta seção são análogos aos estudados na seção 3.1, razão pela qual as demonstrações serão um pouco mais diretas. Alguns dos detalhes omitidos referentes à geometria no espaço de Lorentz-Minkowski podem ser encontrados no apêndice A.*

Explicitamente, os elementos que determinam a família de h-geodésicas C_Σ para uma superfície Σ de tipo-tempo dada como o gráfico $X(u, v) = (u, v, \psi(u, v))$ vem dados por:

$$N = \frac{X_u \times_L X_v}{|X_u \times_L X_v|_L} = \frac{(-\psi_u, -\psi_v, -1)}{|(-\psi_u, -\psi_v, -1)|_L} = \frac{(-\psi_u, -\psi_v, -1)}{(|\nabla\psi|^2 - 1)^{1/2}}, \quad (3-32)$$

note que, pelo fato de Σ ser de tipo-tempo, o campo N é de tipo-espaço, e assim $\langle N, N \rangle_L = |\nabla\psi|^2 - 1 > 0$. Por outra parte, tomando novamente J como a rotação horizontal por $\pi/2$ radianos, e Π_{12} a projeção sobre o plano horizontal $x_3 = 0$ temos

$$\sigma(p) = \Pi_{12}(p) = (u, v, 0), \quad (3-33)$$

$$e_1(p) = \frac{J(\Pi_{12}(N(p)))}{|\Pi_{12}(N(p))|} = \frac{(-\psi_v, \psi_u, 0)}{|\nabla\psi|}, \quad (3-34)$$

$$R(p) = \frac{1}{|\Pi_{12}(N(p))|} = \frac{\sqrt{|\nabla\psi|^2 - 1}}{|\nabla\psi|}. \quad (3-35)$$

Análogo à seção anterior, vamos procurar por uma aplicação diferenciável $Y : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ da forma

$$Y = \sigma + R(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_3), \quad (3-36)$$

onde σ , e_1 , e R são definidos por 3-33, 3-34 e 3-35 respectivamente e $\theta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é de novo uma função diferenciável desconhecida tal que, para cada ponto $p \in \Sigma$ onde Y é imersão, o plano tangente a Y em $Y(p)$ é ortogonal á h-geodésica de C_Σ associada a p . Mais uma vez, se Y satisfaz esta última condição, diremos que Y tem a *propriedade ortogonal*.

Teorema 3.3 *Seja Σ uma superfície orientada em \mathbb{L}^3 com um campo de vetores normal N e tal que, para cada $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ é não horizontal. A função θ , que aparece na expressão da aplicação Y dada por (3-36), e tal que Y possui a propriedade ortogonal, existe se, e somente se, Σ é, ou uma superfície mínima (na métrica de Lorentz), ou um cilindro vertical sobre uma curva contida no plano $x_3 = 0$.*

Prova. Inicialmente, vamos supor Σ como o gráfico de uma função diferenciável ψ definida num domínio aberto $\Omega \subset \partial\mathbb{L}_+^3$, usando u e v como coordenadas, escrevemos uma carta local de Σ como

$$\mathbb{X}(u, v) = (u, v, \psi(u, v)).$$

A função θ em 3-36 pode ser escrita nestas coordenadas locais como $\theta : \omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pela propriedade ortogonal de Y , temos que

$$\langle dY, -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3 \rangle = 0.$$

Assim, nas direções de u e v , temos que

$$\theta_u = \frac{\sin\theta}{R} \langle \sigma_u, e_1 \rangle, \quad \theta_v = \frac{\sin\theta}{R} \langle \sigma_v, e_1 \rangle \quad (3-37)$$

Fazendo a mudança de variáveis $\sin \theta = 1/\cosh \beta$, $\cos \theta = \tanh \beta$, obtemos que

$$\beta_u = -\frac{\langle \sigma_u, e_1 \rangle}{R} \quad \text{e} \quad \beta_v = -\frac{\langle \sigma_v, e_1 \rangle}{R} \quad (3-38)$$

e a condição de integrabilidade de Frobenius é dada novamente por

$$\left(\frac{\langle \sigma_v, e_1 \rangle}{R} \right)_u = \left(\frac{\langle \sigma_u, e_1 \rangle}{R} \right)_v \quad (3-39)$$

Aplicando as expressões 3-33, 3-34 e 3-35 (esta última é quem marca a maior diferença com o resultado do **teorema 3.1**) em 3-39, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\langle \sigma_v, e_1 \rangle}{R} \right)_u &= \frac{\psi_{uu}(|\nabla \psi|^2 - 1) - \psi_u(\psi_u \psi_{uu} + \psi_v \psi_{uv})}{(|\nabla \psi|^2 - 1)^{3/2}}, \\ \left(\frac{\langle \sigma_u, e_1 \rangle}{R} \right)_v &= \frac{-\psi_{vv}(|\nabla \psi|^2 - 1) + \psi_v(\psi_u \psi_{uv} + \psi_v \psi_{vv})}{(|\nabla \psi|^2 - 1)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3-40)$$

Logo, $(\beta_u)_v = (\beta_v)_u$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \psi_{uu}(|\nabla \psi|^2 - 1) - \psi_u(\psi_u \psi_{uu} + \psi_v \psi_{uv}) &= -\psi_{vv}(|\nabla \psi|^2 - 1) + \psi_v(\psi_u \psi_{uv} + \psi_v \psi_{vv}) \\ \Leftrightarrow (\psi_{uu} + \psi_{vv})(\psi_u^2 + \psi_v^2 - 1) - \psi_u^2 \psi_{uu} - \psi_v^2 \psi_{vv} - 2\psi_u \psi_v \psi_{uv} &= 0 \\ \Leftrightarrow \psi_{uu}(\psi_v^2 - 1) - 2\psi_u \psi_v \psi_{uv} + \psi_{vv}(\psi_u^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \psi_{uu}(1 - \psi_v^2) + 2\psi_u \psi_v \psi_{uv} + \psi_{vv}(1 - \psi_u^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3-41)$$

Isto é, Y possui a propriedade ortogonal se, e somente se Σ é uma superfície mínima (ver no Ap. A, equação A-10). Para demonstrar a parte referente aos cilindros verticais, note que para uma parametrização arbitrária $\tilde{\mathbf{X}} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ temos novamente $R = 1$ e $x_u y_v - y_u x_v = 0$ nos pontos nos quais o vetor normal é horizontal, com o que a condição de integrabilidade nestes pontos é a mesma encontrada na equação 3-18 na demonstração do **teorema 3.1**, onde já foi garantida, o que conclui nossa demonstração. \square

Mostramos agora, analogamente ao teorema 3.2, que as superfícies ortogonais à congruência C_Σ são novamente superfícies isocurvadas.

Teorema 3.4 *Seja S uma superfície imersa em \mathbb{L}_+^3 . Se S é ortogonal às h -geodésicas da congruência C_Σ induzida por uma superfície imersa Σ orientada tipo tempo, então S é uma superfície isocurvada.*

Prova. Seja $p \in S$ com $T_p S$ não vertical nem horizontal. Em uma vizinhança do ponto p , a superfície S pode ser vista como o gráfico de uma função ϕ suave definida num domínio

Ω no plano $x_3 = 0$ nas coordenadas u e v , denotando assim o gráfico como

$$Y(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)).$$

Por hipótese, a superfície S é ortogonal à família de h-geodésicas C_Σ , logo em cada ponto de $\varphi(\Omega)$ temos a direção e_1 , o centro σ e raio R da h-geodésica de C_Σ associada, dados em termos de φ novamente pelas equações 3-21, 3-22 e 3-23, e assim, existe uma função diferenciável ψ definida em Ω tal que Σ é localmente parametrizada por uma aplicação X dada por

$$X(u, v) = \sigma(u, v) + \psi(u, v)e_3. \quad (3-42)$$

Tomando N o campo normal euclidiano unitário, e o raio em termos da função ψ , temos que

$$N = \frac{[-\psi_u, -\psi_v, 1]}{\sqrt{|\nabla\psi|^2 + 1}} \quad \text{e} \quad R = \frac{\sqrt{|\nabla\psi|^2 - 1}}{|\nabla\psi|}$$

logo, sendo θ o ângulo entre N e o plano $x_3 = 0$, a relação entre o ângulo θ e o raio é dada por

$$R = \sqrt{1 - \tan^2 \theta},$$

donde, pela nossa construção geométrica de C_Σ ,

$$N = -\cos\theta J(e_1) + \sin\theta e_3 = \frac{-J(e_1)}{\sqrt{2 - R^2}} + \sqrt{\frac{1 - R^2}{2 - R^2}} e_3.$$

A ortogonalidade de N com respeito a Σ implica que

$$0 = \langle X_u, N \rangle = -\frac{\langle \sigma_u, J(e_1) \rangle}{\sqrt{2 - R^2}} + \psi_u \sqrt{\frac{1 - R^2}{2 - R^2}}$$

e

$$0 = \langle X_v, N \rangle = -\frac{\langle \sigma_v, J(e_1) \rangle}{\sqrt{2 - R^2}} + \psi_v \sqrt{\frac{1 - R^2}{2 - R^2}},$$

donde

$$\psi_u = \frac{\langle \sigma_u, J(e_1) \rangle}{\sqrt{1 - R^2}} \quad \text{e} \quad \psi_v = \frac{\langle \sigma_v, J(e_1) \rangle}{\sqrt{1 - R^2}} \quad (3-43)$$

e a condição de integrabilidade de Frobenius para ψ fica dada pela igualdade

$$\left(\frac{\langle \sigma_u, J(e_1) \rangle}{\sqrt{1 - R^2}} \right)_v = \left(\frac{\langle \sigma_v, J(e_1) \rangle}{\sqrt{1 - R^2}} \right)_u. \quad (3-44)$$

fazendo uso das equações 3-21, 3-22 e 3-23, obtemos que

$$\frac{\langle J(e_1), \sigma_u \rangle}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{\varphi_v^3 + \varphi_v \varphi_u^2 - \varphi \varphi_v \varphi_{uu} + \varphi \varphi_u \varphi_{uv}}{\sqrt{|\nabla \varphi|^2 - \varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2)} |\nabla \varphi|^2},$$

$$\frac{\langle J(e_1), \sigma_v \rangle}{\sqrt{1-R^2}} = -\frac{\varphi_u^3 + \varphi_u \varphi_v^2 - \varphi \varphi_u \varphi_{vv} + \varphi \varphi_v \varphi_{uv}}{\sqrt{|\nabla \varphi|^2 - \varphi^2(1 + |\nabla \varphi|^2)} |\nabla \varphi|^2}.$$

donde, traz calcular as derivadas cruzadas, temos que o sistema 3-44 é integrável se e somente se

$$(1 - \varphi^2)(\varphi_{uu} \varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2) - \varphi(\varphi_{uu}(\varphi_v^2 + 1) - 2\varphi_u \varphi_v \varphi_{uv} + \varphi_{vv}(\varphi_u^2 + 1)) + |\nabla \varphi|^2(|\nabla \varphi|^2 + 1) = 0$$

isto é, se e somente se S é isocurvada, como por hipótese Σ é imersão a integrabilidade está garantida, logo S é isocurvada, como queríamos demonstrar. \square

Exemplos

Baseados principalmente nos métodos estabelecidos no capítulo 3, mostraremos no presente capítulo alguns exemplos relevantes de superfícies isocurvadas elípticas, hiperbólicas e parabólicas.

É preciso também mencionar que nem todas as superfícies isocurvadas podem ser classificadas globalmente entre elípticas, hiperbólicas e parabólicas, isto é, existem superfícies isocurvadas suaves que mudam de tipo (de elíptico a hiperbólico e vice-versa) com curvas suaves onde são parabólicas (o espaço de pontos com geodésicas perpendiculares de raio 1). Um exemplo simples deste tipo de superfícies é a família de cones vista na **Figura 1.1** (a), cujas superfícies são elípticas nos pontos com $x_3 < \cos(\theta/2)$, parabólicas no nível $x_3 = \cos(\theta/2)$ e hiperbólicas nos pontos nos quais $x_3 > \cos(\theta/2)$, onde θ é o ângulo de abertura do cone.

4.1 Superfícies isocurvadas elípticas

Lembrando do visto no capítulo 3, utilizando o nosso método geométrico para a congruência de geodésicas C_Σ a partir de uma superfície mínima, imersa e simplesmente conexa Σ em \mathbb{R}^3 , garantimos a existência de superfícies ortogonais a C_Σ que além disso resultam ser isocurvadas, com isto, temos a possibilidade de construir exemplos de superfícies isocurvadas a partir da grande quantidade de superfícies mínimas conhecidas na literatura (ver, por exemplo [6], [7], [24]), é natural então pensar nas superfícies mínimas mais representativas e procurar sua superfície isocurvada associada para obter os exemplos mais interessantes. Nesse sentido, a limitada quantidade de superfícies mínimas que podem ser representadas como o gráfico de uma função diferenciável (em um domínio suficientemente grande para se tornar interessante) supõe uma dificuldade, para nossa sorte, encontramos uma interpretação que irá nos librar do limitado mundo dos gráficos.

De 3-14 e 3-15 temos que

$$d\beta = \frac{\Psi_u}{\sqrt{1 + |\nabla\Psi|^2}} dv - \frac{\Psi_v}{\sqrt{1 + |\nabla\Psi|^2}} du., \quad (4-1)$$

Segundo [18], se Ψ é solução da EDP de gráfico mínimo (3-16) definida num domínio simplesmente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$, a equação 4-1 é uma forma exata em D , e $\beta = \beta(u, v)$, coincide com a terceira coordenada $x_3^*(u, v)$ da imersão conjugada \mathbb{X}^* (superfície conjugada) de $\mathbb{X}(u, v) = [u, v, \Psi(u, v)]$, ainda quando \mathbb{X}^* não é o gráfico de β .

Nesse sentido, no nosso método para encontrar as superfícies isocurvadas, procuramos por uma parametrização equivalente à descrita na seção 3.1:

$$Y = \sigma(p) + R(p)[(\tanh \beta)e_1 + (\cosh \beta)e_3], \quad (4-2)$$

para o que precisaremos simplesmente de exemplos de superfícies mínimas e as suas superfícies conjugadas sem exigir gráficos de nenhuma espécie, reduzindo nosso problema à geração de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 e calcular sua correspondente superfície isocurvada.

Na década de 1860, Karl Weierstrass (1815-1897) e Alfred Enneper (1830-1885) mostraram um método simples e eficiente para a geração de superfícies mínimas a partir de duas funções f (analítica) e g (meromorfa) arbitrárias definidas no plano complexo ou o disco unitário, tais que fg^2 é holomorfa ([6], [12], [13]). Assim, uma superfície mínima pode ser representada a partir das funções f e g , chamadas também de *dados de Weierstrass da superfície*.

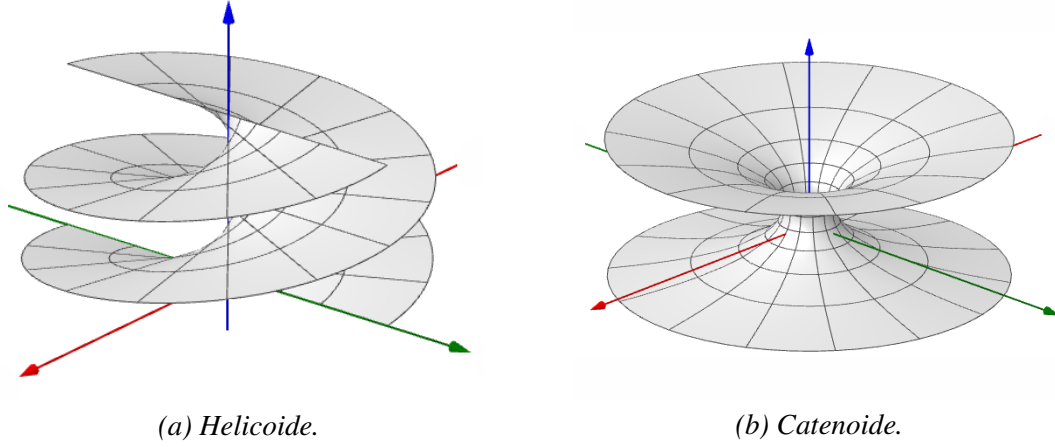
Usando esta *representação de Weierstrass* (as vezes chamada também de *Weierstrass-Enneper*) para obter superfícies mínimas e suas superfícies conjugadas obtemos agora também uma base para a geração de infinidade de exemplos não triviais de superfícies isocurvadas.

4.2 Exemplos de superfícies isocurvadas elípticas

4.2.1 Superfície isocurvada de revolução

As duas superfícies mínimas mais conhecidas são talvez o helicóide e o catenóide, sendo uma a conjugada da outra, o helicóide é (em geral, e além do plano) a única superfície mínima regrada, enquanto seu par, o catenóide, é a única superfície mínima de revolução (ver [7] sec. 3.5). Dentre as diferentes parametrizações para o helicóide, trabalhamos com a dada pela representação de Weierstrass para os dados $f = ie^z$ e $g = ce^{-z}$ com $z = x + iy$,

$$\mathbb{X}(x, y) = \left[\left(\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \right) \sin y, \left(\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \right) \cos y, -cy \right], \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad c = cte. \in \mathbb{R}, \quad (4-3)$$

(a) *Helicoide.*(b) *Catenoide.***Figura 4.1:** *Helicoide e catenoide (Para $c = 2$ em 4-3 e 4-4).*

que generaliza o helicoides descrito em [7], esta representação é também mais apropriada pela sua relação com a tangente e o cosseno hiperbólicos que utilizaremos depois na construção da nossa superfície isocurvada. Sua superfície conjugada é o catenóide

$$\mathbb{X}(x, y) = \left[\left(\frac{c^2 e^{-x} + e^x}{2} \right) \cos y, - \left(\frac{c^2 e^{-x} + e^x}{2} \right) \sin y, cx \right]. \quad (4-4)$$

ver **Figura 4.1**.

Construímos agora os elementos necessários para a expressão explícita da (família) isocurvada, isto é, o centro σ , o vetor normal N , o vetor horizontal e_1 e o raio das nossas h-geodésicas em C_Σ nas coordenadas x e y de acordo com as equações 3-2 e 3-3:

$$\sigma(x, y) = \left[\left(\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \right) \sin y, \left(\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \right) \cos y, 0 \right], \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \frac{[-\frac{c^2 e^{-x} + e^x}{2} \sin y, -\frac{c^2 e^{-x} + e^x}{\cos} y, 0] \times [\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \cos y, \frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \sin y, -c]}{|[-\frac{c^2 e^{-x} + e^x}{2} \sin y, -\frac{c^2 e^{-x} + e^x}{\cos} y, 0] \times [\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \cos y, \frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \sin y, -c]} \\ &= \left[\frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \cos y, -\frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \sin y, \frac{c^2 - e^{2x}}{e^{2x} + c^2} \right], \end{aligned} \quad (4-6)$$

$$e_1(x, y) = \frac{\left[\frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \sin y, \frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \cos y, 0 \right]}{\left| \left[\frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \cos y, -\frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \sin y, 0 \right] \right|} = [\sin y, \cos y, 0] \quad (4-7)$$

e

$$R(x, y) = \frac{1}{\left| \left[\frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \sin y, \frac{2c e^x}{e^{2x} + c} \cos y, 0 \right] \right|} = \frac{c^2 e^{-x} + e^x}{2c}. \quad (4-8)$$

Note que o campo normal à superfície é a rotação do campo $N(x, 0)$ em torno do eixo

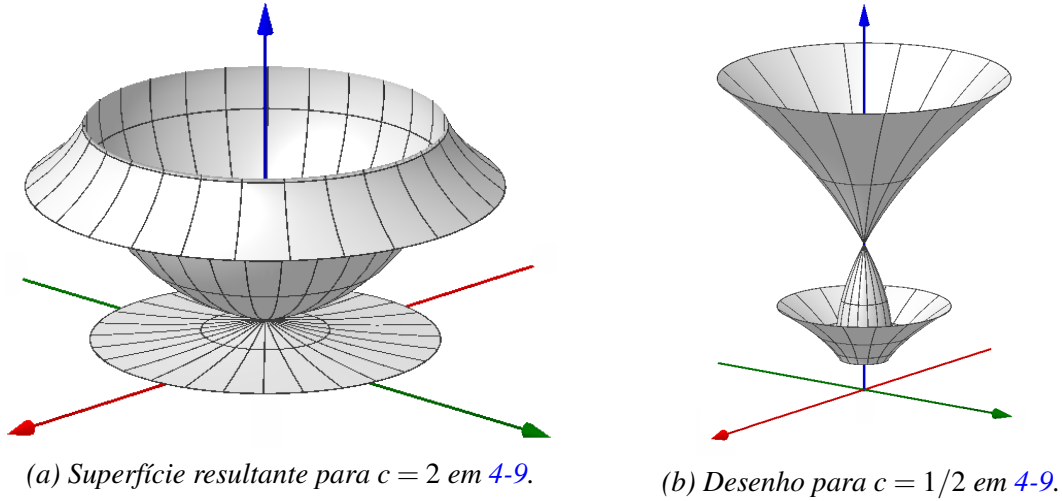


Figura 4.2: Superfície isocurvada de revolução

vertical, e, pelo fato de Σ ser periódica no eixo vertical, $N(x, y)$ é também periódico de período 2π na coordenada v , o que se traduz posteriormente em uma congruência C_Σ periódica em torno ao eixo vertical e motiva a identificar a nossa superfície isocurvada como uma superfície de rotação.

Obtemos assim a família de superfícies isocurvadas no parâmetro real c dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Y} &= \sigma(x, y) + R(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_3) \\
 &= \sigma(x, y) + R\left(\tanh \beta e_1 + \frac{e_3}{\cosh \beta}\right) \\
 &= \left[\left(\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \right) \sin y, \left(\frac{c^2 e^{-x} - e^x}{2} \right) \cos y, 0 \right] \\
 &\quad + \left(\frac{c^2 e^{-x} + e^x}{2c} \right) \left[\sin y \tanh cx, \cos y \tanh cx, \frac{1}{\cosh cx} \right] \\
 &= \left[-\frac{e^{-x}(e^{2cx}(e^{2x}(c-1)c^2(c+1)) + e^{2x}(c+1) - c^2(c-1))}{2c(e^{2cx} + 1)} \sin y, \right. \\
 &\quad \left. -\frac{e^{-x}(e^{2cx}(e^{2x}(c-1)c^2(c+1)) + e^{2x}(c+1) - c^2(c-1))}{2c(e^{2cx} + 1)} \cos y, \frac{e^{x(c-1)}(e^{2x} + c^2)}{c(e^{2cx} + 1)} \right].
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

Na **Figura 4.2** encontramos um esboço da superfície para dois valores de c .

4.2.2 Superfície isocurvada 1-periódica

Como foi mencionado acima, o helicóide é um exemplo de superfície periódica no eixo vertical, o que forneceu afinal uma superfície isocurvada de rotação, baseados agora numa superfície mínima periódica ao longo de um eixo horizontal, a projeção do

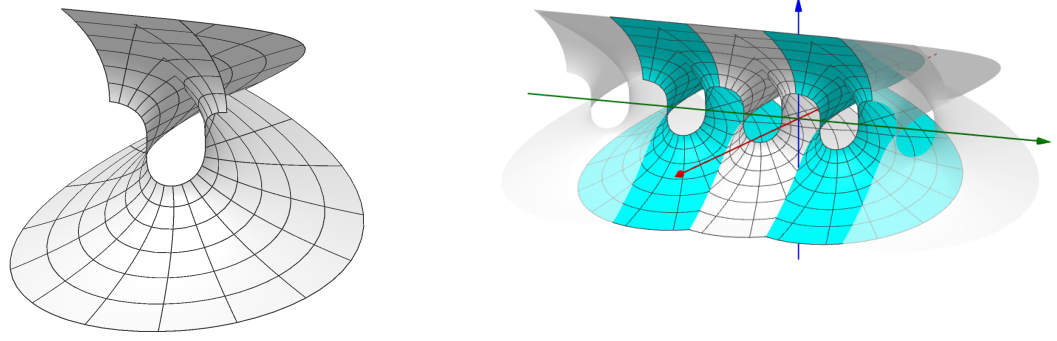


Figura 4.3: Superfície mínima de Catalan. Esq. Um ciclo (para $y \in (0, 2\pi)$). Dir. Alguns ciclos de Σ ao longo do eixo x_2 .

campo normal será novamente periódica mas desta vez se dará ao longo do eixo, o que se traduz numa congruência de geodésicas (e **ad posteriori** numa superfície isocurvada) 1–periódica (periódica ao longo de uma direção) também ao longo desse eixo. O exemplo clássico de uma dita superfície mínima "horizontalmente 1–periódica" é a superfície de Catalan (**Figura 4.3**), descoberta pelo matemático belga E. C. Catalan (1814-1894) em 1885, que soluciona o problema de Björling para uma cicloide ao longo de uma linha reta (ver [6]), o que a faz ideal para o nosso propósito.

Com os dados de Weierstrass $(z, 1/z)$ para $z = re^{it}$, obtemos a parametrização

$$\mathbb{X} = \left[\frac{1}{4}r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) - \frac{\ln r}{2}, -\frac{1}{2}(r^2 \sin t \cos t + t), r \cos t \right], \quad (4-10)$$

e $\mathbb{X}_3^* = r \sin t$, com o que definimos os vetores

$$N(x, y) = \left[\frac{2r \cos t}{r^2 + 1}, -\frac{2r \sin t}{r^2 + 1}, \frac{1 - r^2}{r^2 + 1} \right], \quad (4-11)$$

$$e_1(x, y) = \frac{\left[\frac{2r \sin t}{r^2 + 1}, \frac{2r \cos t}{r^2 + 1}, 0 \right]}{\left| \left[\frac{2r \cos t}{r^2 + 1}, -\frac{2r \sin t}{r^2 + 1}, 0 \right] \right|} = [\sin t, \cos t, 0] \quad (4-12)$$

e o raio

$$R = \frac{1}{\left| \left[\frac{2r \cos t}{r^2 + 1}, -\frac{2r \sin t}{r^2 + 1}, 0 \right] \right|} = \frac{r^2 + 1}{2r}, \quad (4-13)$$

e obtemos a superfície isocurvada parametrizada por

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}(x, y) = & \left[\frac{1}{4}r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) - \frac{\ln r}{2}, -\frac{1}{2}(r^2 \sin t \cos t + t), 0 \right] \\ & + \frac{r^2 + 1}{2r} \left[\sin(t) \tanh(r \sin t), \cos(t) \tanh(r \sin t), \frac{1}{\cosh(r \sin t)} \right] \end{aligned} \quad (4-14)$$

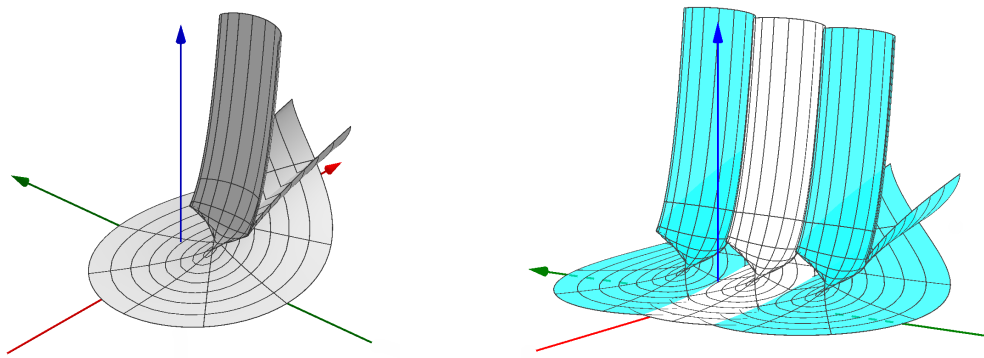


Figura 4.4: Superfície isocurvada associada à superfície mínima de Catalan. Esq. Um ciclo. Dir. Alguns ciclos ao longo o eixo x_2 .

cuja representação gráfica pode ser vista na **Figura 4.4**.

4.2.3 Superfície isocurvada tipo Scherk

Uma outra superfície mínima conhecida é a superfície mínima de Scherk, a qual, além de ter propriedades interessantes no estudo das superfícies mínimas, proporciona um exemplo de superfície isocurvada 2–periódica. Foi apresentada em 1848 pelo matemático alemão Heinrich Scherk no seu trabalho *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*, sendo o primeiro exemplo de uma superfície mínima completa, imersa e 2–periódica, pelo que sua congruência de geodésicas é também dois periódica.

A superfície em questão, chamada também às vezes de *primeira superfície de Scherk*, pode ser escrita como o gráfico da equação

$$\varphi(x, y) = \ln \frac{\cos y}{\cos x}, \quad (4-15)$$

com o que podemos aplicar nosso método usando as equações para gráficos estudadas no capítulo 3. É preciso agora mencionar que a superfície conjugada vem dada por $\varphi^*(x, y) = \arcsin(\sin x \sin y)$. Esta superfície é chamada de *segunda superfície de Scherk* ou *torre de Scherk*, ela é novamente uma superfície periódica (no eixo vertical) e foi posteriormente generalizada ao conceito de *Saddle towers* ou torres de selas.

Dando passo ao nosso assunto central, calculamos o vetor normal N , o vetor horizontal e_1 e o raio das nossas h-geodésicas em C_Σ em termos das coordenadas x e y

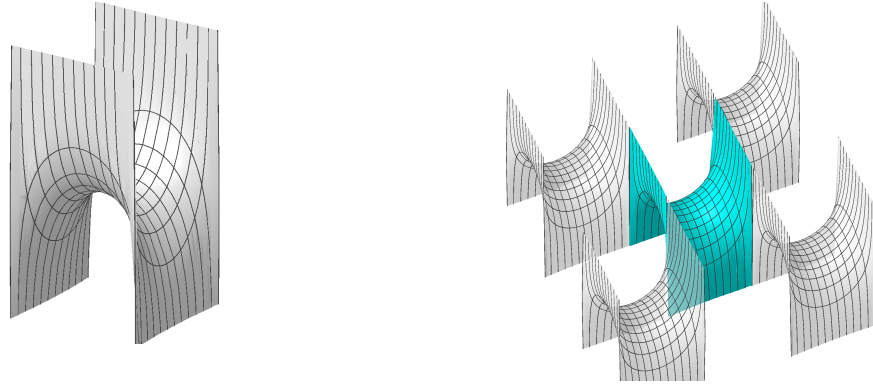


Figura 4.5: Superfície mínima de Sherk. Um período (esq.) e 9 períodos (dir.)

obtendo

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \frac{[-\tan x, \tan y, 1]}{\|[-\tan x, \tan y, 1]\|} \\ &= \left[-\frac{\sin x \cos y}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}}, \frac{\sin y \cos x}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}}, \frac{\cos x \cos y}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}} \right], \end{aligned}$$

$$e_1(x,y) = \left[-\frac{\sin y \cos x}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, -\frac{\sin x \cos y}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, 0 \right] \quad (4-16)$$

e

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \frac{1}{\left\| \left[-\frac{\sin x \cos y}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, \frac{\sin y \cos x}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, 0 \right] \right\|} \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, \end{aligned} \quad (4-17)$$

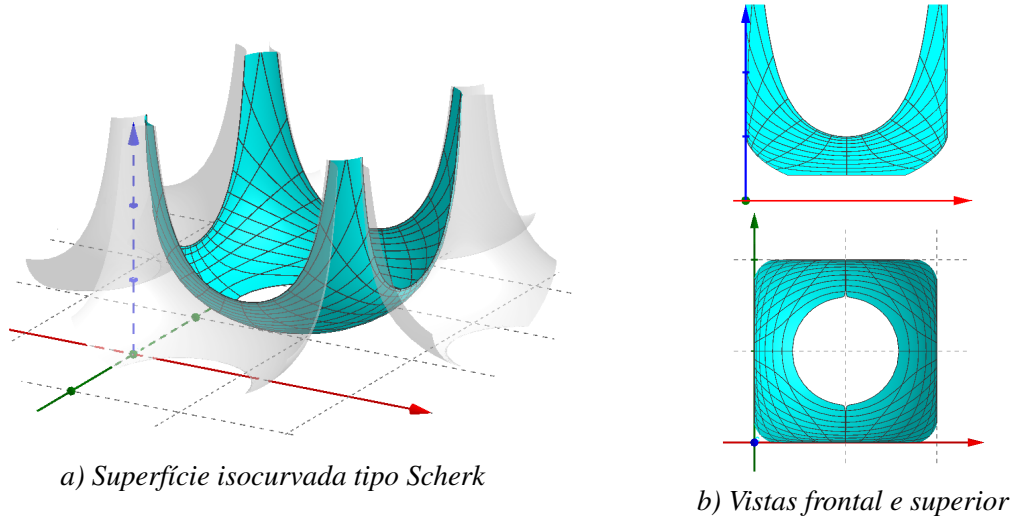


Figura 4.6: Superfície isocurvada associada à primeira superfície mínima de Scherk.

donde obtemos a parametrização da nossa superfície isocurvada (ver na Fig. 4.6)

$$\begin{aligned}
\Upsilon(x, y) &= \sigma(x, y) + R(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_3) \\
&= [x, y, 0] + \frac{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}} \left(\left[-\frac{\sin y \cos x \tanh(\arcsin(\sin x \sin y))}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -\frac{\sin x \cos y \tanh(\arcsin(\sin x \sin y))}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}, 0 \right] + \left[0, 0, \frac{1}{\cosh(\arcsin(\sin x \sin y))} \right] \right) \\
&= \left[x - \frac{\sin y \cos x \sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}}{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} \tanh(\arcsin(\sin x \sin y)), \right. \\
&\quad y - \frac{\sin x \cos y \sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}}{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} \tanh(\arcsin(\sin x \sin y)), \\
&\quad \left. \frac{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y} \cosh(\arcsin(\sin x \sin y))} \right].
\end{aligned} \tag{4-18}$$

4.3 Superfícies isocurvadas hiperbólicas

Para trabalhar com superfícies mínimas de tipo-tempo, é preciso definir alguns aspectos análogos aos trabalhados em \mathbb{R}^3 para superfícies mínimas como as utilizadas para gerar exemplos de superfícies isocurvadas elípticas. Além do visto no **Apêndice A**, introduzimos a seguir, alguns conceitos necessários para nosso objetivo.

Seja M uma variedade bidimensional conexa e orientável. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, nas coordenadas u e v , é dita *Lorentz-holomorfa* se $f_v = 0$ e *Lorentz-anti-holomorfa* se $f_u = 0$, isto é, $f(u, v) = f(u)$ ou $f(u, v) = f(v)$ respectivamente.

De um modo análogo ao mostrado por Weierstrass e Enneper para superfícies mínimas, existe uma certa representação de Weierstrass para superfícies mínimas de tipo-tempo no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 com funções Lorentz-holomorfas e Lorentz-anti-holomorfas. Nesse sentido, o seguinte resultado é obtido de [15].

Teorema 4.1 (Representação de Weierstrass para superfícies mínimas de tipo-tempo em \mathbb{L}^3) *Sejam $q, r : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ funções Lorentz-holomorfa e Lorentz-anti-holomorfa respectivamente. Então o sistema*

$$\begin{aligned}\varphi_u &= \left(\frac{1}{2}(1+q^2), -12(1-q^2), -q \right) f(u) \\ \varphi_v &= \left(-\frac{1}{2}(1+r^2), -12(1-r^2), -r \right) g(v)\end{aligned}\tag{4-19}$$

define uma superfície mínima de tipo-tempo $\varphi : M \rightarrow \mathbb{L}^3$. Onde $f(u)$ e $g(v)$ são também aplicações Lorentz-holomorfa e Lorentz-anti-holomorfa respectivamente. Reciprocamente, toda superfície mínima tipo-tempo pode ser representada pelo sistema 4-19 salvo translações.

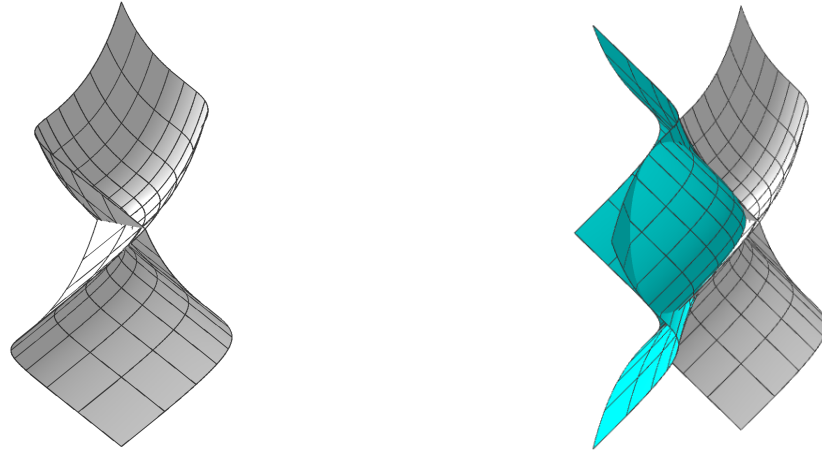
A prova do teorema acima pode ser encontrada também em [15], acompanhada da seguinte definição.

Definição 4.2 *Seja $\varphi(u, v) = X(u) + Y(v)$ uma superfície mínima tipo-tempo. Então, claramente, $\varphi^*(u, v) = X(u) - Y(v)$ é também uma superfície mínima tipo-tempo. A superfície φ^* é chamada de superfície mínima tipo-tempo conjugada de φ .*

Finalmente, neste caso, a função β em 3-38 resulta ser o menos da função altura de \mathbb{X}^* , que chamaremos de \mathbb{X}_3^* , isto é, $\beta = -\mathbb{X}_3^*$. Com o que novamente fazemos uso da representação de Weierstrass em 4-19 para gerar superfícies mínimas que serão base para exemplos de superfícies isocurvadas hiperbólicas.

4.3.1 Superfície isocurvada Hiperbólica tipo Enneper

Em 1864 Alfred Enneper apresentou uma superfície mínima para os dados de Weierstrass $(1, z)$ que não é imersão em \mathbb{R}^3 e que, conjuntamente com o catenóide, são as únicas superfícies mínimas com curvatura total igual a -4π [19]. No espaço \mathbb{L}^3 [15] e dimensões superiores [4], existem também superfícies do tipo Enneper tipo-tempo que vamos usar para gerar um exemplo hiperbólico de superfície isocurvada.



a) Superfície de Lorentz-Enneper

b) A superfície e a sua conjugada

Figura 4.7: Superfície mínima Lorentz Enneper e a sua conjugada.

Seguindo [10] (onde podem se encontrar vários outros exemplos de superfícies Lorentz Enneper) e [15], consideramos a superfície de Enneper tipo-tempo dada por

$$\mathbb{X}(x,y) = A(x) + B(y)$$

onde

$$A(x) = \frac{1}{2} \left[x^2, x - \frac{x^3}{3}, x + \frac{x^3}{3} \right] \text{ e } B(y) = \frac{1}{2} \left[-y^2, y - \frac{y^3}{3}, -y - \frac{y^3}{3} \right].$$

De maneira explícita,

$$\mathbb{X}(x,y) = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} + \frac{y^3}{6} - \frac{y}{2}, \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{y}{2} \right], \quad (4-20)$$

donde, pelo teorema 4.1, a superfície conjugada \mathbb{X}^* vem dada por

$$\mathbb{X}^*(x,y) = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2}, \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2} \right]. \quad (4-21)$$

Na **Figura 4.7** ilustramos as superfícies \mathbb{X} e \mathbb{X}^* .

Com a parametrização 4-20, calculamos o campo normal N_L e o raio e direção e_1 das h-geodésicas em $C_{\mathbb{X}}$ como segue

$$N_L = \frac{\mathbb{X}_x \times_L \mathbb{X}_y}{|\mathbb{X}_x \times_L \mathbb{X}_y|_L} = \left[-\frac{xy+1}{xy-1}, \frac{y-x}{xy-1}, -\frac{x+y}{xy-1} \right], \quad (4-22)$$

$$R = \frac{1}{|\Pi_{12}(N_L)|} = \frac{xy-1}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}}, \quad (4-23)$$

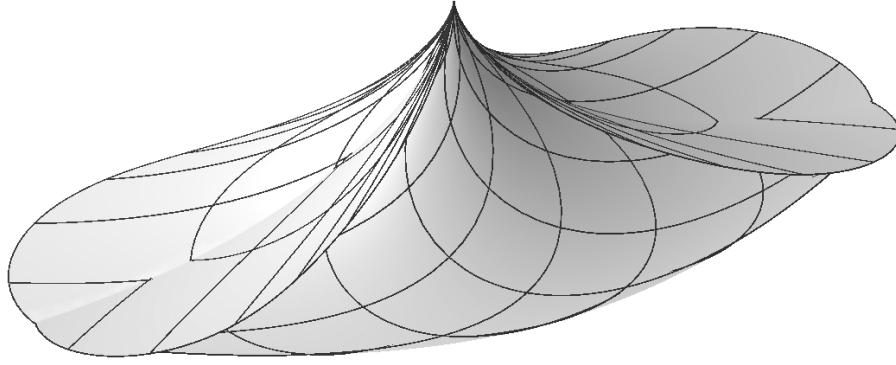


Figura 4.8: Superfície isocurvada associada à superfície Lorentz Enneper.

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{J(\Pi_{12}(N_L))}{|\Pi_{12}(N_L)|_L} = \frac{\left[\frac{y-x}{xy-1}, \frac{xy+1}{xy-1}, 0 \right]}{\left| \left[-\frac{xy+1}{xy-1}, \frac{y-x}{xy-1}, 0 \right] \right|} \\
 &= \left[\frac{y-x}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}}, \frac{xy+1}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}}, 0 \right].
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

Fazendo uso de 4-23, 4-24 e 4-21 obtemos a parametrização $\mathbb{Y}(x, y)$ da superfície isocurvada associada a \mathbb{X}

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Y}(x, y) &= \sigma(u, v) + R[\cos \theta e_1 + \sin \theta e_3] \\
 &= \sigma(u, v) + R \left[\tanh(-\mathbb{X}_3^*) e_1 + \frac{1}{\cosh(-\mathbb{X}_3^*)} e_3 \right] \\
 &= \left[\frac{y^2 x^4 - x^2 y^4}{2(y^2+1)(x^2+1)} + \tanh\left(\frac{3x+x^3+3y+y^3}{6}\right) \frac{(x-y)(xy-1)}{(y^2+1)(x^2+1)} + \frac{x^4 - y^4 + x^2 - y^2}{2(y^2+1)(x^2+1)}, \right. \\
 &\quad \frac{-x^5 y^2 - x^2 y^5}{6(y^2+1)(x^2+1)} + \tanh\left(\frac{3x+x^3+3y+y^3}{6}\right) \frac{x^2 y^2 - 1}{(y^2+1)(x^2+1)} \\
 &\quad \left. + \frac{(x+y)(x^3 y - x^4 + x^2 y^2 + 2x^2 + x y^3 - y^4 + 2y^2 + 3)}{6(y^2+1)(x^2+1)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{xy-1}{\sqrt{(y^2+1)(x^2+1)} \cosh\left(\frac{3x+x^3+3y+y^3}{6}\right)} \right].
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

Parte desta superfície pode ser vista na **Figura 4.8**.

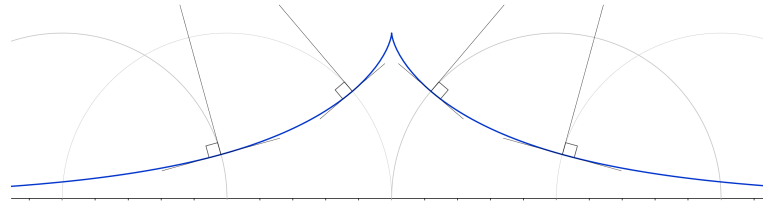


Figura 4.9: Curva tractriz. Para $a = 1$, os semicírculos de raio 1 são perpendiculares à curva.

4.4 Superfícies isocurvadas parabólicas

Como é mencionado em [2], não é conhecido ainda um método geral para a geração de exemplos não-triviais de superfícies isocurvadas parabólicas, porém, lembrando o teorema 2.1 no capítulo 2, sabemos que estas devem ser perpendiculares a uma família de h-geodésicas de raio $\rho = 1$; pela sua definição coloquial, uma curva tractriz define a trajetória de um objeto que aponta a um ponto fixo e é "puxado" desde um eixo horizontal l por um ponto P que se move em linha reta a uma distancia constante a , logo, a curva tractriz é, em todo ponto, perpendicular a um semicírculo com centro em l e de raio a , nesse sentido (Fig. 4.9), fazendo $a = 1$, a superfície na **Figura 1.1** (b) é um exemplo (quase trivial) de superfície isocurvada parabólica.

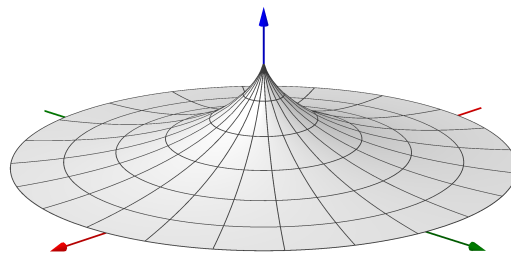
Uma certa generalização do exemplo acima é fornecida por Robert Bryant em resposta a uma pergunta de P. Roitman em *MathOverflow.net* ([2], [9]) sobre estudos prévios a [2] sobre superfícies isocurvadas. A família de exemplos de Bryant tem parametrizações da forma

$$\mathbb{X}(u, v) = [a(u) + \cos u(v - \tanh v), b(u) + \sin u(v - \tanh v), \operatorname{sech} v], \quad (4-26)$$

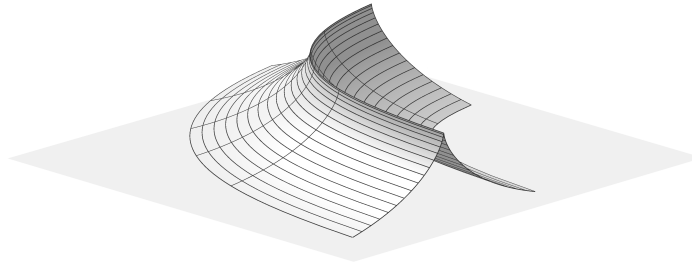
onde $a(u)$ e $b(u)$ são funções diferenciáveis tais que

$$a'(u) \cos u + b'(u) \sin u = 0.$$

A escolha mais simples, $a(u) \equiv b(u) \equiv 0$, gera a superfície de revolução com respeito ao eixo x_3 que tem à tractriz como curva de perfil (ver **Figura 4.10** (a)). Uma outra escolha (Fig. 4.10 (b)) dá como resultado uma superfície tendo a tractriz como curva de perfil regradada por curvas logarítmicas.



a) Rotação da tractriz



b) Superfície isocurvada parabólica para $a(u) = -\ln \tan\left(\frac{2s+\pi}{4}\right)$ e $b(u) = \ln \tan\left(\frac{s}{2}\right)$.

Figura 4.10: Superfícies isocurvadas parabólicas.

Geometria de superfícies no espaço de Lorentz-Minkowski

No presente apêndice, vamos fazer uma curta introdução à geometria diferencial de superfícies no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 utilizado ao longo do capítulo 3 (Sec. 3.2 e 4.3), em especial para superfícies de tipo-tempo, começando pelos elementos geométricos básicos do espaço e pulando depois até a geometria das superfícies e os conceitos de curvatura já utilizados nas demonstrações de alguns teoremas. Um estudo mais completo da geometria diferencial de curvas e superfícies no espaço de Lorentz-Minkowski pode ser encontrado em [16], de onde será tomada a maior parte da informação neste resumo, e onde podem se encontrar também algumas demonstrações que aqui omitimos.

A.1 Conceitos básicos

[25] Consideramos V um espaço vetorial n -dimensional sobre os reais, uma forma bilinear simétrica $q : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita

1. **positiva** (resp. **negativa**) **definida** se $u \neq 0$ implica $q(u, u) > 0$ (resp. $q(u, u) < 0$) para todo $u \in V$,
2. **não-degenerada** se $q(u, v) = 0$ para todo v em V implica $u = 0$,
3. **indefinida** se existem u e v em V tais que $q(u, u) < 0$ e $q(v, v) > 0$.

Uma forma bilinear simétrica não-degenerada q é chamada de produto escalar. Dado um produto escalar \langle, \rangle em V , dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$.

Definição A.1 Um vetor $v \neq 0$ em um espaço V com produto escalar \langle, \rangle indefinido é dito

1. de tipo-espaço se $\langle v, v \rangle > 0$,
2. de tipo-tempo se $\langle v, v \rangle < 0$ ou
3. de tipo-luz se $\langle v, v \rangle = 0$.

O número de vetores de tipo-tempo em uma base ortonormal de um espaço V dotado de um produto escalar não depende da escolha da base [11], e é chamado de *índice* do produto escalar, ou índice de (V, \langle, \rangle) .

Seja \mathbb{R}^3 o espaço vetorial real com a sua estrutura usual, denotamos por $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ a sua base canônica, onde $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, 0\}$ e $e_3 = \{0, 0, 1\}$, e por (x_1, x_2, x_3) as coordenadas de um vetor x respeito à base B . A métrica usual em \mathbb{R}^3 é a chamada métrica Euclidiana \langle, \rangle_e dada por

$$\langle u, v \rangle_e = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Definição A.2 O espaço de Lorentz-Minkowski é o espaço métrico $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle_L)$ onde a métrica \langle, \rangle_L é

$$\langle u, v \rangle_L = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3, \quad (\text{A-1})$$

e é chamada de *métrica Lorentziana* (as vezes referida também como *métrica de Minkowski*).

De acordo com a definição A.1, um vetor $v \in \mathbb{L}^3$ vai ser chamado de *tipo-espaço* se $\langle v, v \rangle_L > 0$, de *tipo-tempo* se $\langle v, v \rangle_L < 0$ ou de *tipo-luz* se $\langle v, v \rangle_L = 0$. Como pode ser visto facilmente, a mesma base canônica B é base para \mathbb{L}^3 , e assim \mathbb{L}^3 é um espaço com índice 1 (e_3 é de tipo-tempo). Em geral os espaços vetoriais com produto escalar são chamados de Euclidianos se o produto escalar tem índice 0 e Lorentzianos quando tem índice 1.

Segundo diferentes autores o vetor $v = 0$ pode ser considerado como de qualquer dos tipos acima enumerados, no presente trabalho, consideramos o vetor 0 como de tipo-espaço, com isto, o *cono de luz*, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$, e o conjunto de vetores de tipo-tempo, $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}$, são conjuntos com duas componentes conexas cada um (ver **Figura A.1**).

Dado um subespaço vetorial $U \subset \mathbb{L}^3$, consideramos a métrica induzida \langle, \rangle_U :

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle_L, \quad u, v \in U. \quad (\text{A-2})$$

Classificamos um subespaço U de \mathbb{L}^3 como

1. de tipo-espaço se a métrica \langle, \rangle_U é definida positiva,
2. de tipo-tempo se a métrica \langle, \rangle_U tem índice 1,
3. de tipo-luz se a métrica \langle, \rangle_U é degenerada.

Pode se mostrar que U é um subespaço de tipo-espaço (resp. tipo-tempo) se e somente se U^\perp é de tipo-tempo (resp. tipo-espaço). Dois vetores de tipo-espaço $u, v \in \mathbb{L}^3$ são linearmente independentes se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$.

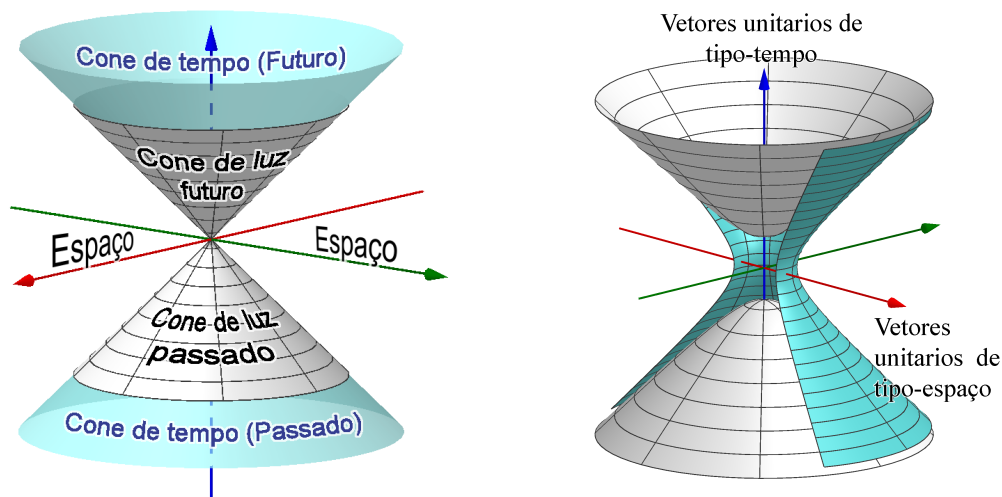


Figura A.1: Representação clássica do espaço \mathbb{L}^3 (Esq.) e a pseudoesfera unitária (Dir.). Os conjuntos de luz e tempo, C e \mathcal{T} , tem cada um dois componentes disjuntos, os quais são em ocasiões referidos como futuros e passados, um vetor v de tipo-tempo, por exemplo, se considera **dirigido para o futuro** se está contido no mesmo cone de tempo que o vetor e_3 , isto é, se $\langle v, e_3 \rangle_L < 0$, e é dito **dirigido ao passado** se $\langle v, e_3 \rangle_L > 0$

Proposição A.3 Seja $P \subset \mathbb{L}^3$ um plano vetorial. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. P é um subespaço de tipo-tempo.
2. P contem dois vetores de tipo-espaco linearmente independentes.
3. P contem um vetor de tipo-tempo.

Proposição A.4 Seja $P \subset \mathbb{L}^3$ um plano vetorial. Seja η um vetor ortogonal a P respeito à métrica Euclidiana. Então P é um plano de tipo-espaco (resp. tipo-tempo, tipo-luz) se, e somente se η é um vetor de tipo-tempo (resp. tipo-espaco, tipo-luz).

Dado um vetor u em \mathbb{L}^3 (resp. \mathbb{R}^3) a sua norma é definida por $|u|_L = \sqrt{|\langle u, u \rangle_L|}$ (resp. $|u|_e = \sqrt{\langle u, u \rangle_e}$). Um vetor será dito unitário se a sua norma é 1. O lugar geométrico dos vetores unitários está composto pelos hiperboloides de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (para os vetores de tipo-espaco) e de duas folhas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (para os vetores de tipo-tempo) representados na **Figura A.1**.

Se u é um vetor de tipo-tempo, o cono de tipo-tempo de u é o conjunto $C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle_L < 0\}$, este conjunto é no vazio, pois $u \in C(u)$.

Uma das diferencias entre \mathbb{R}^3 e \mathbb{L}^3 é a veracidade da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que mostra que se $u, v \in \mathbb{R}^3$, então $|\langle u, v \rangle_e| \leq |u|_e |v|_e$, e a igualdade é atingida

só se u e v foram proporcionais. Não entanto, no espaço de Minkowski, e para vetores de tipo-tempo, existe uma certa desigualdade de Cauchy-Schwarz invertida ([16]).

Teorema A.5 *Sejam $u, v \in \mathbb{L}^3$ dois vetores de tipo-tempo. Então*

$$|\langle u, v \rangle_L| \geq |u|_L |v|_L$$

e a igualdade se tem se, e só se, u e v são proporcionais. No caso que ambos vetores estiverem contidos no mesmo cono de tempo ($\langle u, v \rangle_L < 0$), existe um único número $\phi \geq 0$ tal que

$$\langle u, v \rangle_L = -|u|_L |v|_L \cosh \phi$$

o número ϕ acima definido, é chamado o ângulo hiperbólico (ou ângulo de tipo-tempo [20] p. 59) entre u e v .

Cabe agora perguntar-se como definir o ângulo entre dois vetores quaisquer em \mathbb{L}^3 , porém, limitações geométricas próprias do espaço fazem que para certas combinações de vetores isto não seja possível, (ver [16] Sec. 1.2 e Tma. 2.14). Em princípio, sejam u, v vetores linearmente independentes em $\mathbb{L}^3 - C$ (isto é, que não sejam de tipo-luz), o ângulo entre eles pode ser definido dependendo do plano P determinado por u e v , e la métrica induzida nele, a qual pode ser Riemanniana, Lorentziana ou degenerada.

1. Se o plano gerado é Riemanniano, a definição de ângulo entre os vetores (que no caso são de tipo-espaço) é o usual do espaço Euclidiano.
2. Se o plano é Lorentziano, é isométrico ao espaço bidimensional de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^2 e a definição de ângulo é invariante sob isometrias. É suficiente agora considerar só os vetores unitários, O conjunto de vetores unitários de \mathbb{L}^2 tem quatro componentes conexas,

$$\mathbb{T}_+^1 = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : x^2 - y^2 = -1, y > 0\}$$

$$\mathbb{T}_-^1 = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : x^2 - y^2 = -1, y < 0\}$$

$$\mathbb{E}_+^1 = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$$

$$\mathbb{E}_-^1 = \{(x, y) \in \mathbb{L}^2 : x^2 - y^2 = 1, x < 0\}$$

os vetores em $\mathbb{T}_+^1 \cap \mathbb{T}_-^1$ são de tipo-tempo e os contidos em $\mathbb{E}_+^1 \cap \mathbb{E}_-^1$ são de tipo-espaço. Já foi definido o caso em que os dois vetores estão no mesmo cone de tempo. Considere agora dos vetores unitários de tipo-espaço contidos na mesma componente ($u, v \in \mathbb{E}_+^1$ ou $u, v \in \mathbb{E}_-^1$) então, $\langle u, v \rangle_L \geq 1$, e se define o ângulo entre dois vetores de tipo-espaço, como segue:

Definição A.6 *Sejam $u, v \in \mathbb{L}^3$ dois vetores não nulos de tipo-espaço tais que $u/|u|_L$ e $v/|v|_L$ estejam na mesma componente de vetores unitários, então o ângulo*

$\angle(u, v) = \phi$ é o (único) número $\phi \in [0, \infty)$ tal que

$$\cosh \phi = \frac{\langle u, v \rangle_L}{|u|_L |v|_L}. \quad (\text{A-3})$$

Não definimos o ângulo entre dois vetores unitários (tipo-espaço ou tipo-tempo), que não pertenceram á mesma componente, nem o ângulo entre vetores tipo-tempo e tipo-espaço.

3. Um terceiro caso aparece quando o plano P é de tipo tempo. Necessariamente u e v não são de tipo-tempo e neste caso não definimos o ângulo entre dois vetores.

O produto vetorial $u \times_L v$ entre dois vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{L}^3 é definido como

$$u \times_L v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A-4})$$

Note que, ao igual que em \mathbb{R}^3 , $(u \times_L v) \perp u$ e $(u \times_L v) \perp v$. E, se denotamos por $u \times_e v$ o produto vetorial Euclidiano, o produto $u \times_L v$ é a reflexão de $u \times_e v$ respeito ao plano $x_3 = 0$ [16].

Damos agora uma grande pulada na teoria da geometria diferencial em \mathbb{L}^3 para passar a os conteúdos utilizados ao longo do nosso trabalho, em especial do terceiro capítulo, introduzindo agora os conceitos de superfícies de tipo-tempo e tipo-espaço e as suas curvaturas Gaussianas e medias, dando sustento ao mostrado particularmente nas demonstrações dos teoremas 3.3 e 3.4.

A.2 Superfícies de tipo-tempo e tipo-espaço em \mathbb{L}^3

Seja M uma superfície regular, simplesmente conexa e (possivelmente) com bordo ∂M não vazio. Seja $x : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma imersão, isto é, tal que $dx_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva. Identificamos o plano tangente $T_p M$ com $(dx)_p(T_p M)$, e consideramos a métrica induzida (ou *pullback*) $x^*(\langle, \rangle_p)$, dada por

$$x^*(\langle, \rangle_p)(u, v) = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle_L, \quad u, v \in T_p M,$$

assim, $x : (M, x^*(\langle, \rangle)) \rightarrow (\mathbb{L}^3, \langle, \rangle_L)$ é uma imersão isométrica. A métrica x^* pode ser definida positiva, de índice 1, ou degenerada.

Definição A.7 *Seja M uma superfície. Uma imersão $x : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ é dita de tipo-espaço, (respectivamente tipo-tempo ou tipo-luz) se todos seus planos tangentes $(T_p M, x^*(\langle, \rangle_p))$ são de tipo-espaço (respectivamente tipo-tempo ou tipo-luz). Uma superfície não-degenerada é uma superfície de tipo-espaço ou tipo-tempo.*

Note que a característica de uma superfície imersa em \mathbb{L}^3 independe de sua posição no espaço, além disso, ela pode mudar seu tipo em diferentes pontos da mesma superfície, pelo tanto uma superfície em geral não está necessariamente classificada como um dos tipos acima descritos. Um exemplo de isto é a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, a região $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : |z| < 1/\sqrt{2}\}$ é de tipo-tempo, a região $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : |z| > 1/\sqrt{2}\}$ é do tipo-espaço, e os níveis $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : |z| = 1/\sqrt{2}\}$ são de tipo-luz. Pelo argumento anterior, vamos tratar as condições de tipo-espaço e tipo-tempo como um assunto local.

A.2.1 Cálculos locais de curvatura

Segundo [16], sec. 3.3, e as ideias em [7], mostramos agora o calculo em coordenadas locais das curvaturas para uma superfície (de tipo-tempo ou espaço) imersa em \mathbb{L}^3 .

Consideramos a parametrização local ψ nas coordenadas u, v , dada por

$$\psi : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3,$$

de uma imersão em S . Seja $B = \{\Psi_u, \Psi_v\}$ uma base local do $T_p S$ para $p \in \psi(U)$. Sejam $E = \langle \Psi_u, \Psi_u \rangle_L, F = \langle \Psi_u, \Psi_v \rangle_L, G = \langle \Psi_v, \Psi_v \rangle_L$ os coeficientes da primeira forma fundamental respeito de B . Tomando o campo normal unitário

$$N = \frac{\Psi_u \times_L \Psi_v}{|\Psi_u \times_L \Psi_u|_L}, \quad (\text{A-5})$$

os coeficientes da segunda forma fundamental vem dados por

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \Psi_u \rangle_L = \langle N, \Psi_{uu} \rangle_L, \\ f &= -\langle N_v, \Psi_u \rangle_L = \langle N, \Psi_{uv} \rangle_L, \\ e &= -\langle N_v, \Psi_v \rangle_L = \langle N, \Psi_{vv} \rangle_L. \end{aligned}$$

Notamos

$$N = \varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{se } S \text{ é de tipo-espaço} \\ 1, & \text{se } S \text{ é de tipo-tempo} \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

e definimos as curvaturas média e Gaussiana por

$$H = \varepsilon \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}, \quad K = \varepsilon \frac{eg - f^2}{2(EG - F^2)}. \quad (\text{A-7})$$

Exemplo A.1 *Sejam φ diferenciável em $\omega \subset \mathbb{R}^2$, a superfície de tipo-tempo S dada por $X_3 = \varphi(u, v)$ e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3$ a parametrização usual $X(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$, por A-4 e a*

definição de norma, o campo normal (de tipo-espaço) é dado por

$$N = \frac{(-\varphi_u, -\varphi_v, -1)}{\sqrt{|\nabla\varphi|^2 - 1}}, \text{ com } |\nabla\varphi|^2 = \varphi_u^2 + \varphi_v^2,$$

note que se S for de tipo-espaço teríamos N de tipo-tempo e $|\nabla\varphi|^2 - 1 < 0$. Finalmente, um cálculo direto fornece os coeficientes da primeira e segundas formas fundamentais

$$\begin{aligned} E &= 1 - \varphi_u^2, & F &= -\varphi_u\varphi_v, & G &= 1 - \varphi_v^2, \\ e &= \frac{\varphi_{uu}}{\sqrt{|\nabla\varphi|^2 - 1}}, & f &= \frac{\varphi_{uv}}{\sqrt{|\nabla\varphi|^2 - 1}}, & g &= \frac{\varphi_{vv}}{\sqrt{|\nabla\varphi|^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

e as curvaturas média e gaussiana ficam determinadas por

$$H = \frac{1}{2} \frac{\varphi_{uu}(1 - \varphi_v^2) + 2\varphi_u\varphi_v\varphi_{uv} + \varphi_{vv}(1 - \varphi_u^2)}{(|\nabla\varphi|^2 - 1)^{3/2}}, \quad K = -\frac{\varphi_{uu}\varphi_{vv} - \varphi_{uv}^2}{(|\nabla\varphi|^2 - 1)^2}. \quad (\text{A-9})$$

Do exemplo anterior, concluímos também que o gráfico de uma função diferenciável φ é uma superfície mínima ($H \equiv 0$) respeito à métrica de Lorentz se, e somente se,

$$\varphi_{uu}(1 - \varphi_v^2) + 2\varphi_u\varphi_v\varphi_{uv} + \varphi_{vv}(1 - \varphi_u^2) = 0 \quad (\text{A-10})$$

em todo ponto do domínio de φ .

Referências Bibliográficas

- [1] AVENDAÑO, M. **Teorema Fundamental de Superficies y el Criterio de Frobenius**. PhD thesis, Universidad de Sonora, 2015.
- [2] BARROSO, N.; ROITMAN, P. **Surfaces in \mathbb{R}_+^3 with the same Gaussian curvature induced by the Euclidean and hyperbolic metrics**. *Pacific J. Math.*, 275(1):19–37, 2015.
- [3] CANNON, J. W.; FLOYD, W. J.; KENYON, R.; PARRY, W. R. **Hyperbolic geometry**. In: *Flavors of geometry*, volume 31 de **Math. Sci. Res. Inst. Publ.**, p. 59–115. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [4] CHOE, J. **On the existence of higher-dimensional Enneper’s surface**. *Comment. Math. Helv.*, 71(4):556–569, 1996.
- [5] CORRO, A. V.; PINA, R.; SOUZA, M. **Surfaces of rotation with constant extrinsic curvature in a conformally flat 3-space**. *Results Math.*, 60(1-4):225–234, 2011.
- [6] DIERKES, U.; HILDEBRANDT, S.; KÜSTER, A.; WOHLRAB, O. **Minimal surfaces. I**, volume 295 de **Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]**. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Boundary value problems.
- [7] DO CARMO, M. P. **Differential geometry of curves and surfaces**. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [8] DO CARMO, M. P. **Riemannian geometry**. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [9] ([HTTP://MATHOVERFLOW.NET/USERS/27001/PEDRO ROITMAN](http://mathoverflow.net/users/27001/pedro-roitman)), P. R. **Surfaces in a 3-manifold with the same gaussian curvature with respect to two ambient conformal metrics**. MathOverflow. URL:<http://mathoverflow.net/q/108770> (version: 2012-10-04).

- [10] INOBUCHI, J.; TODA, M. **Timelike minimal surfaces via loop groups**. *Acta Appl. Math.*, 83(3):313–355, 2004.
- [11] JAVALOYES, M.; SÁNCHEZ, M. **An introduction to lorentzian geometry and its applications**. *Editorial Universidad de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. ISBN*, p. 978–85, 2010.
- [12] KILCHRIST, M.; PACKARD, D. **The weierstrass-enneper representations**. *Dynamics at the Horsetooth, Colorado University*, 4:1–13, 2012.
- [13] KONOPELCHENKO, B. G.; LANDOLFI, G. **Generalized Weierstrass representation for surfaces in multi-dimensional Riemann spaces**. *J. Geom. Phys.*, 29(4):319–333, 1999.
- [14] KUSHNER, A. **Classification of mixed type Monge-Ampère equations**. In: *Geometry in partial differential equations*, p. 173–188. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.
- [15] LEE, S. **Weierstrass representation for timelike minimal surfaces in Minkowski 3-space**. *Commun. Math. Anal.*, Conference 1:11–19, 2008.
- [16] LÓPEZ, R. **Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space**. *Int. Electron. J. Geom.*, 7(1):44–107, 2014.
- [17] LYCHAGIN, V. V.; RUBTSOV, V. N.; CHEKALOV, I. V. **A classification of Monge-Ampère equations**. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 26(3):281–308, 1993.
- [18] MAZET, L.; RODRÍ GUEZ, M. M.; TRAZET, M. **Saddle towers with infinitely many ends**. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(6):2821–2838, 2007.
- [19] MEEKS, III, W. H.; PÉREZ, J. N. **A survey on classical minimal surface theory**, volume 60 de **University Lecture Series**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [20] RATCLIFFE, J. G. **Foundations of hyperbolic manifolds**, volume 149 de **Graduate Texts in Mathematics**. Springer, New York, second edition, 2006.
- [21] TENENBLAT, K. **Transformations of manifolds and applications to differential equations**, volume 93 de **Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics**. Longman, Harlow, 1998.
- [22] TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. Editora Blucher, second edition, 2008.

- [23] TERNG, C.-L. **Lecture notes on curves and surfaces in \mathbb{R}^3** . *UC at Irvine.*, 2003.
- [24] WEBER, M. **Classical minimal surfaces in Euclidean space by examples: geometric and computational aspects of the Weierstrass representation**. In: *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 de **Clay Math. Proc.**, p. 19–63. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [25] WEINSTEIN, T. **An introduction to Lorentz surfaces**, volume 22 de **de Gruyter Expositions in Mathematics**. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.