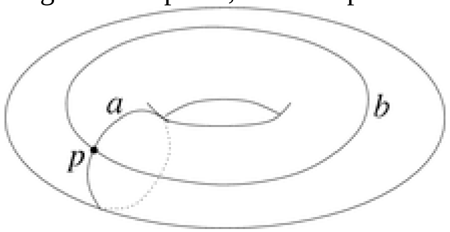
# GRUPO FUNDAMENTAL

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.




O grupo fundamental de um toro é gerado pelas duas curvas *a* e *b*.

O **grupo fundamental** é o primeiro dos grupos de homotopia. Este grupo mede a conectividade de um espaço topológico. Um espaço topológico com grupo fundamental trivial diz-se **simplesmente conexo**.

## Definição

Seja $X$ um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. O grupo fundamental de $X$ baseado em $x$, representado por $\pi_1(X, x)$ é definido pelo conjunto das classes de homotopia dos lacetes centrados em $x$ onde impomos a operação de grupo induzida pela operação justaposição: se $\gamma$ e $\gamma'$ são lacetes centrados em $x$, e $[\ ]$ indica a classe de homotopia, então $[\gamma][\gamma'] = [\gamma * \gamma']$.

Toda curva $\gamma$ de $x$ a $y$ define um homomorfismo de grupos entre $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(X, y)$ por $\gamma_*[\alpha] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$,. Este homomorfismo é inversível e logo, é um isomorfismo de grupos. Assim, quando $X$ é conexo por arcos, o ponto base não tem qualquer influência no grupo fundamental, ou seja, $\pi_1(X, x)$ é isomorfo a $\pi_1(X, y)$, para quaisquer $x, y \in X$.

## Aplicações contínuas e homomorfismos

Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua tal que $f(x) = y$, então ela induz um homomorfismo $f_*$ entre $\pi_1(X, x)$ e $\pi_1(Y, y)$ dado por $f_*[\gamma] = [f \circ \gamma]$. Se esta aplicação for um homeomorfismo, então o homomorfismo de grupos induzido é um isomorfismo. Um fato importante é que $f_*([\gamma] * [\gamma'] = [f \circ \gamma] * [f \circ \gamma']$.

## Functorialidade

Seja $Top_*$ a categoria dos espaços topológicos com base em um ponto. Isto é, a categoria cujos objetos são duplas $(X, x)$, onde o primeiro elemento é um espaço topológico e o segundo um ponto pertencente a ele, e os morfismos $f : (X, x) \to (Y, y)$ são aplicações contínuas $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$. Então $\pi_1$ pode ser visto como um functor entre $Top_*$ e $Grp$. Isso implica entre outras coisas que dois espaços topológicos conexos por caminhos com grupos fundamentais diferentes não podem ser homeomorfos.