PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Ricardo Bento Afonso Nº51571
Rubén Ruiz Holgado Nº64643

PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

•Programação não linear para que serve?

•A programação linear tem a função objectivo e os constrangimentos lineares.

•O que nem sempre acontece na realidade, o que nos leva a recorrer à programação não linear, para problemas em que as variáveis ou a função de custo não variam linearmente.

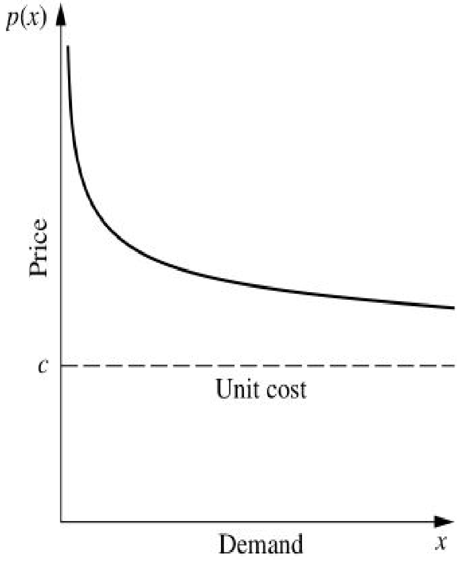
•A formulação dos problemas de programação não linear:

Achar $\boldsymbol{x = (x1, x2, \ldots, xn)}$ para
Maximizar $\boldsymbol{f(x)}$
Sujeito a
$\boldsymbol{g_i(x) \leq b_i}$, para **i = 1, 2, ..., m**
e $\boldsymbol{x \geq 0}$

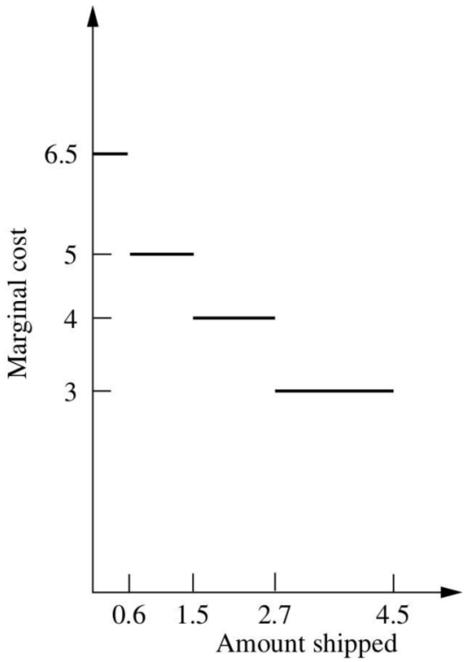
PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Exemplos:

Lei da oferta e da procura



Custo Marginal



Custo de envio

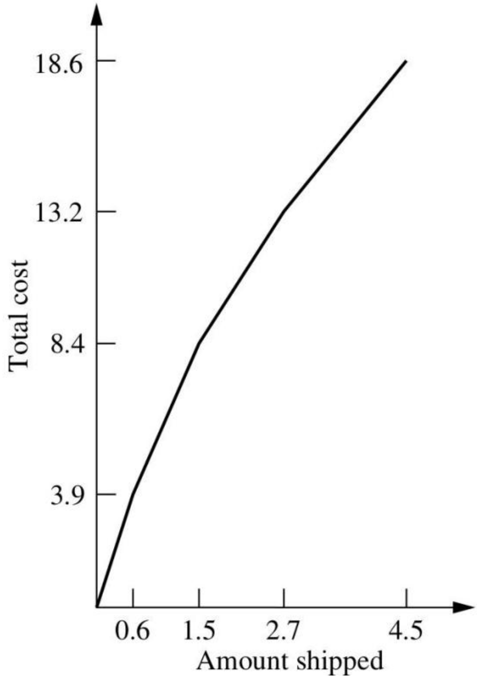
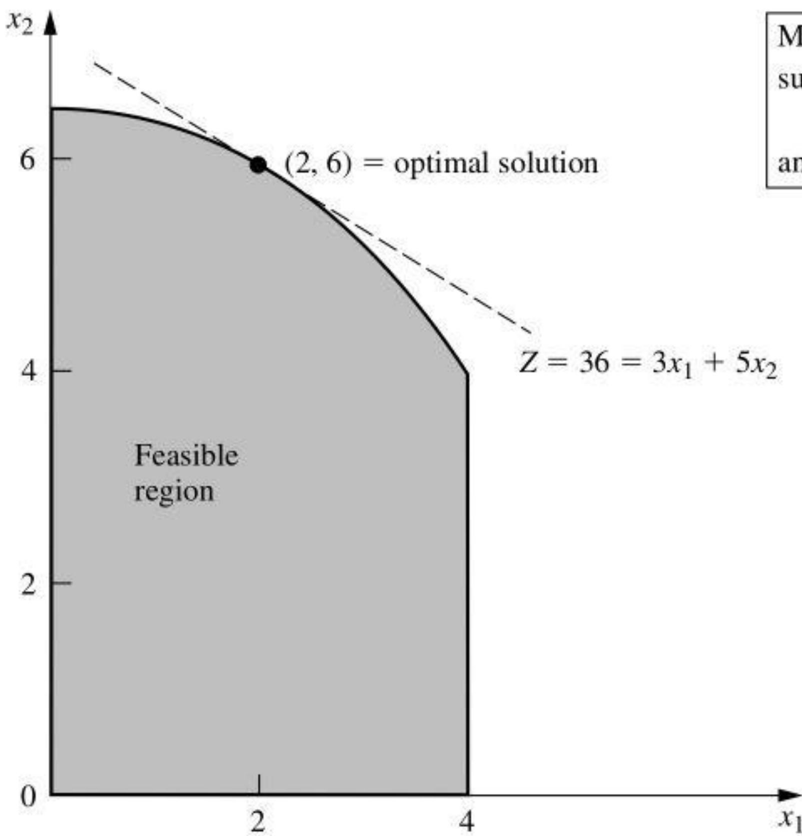


ILUSTRAÇÃO GRÁFICA

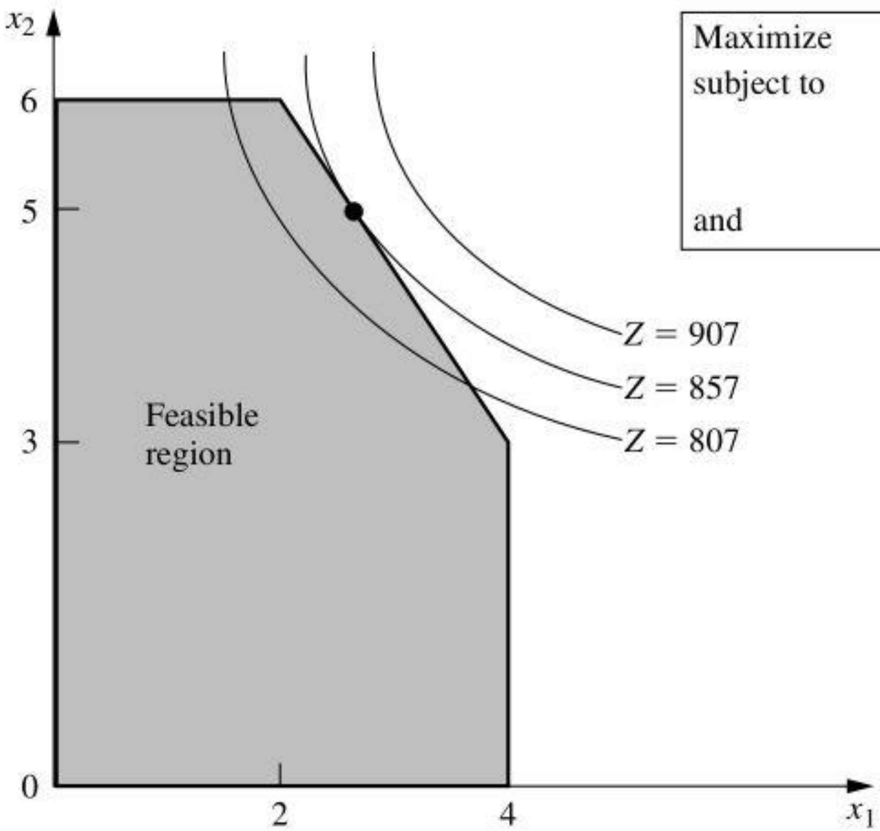
Exemplo: Problema da Wyndor Glass Co. com um constrangimento não linear



$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & Z = 3x_1 + 5x_2, & \\ \text{subject to} & x_1 \leq 4 & \\ & 9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216 & \\ \text{and} & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \end{array}$$

ILUSTRAÇÃO GRÁFICA

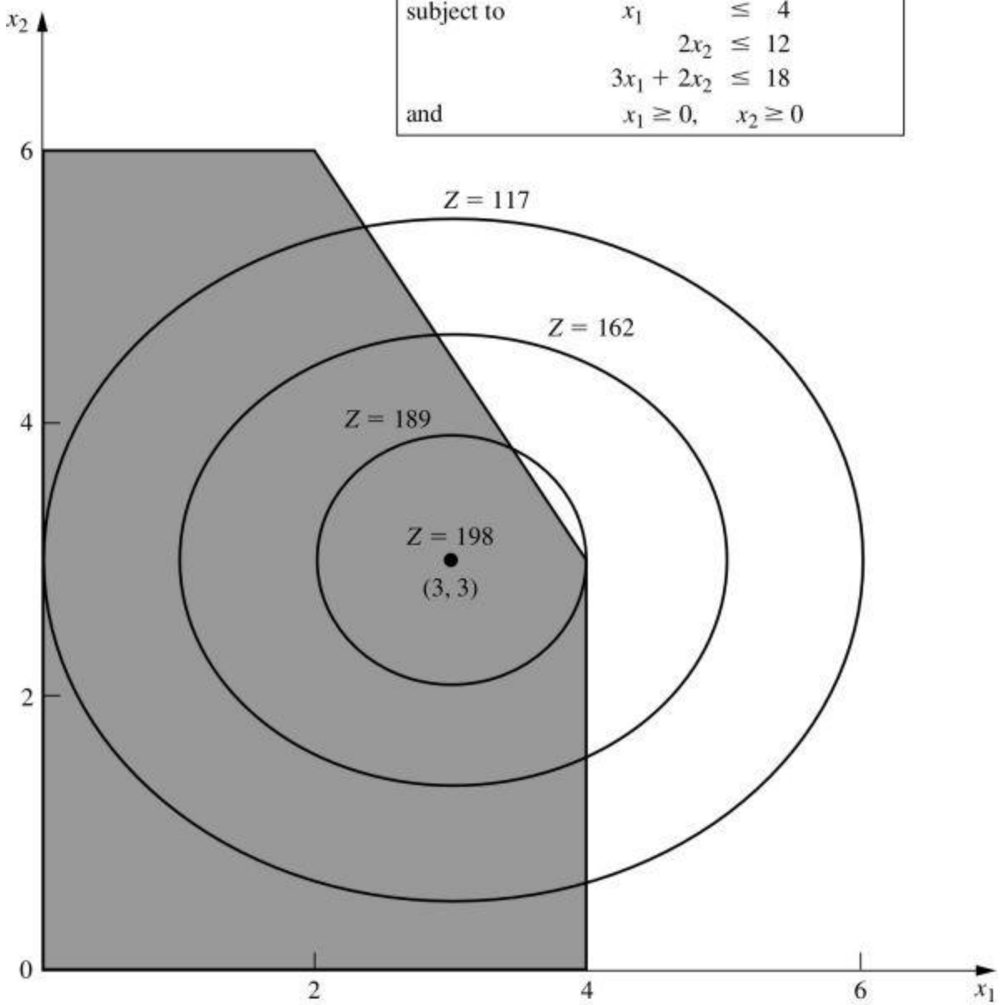
Exemplo: Problema da Wyndor Glass Co. com uma função de custo não linear



$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximize} & Z = 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2, & & \\
\text{subject to} & x_1 & \leq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 18 \\
\text{and} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

ILUSTRAÇÃO GRÁFICA

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Maximize} & Z = 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2, & & \\
\text{subject to} & x_1 & \leq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 18 \\
\text{and} & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$



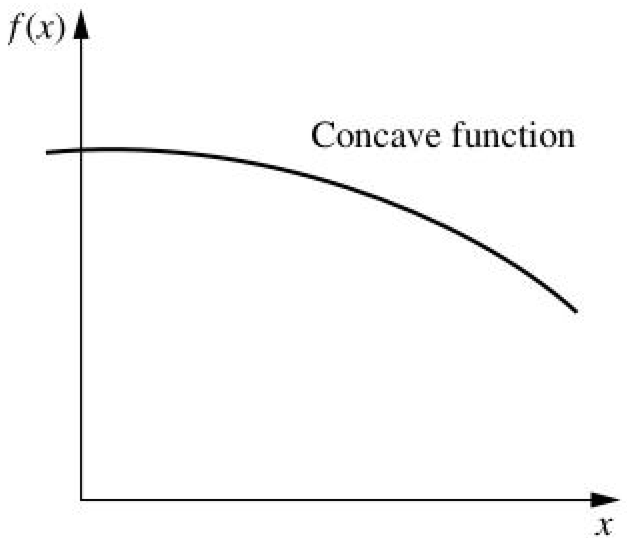
Exemplo: Problema da Wyndor Glass Co. com uma função de custo não linear diferente da anterior

FUNÇÕES CONCAVAS E CONVEXAS

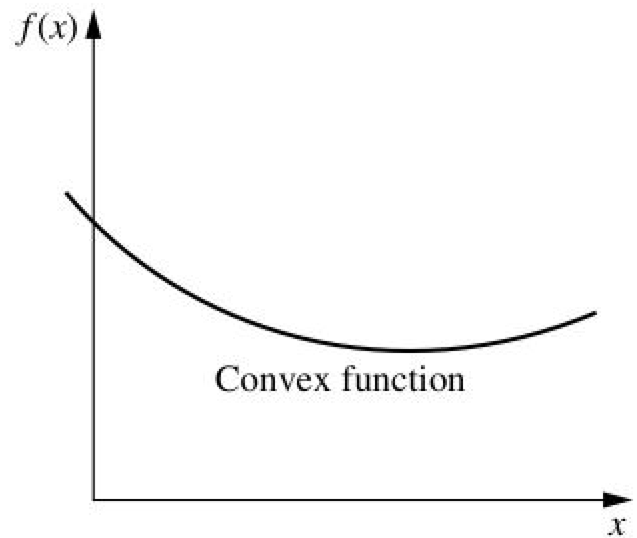
•Um máximo é global quando: $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \leq 0$ *, para todo x*

Uma função com a curva para baixo, é uma **função côncava** (*"concave downward"*).

Uma função com a curva para cima, é uma **função convexa** (*"concave upward"*).



(*a*)



(*b*)

ÓPTIMO LOCAL GARANTIDO

- Na programação não linear sem constrangimentos e uma função objectivo côncava, o máximo local é o máximo global.

- Na programação não linear sem constrangimentos e uma função objectivo convexa, o mínimo local é o mínimo global.

- Isto também se verifica na presença de constrangimentos, se a "*feasible region*" for um conjunto convexo.

- A "*feasible region*" *de um problema não linear é um conjunto convexo se todas as funções* $g_i(x)$ forem convexas.

TIPOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

➢**Optimização não constrangida:** sem constrangimentos.

Maximizar f(x)

•Condição necessária para a solução x* = x ser óptima:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0 \ \ , x = x^*, para\ j = 1,2, \ldots, n$$

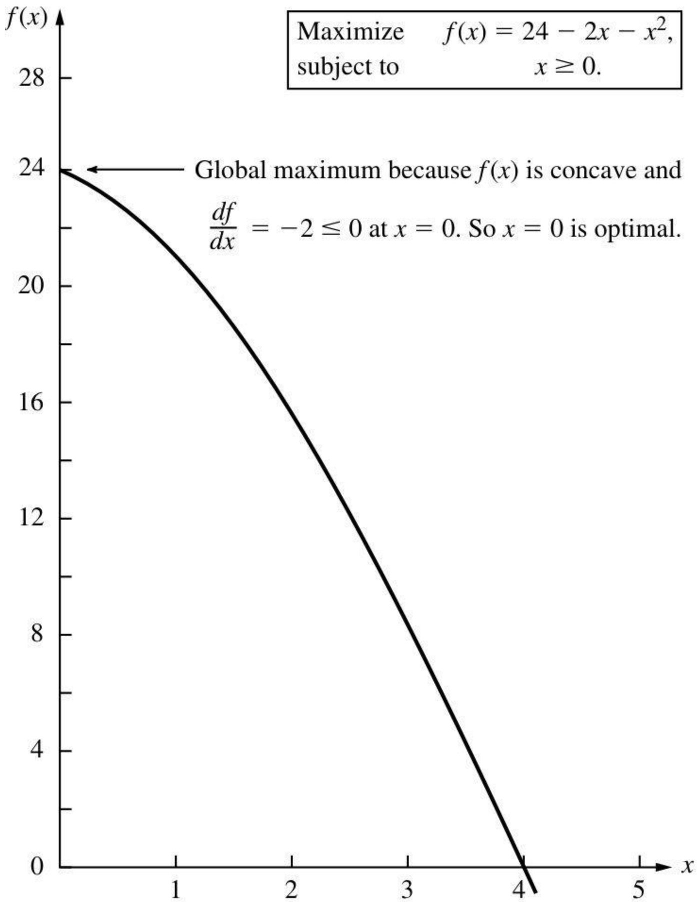
• Quando *f(x)* é côncava esta condição é suficiente.

• Quando x_j tem um constrangimento $x_j \geq 0$, as condições suficientes alteram-se para:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \begin{cases} \leq 0 & , x = x^*, se\ x_j^* = 0 \\ = 0 & , x = x^*, se\ x_j^* > 0 \end{cases}$$

TIPOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Exemplo: para $x_j \geq 0$



TIPOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

➢**Optimização linearmente constrangida:** todos os constrangimentos são lineares e a função objectivo não é linear.

•Caso especial: Programação quadrática (a função objectivo é quadrática*)*

➢**Programação convexa:**

Para um problema de maximização:

1. *f (x) é uma função côncava.*
2. Todos g_i *(x) são funções convexas.*
   - Para um problema de minimização, *f (x) tem de ser uma função convexa.*

TIPOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

➢**Programação separável** é um caso especial da programação convexa com uma assumpção adicional: Todos *f(x) e* $g_i(x)$ *são funções separáveis*.

•Uma função separável é uma função onde cada elemento involve apenas uma variável (satisfaz a assumpção de aditividade mas não de proporcionalidade).

➢**Programação não convexa:** O óptimo local pode não ser o óptimo global.

TIPOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

➢**Programação geométrica** é aplicada a problemas de engenharia, económicos e estatísticos.
A função objectivo e constrangimentos estão na forma de:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i P_i(x), \qquad onde\ P_i(x) = x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}}$$

- c_i e a_{ij}, são tipicamente constrangimentos físicos.

- Quando todos os c_i são estritamente positivos, as funções são polinómios generalizados positivos.

- Se a função objectivo for para ser minimizada, um algoritmo de programação convexa pode ser aplicado.

TIPOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

➢**Programação fraccional**

$$Maximizar\ f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

• Quando *f(x)* está na forma de programação linear fraccional "linear fractional programming form":

$$f(x) = \frac{\mathbf{cx} + c_0}{\mathbf{dx} + d_0}$$

o problema pode ser transformado num problema de programação linear.

SOLUÇÃO NUMÉRICA

- MÉTODO DE NEWTON
- MÉTODO DA BISSECÇÃO

- O método de bissecção é menos eficiente que o método de Newton, mas é mais seguro assegurar a convergência.

BISSECÇÃO

- É um algoritmo de procura de raízes que trabalha ao dividir o intervalo ao meio e seleccionando o sub-intervalo que tem a raiz.

- O método de bissecção divide o intervalo em dois, usando um terceiro ponto

$$c = (a+b)\ /\ 2$$

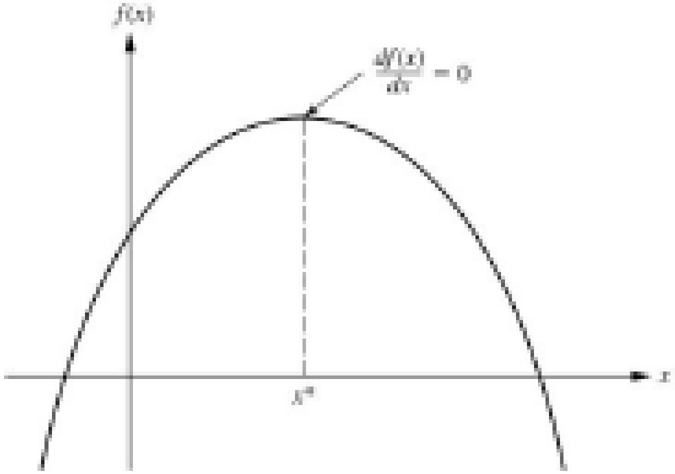
- Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$, então este método converge para a raiz de f.

MÉTODO BISSECÇÃO

$$\frac{df(x)}{dx} > 0 \quad \text{if } x < x^*,$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{if } x = x^*,$$

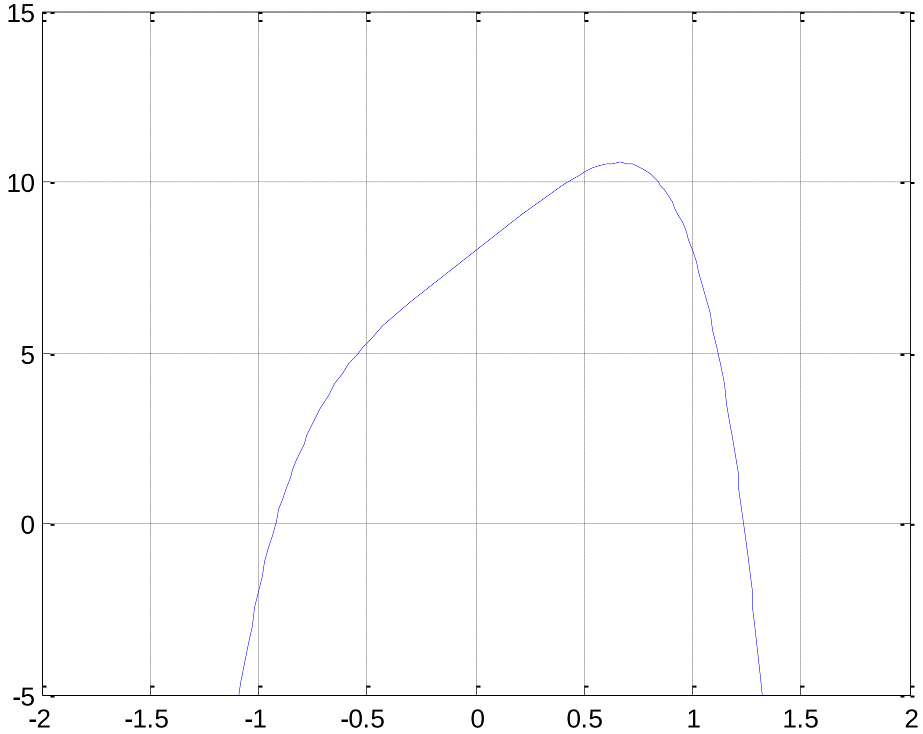
$$\frac{df(x)}{dx} < 0 \quad \text{if } x > x^*.$$



Se a derivada é positiva: x é o menor ponto de x*
Se a derivada é negativa: x é o maior ponto de x*
Se a derivada é zero: x é igual a x*

EXEMPLO BISSECÇÃO

Maximizar : $f(x)=8+5x-3x^4-2x^6$



EXEMPLO BISSECÇÃO

Maximizar : $f(x)=8+5x-3x^4-2x^6$

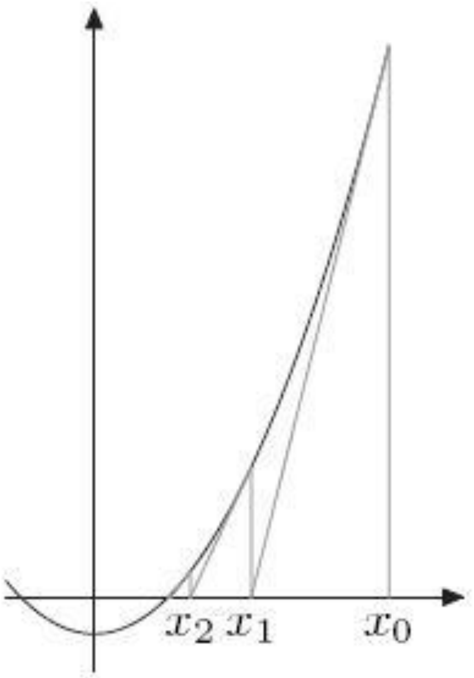
$$\frac{df(x)}{dx} = 5 - 12(x^3 + x^5) \qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -12(3x^2 + 5x^4)$$

Iteração	df(x)/dx	x_{min}	x_{max}	Nova x'	f(x')	Erro
0		0	1	0,5	10,28125	-0,16357422
1	3,125	0,5	1	0,75	10,4448242	-0,10320282
2	-2,91015625	0,5	0,75	0,625	10,548027	-0,00807464
3	0,92590332	0,625	0,75	0,6875	10,5561017	-0,00898187
4	-0,74249649	0,625	0,6875	0,65625	10,5650835	0,00101368
5	0,14793217	0,65625	0,6875	0,671875	10,5640699	-0,00134745
6	-0,28248901	0,65625	0,671875	0,6640625	10,5654173	-3,9761E-05
7	-0,06367434	0,65625	0,6640625	0,66015625	10,5654571	-3,2215E-05
8	0,04301835	0,66015625	0,6640625	**0,66210938**	10,5654893	

$\varepsilon = 0,001$

MÉTODO NEWTON

1. Toma-se um ponto qualquer da função,
2. calcula-se a equação da tangente (derivada)da função nesse ponto,
3. calcula-se a intercepção da tangente ao eixo das abcissas,
4. calcula-se o valor da função nesse ponto,
5. e repete-se o processo, que deve tender para uma das raízes da função rapidamente.



MÉTODO NEWTON

Aproximação quadrática :

→ **Série de Taylor** truncada na segunda derivada

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2$$

Maximizando:

$$f'(x_{i+1}) \approx f'(x_i) + f''(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

EXEMPLO NEWTON

Maximizar : $f(x)=8+5x-3x^4-2x^6$

$$\frac{df(x)}{dx} = 5 - 12(x^3 + x^5) \qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -12(3x^2 + 5x^4)$$

Iteração	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	x_{i+1}
1	0,5	10,28125	3,125	-12,75	0,745098039
2	0,74509804	10,4586213	-2,71968681	-38,4790554	0,674418372
3	0,67441837	10,5632589	-0,35531104	-28,7870183	0,66207562
4	0,66207562	10,5654896	-0,00918231	-27,309123	0,661739384
5	0,66173938	10,5654912	-6,6294E-06	-27,2696972	**0,661739141**

$\varepsilon = 0,0000001$

GRADIENTE

Para problemas onde não temos constrangimentos

→ Variáveis múltiplas:

x = (x1, x2,..., xn)

Procura numérica → MÉTODO DO GRADIENTE

- **Exemplo:**

$$Max\ f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - xy - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10y - x - 2$$

EXEMPLO GRADIENTE

$$Ponto\ do\ inicio:\ \vec{x} = (0{,}0) \rightarrow \nabla f(0{,}0) = (0, -2)$$

$$x = 0 + t\,(0) = 0 \qquad\qquad y = 0 + t\,(-2) = -2t$$

$$f(0, -2t) = 20t^2 + 4t$$

$$\frac{d}{dt}(20t^2 + 4t) = 40t + 4 = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{10}$$

$$\rightarrow x'_{i+1} = x'_i + t\nabla f(x'_i) \rightarrow x' = (0{,}0) - \frac{1}{10}\,(0, -2) = (0, \frac{1}{5})$$

EXEMPLO GRADIENTE

$$\nabla f\left(0,\frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5},0\right)$$

$$x = \left(0,\frac{1}{5}\right) + t\left(-\frac{1}{5},0\right) = \left(-\frac{t}{5},\frac{1}{5}\right)$$

$$f\left(x'_i + t\nabla f(x'_i)\right) = \frac{1}{5}\left(t^2 + \frac{t}{5} - 1\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\left(t^2 + \frac{t}{5} - 1\right)\right) = \frac{1}{5}\left(2t + \frac{1}{5}\right) = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{10}$$

$$\rightarrow x'_{i+1} = x'_i + t\nabla f(x'_i) \rightarrow x' = \left(0,\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5},0\right) = \left(\frac{1}{50},\frac{1}{5}\right)$$

… iterações sucessivas…

PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Fim de apresentação

Obrigado