Fatorando um polinômio quártico

17 de dezembro de 2021 / Álgebra / Estratégias / Por Dave Peterson

A fatoração de um polinômio quadrático (grau 2) é um tópico padrão em álgebra; mas para graus mais elevados, as coisas ficam muito mais difíceis. Aqui veremos algumas perguntas antigas do site *Ask Dr. Math* sobre fatoração de polinômios **quárticos** (grau 4). Não existe um método padrão, mas vários truques interessantes que você pode querer conhecer.

Dois fatores quadráticos… ou diferença de quadrados?

Vamos começar com isso, de Adam em 1998:

```
Fatores não lineares

Eu preciso fatorar x^4 + 4 .

Disseram-me que fatorar a soma de dois números "quadrados"
não é possível; no entanto, meu instrutor indica que isso
pode ser feito. Eu não tive sorte. Ele está puxando minha
perna?
```

Podemos fatorar uma "diferença de quadrados" como , mas isso é uma *soma* de quadrados, e isso não pode ser fatorado... a menos que você tenha permissão para usar números complexos. Voltaremos a essa ideia!$(x^2)^2 - 2^2$

O doutor Pete respondeu, começando com que tipo de fatores podemos esperar:

```
Agora, geralmente, quando pensamos em fatorar um
polinômio, estamos pensando em encontrar uma forma:

  (x - a)(x - b)(x - c)...

onde a, b, c, ... são constantes. Mas a fatoração está
intimamente ligada a um problema semelhante, que é
encontrar raízes de uma função. Em particular, se você
tiver uma função polinomial f(x), e resolver a equação:

  f(x) = 0

então o que você está encontrando são os valores de a, b,
c,... na forma fatorada. Por exemplo, diga:

  f(x) = x^2 - 4

Então, observe que f(2) = f(-2) = 0; isto é, x = 2 e x =
-2 são raízes de f(x). Então f(x) tem a forma fatorada:

  f(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)
```

Assim , os fatores **lineares correspondem às raízes reais** (também chamadas zeros) do polinômio e, em particular, às raízes **racionais** , quando estamos fatorando "sobre os inteiros", o que significa que permitimos apenas coeficientes inteiros. E se não houver nenhum?

```
No entanto, no caso em que:

  f(x) = x^4 + 4

vemos que não há valor real de x para o qual f(x) = 0,
porque x^4 é sempre não negativo. Portanto, não se pode
esperar uma fatoração da forma:

  (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)

onde a, b, c, d são todos números reais. No entanto, pode
ser possível fatorar como:

  (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)

isto é, como um par de quadráticas irredutíveis . Por que
isso pode ser possível ficará mais claro em um momento.
```

O que pode acontecer aqui é que as raízes *a* , *b* , *c* e *d* podem de fato ser números **complexos** , que virão em pares conjugados (assumindo que os coeficientes do polinômio são inteiros, ou mais geralmente números racionais), de modo que os produtos de pares de fatores formarão fatores quadráticos irredutíveis (não fatoráveis). O mesmo é verdadeiro se alguns de *a* , *b* , *c* e *d* forem reais, mas **não racionais** .

```
Por enquanto, suponha que:

  x^4 + 4 = (x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)

para algumas constantes desconhecidas p, q, r, s, que são
todos números reais. Expandindo o lado direito, vemos que:

  x^4 + 4 = x^4 + (p+r)x^3 + (q+s+pr)x^2 + (ps+qr)x + qs

Se igualarmos os coeficientes em ambos os lados desta
equação (por quê?), então descobrimos que:

       p + r = 0
  q + s + pr = 0
     ps + qr = 0
          qs = 4
```

Igualamos os coeficientes porque queremos que a equação seja verdadeira *para todo x* ("identicamente igual"), de modo que os dois lados sejam realmente o *mesmo polinômio* .

Observe que temos quatro equações em quatro incógnitas. Isso nos dá esperança de que podemos encontrar uma solução, embora, como um sistema de equações não lineares, seja um pouco mais difícil do que você pode estar acostumado.

```
Da primeira equação p = -r, e substituindo isso na
terceira equação dá r(-s + q) = 0. Isso significa r = 0,
e/ou q = s .

Suponha que r = 0. Então p = 0, e temos da segunda equação
que q + s = 0. Mas isso é impossível , pois qs = 4. Então
devemos ter que q = s e, portanto, da quarta equação, q =
s = 2 ou q = s = -2 .

Suponha q = s = -2. Então, da segunda equação, temos que
-2 - 2 + pr = 0, o que implica pr = 4. Como r = -p,
descobrimos que -p^2 = 4, o que é impossível .

Agora suponha que p = r = 2. Da segunda equação, temos
então 2 + 2 + pr = 0, ou pr = -4. Como p = -r, segue-se
que r^2 = 4. Portanto, r = 2 ou -2, ep = -2 ou 2 . Observe
que isso faz sentido, pois isso produz a fatoração:

  x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)

e claramente p e r são intercambiáveis, desde que tenham
sinais opostos. Pode-se verificar se a fatoração está
correta multiplicando o lado direito.
```

Fatores quadráticos, raízes complexas

```
Agora, para entender por que o polinômio x^4 + 4 fatora em
duas quadráticas , mas não quatro fatores lineares ,
tentamos encontrar as raízes de, digamos, x^2 + 2x + 2,
que é uma das quadráticas. Claramente, qualquer raiz desse
polinômio também é uma raiz de x^4 + 4. Usando a fórmula
quadrática, descobrimos que as raízes são dadas por:

  x = (-2 + Sqrt[-4])/2 , (-2 - Sqrt[-4])/2
ou:
  x = -1 + i , -1 - i

onde i é a raiz quadrada de -1. Esses números são números
complexos , o que explica por que uma fatoração linear não
pode ser encontrada.
```

Alternativamente, poderíamos ir em frente e tratar o polinômio como uma **diferença de quadrados** : modo que

$$x^4 + 4 = x^4 - (-4) = (x^2)^2 - (2\,eu)^2 = (x^2 - 2\mathrm{i})(\_x^2 + 2\,e)$$

$$x = \pm\sqrt{2}\ \text{com}\ x = \pm\sqrt{-2\,e}$$

Existem várias maneiras de encontrar a raiz quadrada de um número complexo; o mais fácil normalmente é usar a forma polar (ou exponencial), mas também podemos supor que e da mesma forma para o outro caso. Portanto, nossa fatoração linear completa (sobre os números complexos) é

$$\begin{gathered}(x + yeu)^2 = 2\,eu \\ (x^2 - y^2) + 2\,x\,ye = 2\,e \\ x^2 - y^2 = 0\,,\ 2\,x\,y = 2 \\ x = y = \pm 1\end{gathered}$$

$$(x - (-1 + i))(x - (-1 - i))(x - (1 + i))(x - (1 - i))$$

O produto dos dois primeiros fatores (conjugados complexos) é Estamos apenas seguindo o processo do Dr. Pete ao contrário.

$$((x + 1) - i))((x + 1) + i)) = (x + 1))^2 - eu^2 = x^2 + 2\mathrm{x} + 1 + 1 =$$

$$\_ \quad x^2 + 2\mathrm{x} + 2\,\_$$

Dois fatores quadráticos, usando simetria

A próxima pergunta é de 1996 (anônima):

```
Factoring Quartics

Você pode me ajudar a fatorar f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 -
6x + 1 e resolver f(x) = 0?
```

Doutor Liu respondeu:

```
Resolver equações polinomiais de grau superior a 2
(quadrático) geralmente envolve algumas suposições . Por
exemplo, você primeiro tenta o TESTE DE RAIZ RACIONAL para
ver se ele tem raízes racionais. Se nenhum, então o
problema é certamente mais difícil e, com sorte (ou se o
problema for projetado para ser solucionado ), você o
fatora em um produto de polinômios QUADRÁTICOS.

TESTE DE RAIZ RACIONAL

As únicas raízes racionais possíveis de um polinômio
(conjunto igual a zero) são números racionais cujos:

  (i) numeradores são divisores do termo CONSTANTE

  (ii) denominadores são divisores do COEFICIENTE do MAIOR
período de graduação.

Para o presente caso, como o termo constante e o
coeficiente líder são ambos 1, precisamos apenas testar os
números racionais 1 e -1 . O cálculo direto mostra que
nenhum destes satisfaz a equação, então a equação NÃO tem
raiz racional .
```

Este é o primeiro método que eu normalmente tentaria. Quando os coeficientes têm poucos fatores, geralmente é o caminho mais rápido. Aqui, como os únicos candidatos são 1 e -1, usamos apenas a divisão sintética com esses dois números (equivalente a avaliar o polinômio para esses valores), e eliminamos essa possibilidade.

Existe uma "fórmula" para equações quárticas (como também para equações cúbicas, mas não para qualquer grau superior), mas acho que nunca tentei usá-la!.

Como vimos acima, quando não há raízes racionais, não há fatores lineares (sobre os inteiros), o que deixa apenas uma possibilidade para os fatores:

```
A única maneira de resolver a equação é FATORIZAÇÃO em um
produto de dois fatores QUADRÁTICOS. Geralmente,
tentaríamos:

  (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)

No entanto, no presente caso, observe que o polinômio é
SIMÉTRICO. Então, tentamos ver se é possível arranjar
esses fatores quadráticos para serem SIMÉTRICOS também. Em
outras palavras, tentamos fatorá-lo na forma:

  (x^2 + ax + 1)(x^2 + cx + 1)
```

A simetria referida é que os coeficientes são 1, -6, 11, -6, 1, lendo o mesmo em ambas as direções. Mas também poderíamos chegar à mesma conclusão simplesmente porque o termo constante é 1, então os termos constantes de ambos os fatores devem ser 1.

```
Expandindo este produto, temos:

  (x^2 + ax + 1)(x^2 + cx + 1)
   = x^4 + ax^3 + x^2 + cx^3 + acx^2 + cx + x^2 + ax + 1
   = x^4 + (a+c)x^3 + (ac + 2)x^2 + (a+c)x + 1.

Comparando com o polinômio dado, gostaríamos de ter:

  a + c = -6
  ac + 2 = 11 ---> ac = 9

A única possibilidade é a = c = -3.

Se você puder ver isso imediatamente, isso é maravilhoso,
e você deve prosseguir diretamente para o próximo
parágrafo.
```

Como antes, igualamos os coeficientes correspondentes porque eles devem ser o mesmo polinômio, termo por termo.

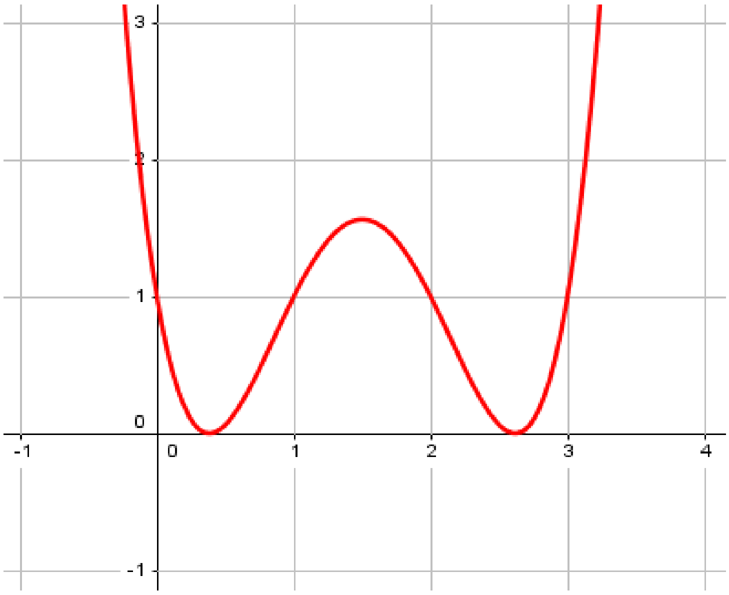
```
Caso contrário, você encontra esses números a e c
eliminando primeiro um deles e vê que você se depara com
uma equação QUADRÁTICA:

        -6 - a = c
       a(-6 - a) = 9
     -6a - a^2 = 9
  a^2 + 6a + 9 = 0
       (a+3)^2 = 0
             a = -3

A partir disso, c = -3 também.
```

A maneira rápida é pensar como fazemos ao fatorar uma quadrática, e apenas listar os produtos possíveis dando 9, procurando um par de fatores cuja soma seja -6. Eles são obviamente -3 e -3.

Como *a* e *c* são iguais, os dois fatores quadráticos são os mesmos.

```
Isso significa que o polinômio dado é de fato um QUADRADO:

  x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = (x^2 - 3x + 1)^2

Suas raízes são, portanto, as de x^2 - 3x + 1 = 0

Agora, pela fórmula quadrática, temos:

  x = (3 +/- Sqrt 5)/2.

Cada um deles é contado duas vezes como uma raiz da
equação do 4° grau.
```

Aqui está o gráfico do polinômio, mostrando zeros duplos em e : $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx\ 2{,}618 \frac{3-\sqrt{5}}{2}\ \approx\ 0{,}382$



Usando substituição

Nossa terceira pergunta é de John em 2004:

```
Resolvendo uma equação quártica com substituições

Estou tentando resolver y(y + 1)(y + 2)(y + 3) = 7920 ,
que é um problema do filho do meu amigo. Primeiro
multipliquei tudo:

         (y^2 + y)(y + 2)(y + 3) = 7920
        (y^3 + 3y^2 + 2y)(y + 3) = 7920
  y^4 + 6y^3 + 11y^2 + 6y - 7920 = 0

Não consigo resolver por fatoração. Estou no caminho
certo? Não faço matemática há mais de 10 anos, e acho que
esqueci quase tudo que aprendi!

Você pode por favor me dar uma dica?
```

Doutor Douglas respondeu:

```
Oi John.

Seu trabalho até agora está bom e você está tentando
fatorar esta última equação: y^4 + 6y^3 + 11y^2 + 6y -
7920 = 0.

Você pode fatorar a equação de várias maneiras:

1. Você pode dividir por suposições como (y-3), (y+6), (y-
8), ... e ver se alguma delas funciona. Como isso foi dado
como um problema para um estudante, suponho que as raízes
sejam provavelmente números inteiros, portanto, essa não é
uma abordagem irracional.
```

Isso pode ser feito começando com o teorema da raiz racional; ou poderia ser feito simplesmente adivinhando uma solução para a equação original. Como não está longe de , podemos tentar valores de perto ; tentando encontramos que , onde a média dos quatro fatores é 9,5. Ou, pode-se apenas fatorar o número 7920 e tentar organizar os fatores primos como um produto de inteiros consecutivos. Mas ainda nos perguntaríamos (se tivéssemos o gene matemático) se esta é a única solução (real)! Veremos …$y(s+1)(\_+2)(y+3) = 7920$ $y^4 = 7920$ y $\sqrt[4]{7920} \approx 9{,}43$ $y = 8$ $(8)(9)(10)(11) = 7920$

Usando simetria novamente

```
2. Outra maneira de fazer isso é perceber que as quatro
raízes estão igualmente espaçadas, porque os fatores vêm
em uma bela progressão aritmética: y, y+1, y+2, y+3. Então
vamos calcular a média deles e definir u = y + 3/2 como o
centro deste conjunto de quatro números, e a equação se
torna

  (u - 3/2)(u - 1/2)(u + 1/2)(u + 3/2) - 7920 = 0

Isso é bom, porque os fatores se multiplicam de tal forma
que os termos cruzados se cancelam:

  [(u - 3/2)(u + 3/2)][(u - 1/2)(u + 1/2)] - 7920 = 0
      (u^2 - 9/4) (u^2 - 1/4) - 7920 = 0
```

Há um monte de insights escondidos aqui! (Se você estiver curioso, voltaremos a como ele escolheu essa transformação.) Ele combinou os fatores para fazer duas diferenças de quadrados, o que é uma boa maneira de economizar trabalho.

```
E se fizermos mais uma substituição, usando v = u^2 , esta
É uma equação quadrática em termos de v:

  (v - 9/4)(v - 1/4) - 7920 = 0
   v^2 - 10v/4 + 9/16 - 7920 = 0
  16v^2 - 40v + 9 - 16*7920 = 0
  16v^2 - 40v - 126711 = 0

Agora você pode fatorar esse trinômio quadrático usando
vários métodos ou pode usar a fórmula quadrática com a =
16, b = -40 ec = 126711.

Você descobrirá que esta equação quadrática fatora da
seguinte forma:

  16*(v - 90,25)(v + 87,75) = 0

e tem raízes de v = 90,25 ou -87,75
```

Se quisermos evitar decimais (como normalmente faço), podemos dividir os 16 entre os outros fatores, obtendo a equação As raízes são e .

$$(4v - 361)(4v + 351) = 0$$

$\frac{361}{4}$ $-\frac{351}{4}$

```
Como v = u^2, a segunda raiz não leva a nenhuma solução
real para u, e devemos ter

    v = 90,25
  u^2 = 90,25
    u = sqrt(90,25)
    u = 9,5 ou -9,5

o que significa que voltar para

  (u - 3/2)(u - 1/2)(u + 1/2)(u + 3/2)

nosso conjunto de ys é {8, 9, 10, 11} ou {-11, -10, -9,
-8}.

Este é um problema difícil por causa das etapas de
substituição, então não se sinta mal por não poder fazer
isso!
```

Portanto, existem, de fato, duas soluções reais, não apenas uma solução positiva que poderíamos encontrar facilmente!

Invertendo todas as substituições, nossa equação fatora como

$$(4v - 361) (4v + 351) = 0 \_\_$$

$$(4v^2\text{ocee}\ 361) (4v^2\text{oc}+ 351) = 0$$

$$(2u\text{-} \_\_ \sqrt{361}) (2u + \sqrt{361}) (4v^2\text{oc}+ 351) = 0$$

$$\left(2 \left(e + \frac{3}{2} \right) - 19 \right) \left(2 \left(a + \frac{3}{2} \right) + 19 \right) \left(4 \left(s + \frac{3}{2} \right)^2 + 351 \right) = 0$$

$$(2\, anos - 16) (2\, anos + 22) \left(4 \left(y^2 + 3\, anos + \frac{9}{4} \right) + 351 \right) = 0$$

$$4 (s - 8) (y + 11) (4y^2 + 12\, anos + 9 + 351) = 0$$

$$4 (s - 8) (y + 11) (4y^2 + 12\, anos + 360) = 0$$

$$16 (s - 8) (y + 11) (y^2 + 3\, anos + 90) = 0$$

Por que essa substituição?

João respondeu:

```
Obrigado pela resposta rápida. Acompanhei a maior parte do
seu trabalho, mas estou um pouco confuso com o passo em
que você escolheu u = y + 3/2.  Por que preciso definir
"u" como o centro do conjunto de números, não o início ou
o fim dos números? Isso é uma teoria matemática?
```

Doutor Douglas respondeu:

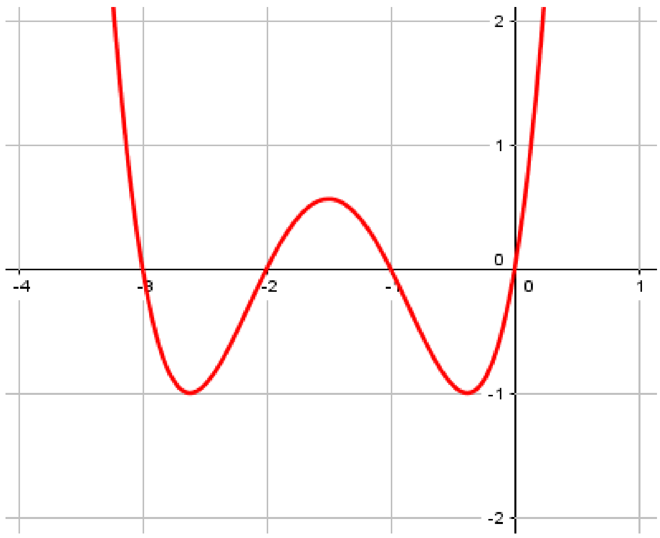
```
Essa é uma pergunta muito boa!

Principalmente isso foi simplesmente um palpite inspirado
, guiado pelo nosso desejo de aproveitar a simetria
esquerda-direita das raízes . Ao fazer isso, separamos os
termos ímpares (y^3 e y^1) dos termos pares (y^4, y^2,
y^0), e o último conjunto é o que leva ao nosso trinômio
quadrático por meio da substituição v = y^2. Observe que
esse truque funcionou apenas por causa da boa progressão
dos fatores {y, y+1, y+2, y+3}. Teria sido muito mais
difícil trabalhar com o conjunto {y, y+1, y+2, y+4}.
```

João fechou:

```
Obrigado Dr. Math por me ajudar. Seu trabalho foi
interessante e seus comentários úteis. Eu agradeço!
```

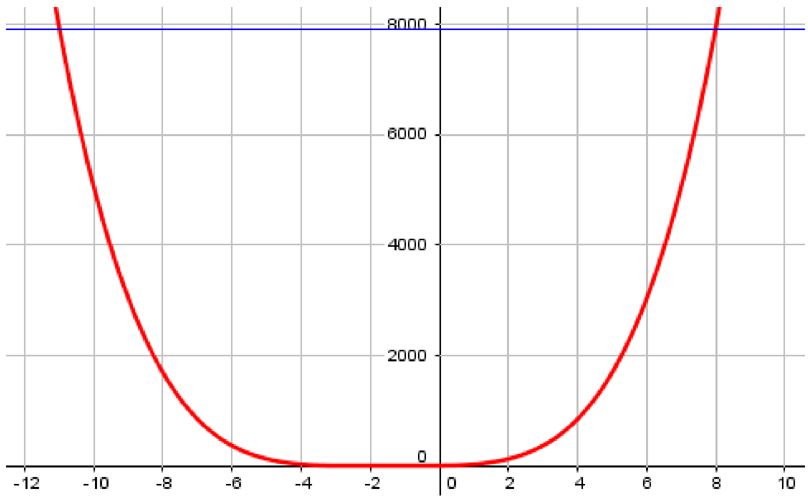
Usei a mesma técnica em Fun with a Quartic Equation , que tem links para algumas dessas respostas e muito mais.

Aqui está um gráfico da função à esquerda de nossa equação em sua forma original:



Podemos ver aqui que a função é simétrica em relação à linha ; a substituição deslocou o gráfico 1,5 unidades para a direita, de modo que ele fosse simétrico em relação ao eixo y , tornando-o uma função par e, portanto, fácil de resolver.$x = -\frac{3}{2}$

Para ver as soluções (onde esta função cruza a linha), precisamos diminuir o zoom consideravelmente:$y = 7920$



Pensamento positivo

Finalmente, temos uma pergunta de Zubin em 2005:

> Fatorando x^4 + (x^2)(y^2) + y^4
>
> Existe alguma maneira ou padrão matemático para fatorar o polinômio **x^4 + (x^2)(y^2) + y^4** , já que ele fatora nos polinômios x^2 + xy + y^2 e x^2 - xy + y^2, que não são fatoráveis?
>
> A princípio parecia simplesmente um quadrado de duas somas, mas infelizmente **o termo médio não é duplicado** . A única maneira que eu poderia fatorar isso era adivinhando e verificando. Acho muito difícil colocar esse polinômio em qualquer categoria. Não fatora por agrupamento, fatoração sintética, divisão etc. Agora fui levado a acreditar que ainda não cheguei ao ponto em minha educação em que posso fatorar isso. Essa foi uma pergunta que surgiu quando meu professor de pré-cálculo teve que revisar a fatoração.

O doutor Schwa respondeu:

> Olá Zubin -
>
> O que você precisa é da estratégia de solução de problemas chamada " **wfull thinking** ". DESEJO que a pergunta fosse x^4 + **2 x^2 y^2** + y^4, porque então eu poderia fatorar em (x^2 + y^2)^2.
>
> Como posso fazer isso? Bem, eu não posso simplesmente mudar a pergunta, então se eu adicionar um x^2 y^2 a ela para atender ao meu desejo, **também devo subtrair** um x^2 y^2. Essa dica ajuda você a ver como encontrar os fatores?

Aqui está o que acontece: E foi isso que Zubin descobriu.

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = \ (x^4 + \ 2x^2y^2 + y^4) \text{ - } x^2y^2$$
$$= \ (x^2 + y^2)^2 - \ (\ xy \ \_)^2 = \ (x^2 + y^2 + \ x\ y)\ (x^2 + y^2 - \ xy \ \_)$$

A próxima maneira pode ser descrita como uma instância de reconhecimento de um padrão familiar:

Há outro método também, que é saber como **fatorar uma diferença de cubos :**

```
(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).
```

Agora, se dividirmos ambos os lados por (a - b), você pode ver que o que você tem **corresponde ao padrão do lado direito :**

```
 (a^3 - b^3)
----------- = (a^2 + ab + b^2)
   (a - b)
```

Definindo a = x^2 e b = y^2, temos:

```
(x^6 - y^6)
----------- = x^4 + x^2 y^2 + y^4
(x^2 - y^2)
```

Agora, para trabalhar a partir daí, você pode fatorar x^6 - y^6 como uma diferença de QUADRADOS em vez de uma diferença de cubos. Você vê onde isso leva?

Sinta-se à vontade para escrever de volta e me informar como foi, ou se você quiser mais dicas ao longo de qualquer um desses dois caminhos para a solução.

Até agora, isso não parece promissor, porque queremos um produto de polinômios, não um quociente. Mas vamos tentar: onde usamos a diferença de cubos novamente no final.

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = \frac{x^6 - y^6}{x^2 - y^2} = \frac{(x^3 - y^3)\,(x^3 + y^3)}{(\,x \;-\; y)\,(\,x \;+\; y)}$$

$$= \frac{x^3 - y^3}{x\text{ - }y}\,\frac{x^3 + y^3}{x \;+\; y} = \;(x^2 + \;x\,y + y^2)\,(x^2 - \;xy\,\_ + y^2)$$

Esse é um truque fofo, não aplicável em geral, e novamente descoberto em grande parte vendo coisas que você pode fazer e fazendo-as, esperando que isso ajude.