TEORIA DE ANÉIS - AULA 5

Depois de termos introduzido as definições e lemas básicos do que define um anel, passaremos a dar alguns exemplos. Comecemos com os Números inteiros Z, com as usuais Operações Binárias (Operações Internas) $+$ e $\times$. Vimos, axioma por axioma, por que é que esta tripla (Z,+,x) forma um anel. De fato, o conceito de anel é uma generalização dos inteiros. É um dos conjuntos mais importantes em Matemática. Vamos sondar mais alguns exemplos:

Alguns exemplos de anéis

- Da mesma forma que $\mathbb{Z}_n$ forma um grupo numa operação binária, é normal esperar que $(Z_n, +, \times)$ forma um anel. (1)
  Repara que geralmente $\mathbb{Z}_n$ não oferece inversas para todos os elementos $g - \{0\}$. Em $\mathbb{Z}_4$, 3 possui inversa ($3 \times 3 = 1$) mas 2 não – não existe nenhum elemento $g \in \mathbb{Z}_4$ tal que $2g = 1$.
- Os *números racionais* $\mathbb{Q}$ formam um anel, também. A identidade é naturalmente 0, a unidade 1.
- Os *números reais* $\mathbb{R}$ formam também um anel. A identidade e a unidade são iguais como em $\mathbb{Q}$
- Os *números complexos* $\mathbb{C}$ forma igualmente um anel.
- *Anéis polinomiais* $R[x_1, \ldots, x_i]$ *sobre um anel* R : se $x_1, x_2, \ldots, x_i$ forem variáveis, e $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $n \in N$ for um multi-índice tal que o monômio $x^I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$, então expressões da forma $latex \sum_{I}{ \alpha_{I}x^{I}}$, com $\alpha_I \in R$ formam um anel. Dando como exemplo $8xyz^2 - 4x + \frac{2}{3}y^3z^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$, os multi-índices de cada monômio não-zero é $(1, 1, 2), (1, 0, 0), (0, 3, 2)$. Que operações binárias: a soma é definida como $\sum_I \alpha_I x^I + \sum_I \beta_I x^I = \sum_I (\alpha_I + \beta_I) x^I$ e a multiplicação como $\gamma_L = \sum_{I+J=L} \alpha_I \beta_J$. Com estas duas operações o sistema $R[x_1, \ldots, x_i]$ é um anel comutativo com identidade (2)
- Pensa agora no seguinte conjunto: um conjunto X e R um anel. Então o conjunto de funções definidas em X com imagem em R é um anel com as seguintes operações binárias: Adição por $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ e $f(x) \times g(x) = (f \times g)(x)$. (3)
- Anéis de Endomorfismo: Se V for um **Espaço Vetorial** sobre um corpo K, o conjunto $End_K(V) = Hom_K(V, V)$ de **Transformações Lineares** $V \to V$ admite duas operações binárias: $S(v) + T(v) = (S + T)(v)$ (adição) e multiplicação como $S(T(v)) = ST(v)$ (na verdade, **Composição**). Então $End_K(V)$ é um anel.

Observemos que em $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ todos os elementos do conjunto (exceto 0) admitem inversas multiplicativas: em $\mathbb{Q}$, se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, então $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$. Em $\mathbb{R}$, a inversa de $x \in \mathbb{R}$ é simplesmente $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Em $\mathbb{C}$, para um elemento $z = x + iy$, então o **Conjugado** $z^* = x - iy$ e então, definindo $z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*}$. Assim, $zz^{-1} = \frac{zz^*}{zz^*} = 1$. Relembremos que $zz^* = x^2 + y^2 = |z|^2$

E já é um número apreciável de exemplos!

Veja aqui EXEMPLOS DE NÉIS (Arquivo no Formato "**.PDF**") bem ilustrativo com diferentes tipos de anéis que oferece bastantes exemplos e demonstrações.

---

(1) Sugerimos praticar ou aprender mais sobre o Anel "RESTO MÓDULO n" definido a partir dos Números Inteiros, com demonstrações.
E porque não tentar provar, verificando os axiomas, que o Conjunto das "Classes Resto Módulo n" se trata realmente de um anel?
(2) Será que é um corpo? O que se poderia alterar para que o sistema admitisse inversas multiplicativas?

(3) Se X é um **Espaço Métrico** ou **Topológico** e R é ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, então o conjunto das **Funções Contínuas** com imagem em R, com estas operações binárias definida pontualmente é um anel.