UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

NILSON DIEGO DE ALCANTARA SANTOS

AS ORIGENS DA TEORIA DOS INVARIANTES NA INGLATERRA E O MÉCANIQUE ANALYTIQUE DE LAGRANGE (1788).

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Adriana Cesar de Mattos.

Rio Claro - SP

2014

510 Santos, Nilson Diego de Alcantara
S237o As origens da teoria dos invariantes na Inglterra e o Mécanique Analytique de Lagrange (1788) : George Boole e as origens da teoria dos invariantes. / Nilson Diego de Alcantara Santos. - Rio Claro, 2014
53 f. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Adriana Cesar de Mattos

1. Matemática. 2. Motivação. 3. Arthur Cayley. 4. James Joseph Sylverter. 5. George Boole. 6. Estática. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

NILSON DIEGO DE ALCANTARA SANTOS

AS ORIGENS DA TEORIA DOS INVARIANTES NA INGLATERRA E O MÉCANIQUE ANALYTIQUE DE LAGRANGE (1788).

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profª. Dra. Adriana Cesar de Mattos (Orientadora) – IGCE-UNESP-Rio Claro

Profº. Dr. Marcus Vinicius Maltempi – IGCE-UNESP-Rio Claro

Profº. Dr. Oscar João Abdounur – IME-USP-São Paulo

Profº Marcos Vieira Teixeira (Suplente) – IGCE-UNESP-Rio Claro

Profº. Dr. Wagner Rodrigues Valente (Suplente) – UNIFESP-São Paulo

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho esta inserido em um trabalho maior, que tem como organizadora principal minha orientadora, a Professora Doutora Adriana Cesar de Mattos, a quem devo agradecer primeiramente, por acreditar em meu trabalho e me ceder a oportunidade de ser orientado por ela. E também queria agradecer ao meu amigo Kleyton Vinicyus Godoy, pelas dicas e auxílios em alguns estudos, que contribuíram muito para a produção desta dissertação.

Em seguida gostaria de agradecer a minha família por me apoiar sempre que precisei, e em especial a minha namorada Jéssica Paiva de Campos, que todas as vezes que me florescia um sentimento de desanimo, me acalmava e encorajava a continuar.

Por último, e acima de tudo, queria agradecer a Deus por me abrir portas e me fortalecer na caminhada árdua de conquista do título de Mestre em Educação Matemática.

SANTOS, Nilson Diego de Alcantara. *As origens da Teoria dos Invariantes na Inglaterra e o Mécanique Analytique de Lagrange (1788).* 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas/Universidade Estadual Paulista, 2013.

Resumo

As origens da Teoria dos Invariantes na Inglaterra e o Mécanique Analytique de Lagrange (1788), é um trabalho voltado principalmente a entender uma possível influência que levou George Boole em 1841, a escrever o artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformations* e verificar se a motivação que o fez produzir este trabalho é igual ou diferente da motivação que ele exerceu sobre Arthur Cayley e consequentemente sobre James Joseph Sylvester. O presente trabalho apresenta um estudo das origens da Teoria dos Invariantes, no século XIX na Inglaterra. De acordo com os historiadores da Matemática o marco do início desta Teoria foi a publicação de George Boole em 1841. Assumimos este artigo como referência principal para realizar nossa pesquisa. Analisamos "antes" e "após" esta publicação de 1841. Concluímos que o *Mécanique Analytique* de Lagrange, foi a principal motivação para George Boole escrever seu trabalho e, certamente, George Boole foi uma grande influência para Arthur Cayley no que condiz com a escolha do assunto "invariantes" bem como o desenvolvimento desta Teoria por Cayley.

Palavras-chave: Motivação. George Boole. Arthur Cayley. James Joseph Sylvester. Estática

SANTOS, Nilson Diego de Alcantara. *The origins of the theory of invariants in England and Mécanique Analytique Lagrange (1788).* 2013. Dissertation (Master in Mathematics Education) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas/Universidade Estadual Paulista, 2013.

Abstract

The origins of the theory of invariants in England and Mécanique Analytique of Lagrange (1788), is a work geared primarily to understand a possible influence that led George Boole in 1841, writing the article *Exposition of the General Theory of Linear Transformations* and verify that the motivation that did produce this work is equal or different of the motivation that he exerted on Arthur Cayley and James Joseph Sylvester consequently. This paper presents a study of the Invariant Theory origins, in the nineteenth century in England. According to historians of Mathematics the beginning of this Theory was the publication in 1841 of George Boole. We have taken this article as a reference to our research. We have proposed to analyzed "before" and "after" this publication, 1841. We conclude that the *Mécanique Analytique* Lagrange, was the essential motivation for George Boole write his work, and certainly George Boole was a great influence to Arthur Cayley in which matches the choice of subject "invariants" as well as the development of this Theory by Cayley.

Key-words: Motivation. George Boole. Arthur Cayley. James Joseph Sylvester. Static

Sumário

INTRODUÇÃO 7

MÉTODO 8

CAPÍTULO 1

Um breve estudo sobre a vida de George Boole 9

CAPÍTULO 2

Comparação entre o Método para calcular Invariantes de George Boole e os Métodos de Arthur Cayley e James Joseph Sylvester 12

CAPÍTULO 3

Análise dos argumentos utilizados pelos historiadores referentes à origem da Teoria dos Invariantes 26

CAPÍTULO 4

Um estudo sobre o Livro *Mécanique Analytique* escrito em 1788 por Joseph Louis Lagrange 40

CONCLUSÃO 50

REFERÊNCIAS 52

Introdução

O propósito desta pesquisa é investigar as origens da Teoria dos Invariantes.

A publicação de George Boole por volta de 1841, do artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformations* é considerada pelos historiadores da Matemática como marco do início da Teoria dos Invariantes. Levando em conta isso, buscamos a motivação que levou Boole a escrever este artigo. E por meio do estudo dos métodos escritos por Boole e Arthur Cayley e dos argumentos dos historiadores da Matemática analisar a influência de Boole sobre Cayley, podendo então compar esta influência com a motivação que fez Boole escrever o artigo de 1841.

Apresentamos uma breve biografia de George Boole. Em seguida comparamos, no que condiz com a semelhança e com o poder de generalização, o método para calcular invariantes apresentado por Boole com o de Cayley e incluímos na comparação o método proposto por James Joseph Sylvester[1]. Analisamos os argumentos dos historiadores da Matemática referentes à origem da Teoria dos Invariantes. Estudamos o clássico *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788) em busca de relações com o artigo de Boole (1841) e que são apresentadas no Capítulo IV.

Enfim, conforme Fisher (1996) a Teoria dos Invariantes nascida em 1841 com o artigo de Boole, tornou-se obsoleta por volta de 1930. Teoria esta que trata de formas homogêneas e diz que uma função f é um invariante de um quântico, se uma função f dos coeficientes do quântico original multiplicado por uma função ϕ dos coeficientes da aplicação linear escolhida é igual à mesma função f dos coeficientes do quântico obtido pela substituição linear.

Regularidades, tais como uma função de coeficientes se manter a mesma frente à aplicação de uma transformação linear em quânticos, atraiu a atenção de muitos estudiosos. De acordo com Olver (1999), a Teoria dos Invariantes foi um assunto de grande repercussão na Inglaterra, na segunda metade do século XIX. Olver (1999), diz que apesar da Teoria dos Invariantes ter acabado no ostracismo no início do século XX, esta teoria ainda influenciou novos campos da matemática como a Teoria dos Grupos e a Teoria da Representação.

---

[1] Segundo os historiadores da Matemática, Sylvester (1814-1897) desenvolveu a Teoria dos Invariantes junto com Arthur Cayley.

Método

Tendo como propósito fixar um caminho em que convirja para as origens da Teoria dos Invariantes, e o contexto de George Boole por volta de 1841, estudamos sua biografia, o artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformations* e documentos que foram construídos a partir deste artigo conforme Historiadores da Matemática e um possível antecessor a ele, dentro do contexto da Teoria dos Invariantes.

Neste contexto, buscamos entender como foi a influência exercida por Boole sobre o matemático Cayley, para tanto analisaremos os métodos de cálculo para invariantes de George Boole, Arthur Cayley e James Joseph Sylvester, comparando o método de Boole com os outros dois métodos, buscando possíveis evidências de influência do método de cálculo de invariantes de Boole sobre os métodos de cálculo de invariantes de Cayley e Sylvester. E ainda buscando entender esta influência exercida por Boole sobre Cayley, analisamos os argumentos dos historiadores da Matemática referente à origem da Teoria dos Invariantes.

Das possíveis obras que serviram de motivação para Boole escrever seu artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformations* (1841), certamente o livro *Mécanique Analytique* (1788) de Lagrange foi uma delas. Desta forma então analisamos o efeito do trabalho de Lagrange no artigo em questão de Boole.

Esta pesquisa foi baseada nos documentos existentes no arquivo "História da Álgebra – Século XIX", que se encontra disponível no acervo bibliográfico do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Metodista de Piracicaba (UNIMEP). Com exceção do livro *Mécanique Analytique* (1788) de Lagrange, que conseguimos acesso por meio de um sistema interuniversidades, encontramos no "Instituto de Matemática e Estatística" da Universidade de São Paulo (IME- USP), no idioma francês.

Capítulo 1

Um breve Estudo Sobre a Vida de George Boole

Faremos um breve histórico sobre a vida de George Boole com o intuito de apresentar um cenário referente à origem da Teoria dos invariantes. George Boole, autor do artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformation* (1841), marcou o início da Teoria dos Invariantes com esta publicação (CRILLY,1986; PARSHLL, 1998).

Filho de Jonh Boole e Mary Ann Joyce, nascido em 1815 na cidade de Lincoln na Inglaterra, o grande e criativo matemático George Boole é o foco de estudo deste capítulo. George Boole, mesmo tendo pouca escolaridade formal, detinha um determinado gosto pela leitura o que lhe proporcionou, com pouco auxílio, domínio de várias línguas clássicas e modernas. Como prova disto, em 1830, ele publicou uma tradução do poema *Ode à Primavera,* de Meleager, segundo a qual George Boole, à assinou apenas como "G.B.", porém o Jornal Local Linconl Herold, onde foi feita esta publicação, acrescentou que a tradução havia sido feita por um jovem de quatorze anos de idade, o que depois gerou uma controvérsia, pois "P.W.B.", um cidadão de Bracebridge, não acreditava que esta tradução poderia ter autoria de alguém tão jovem, mesmo o trabalho de Boole, tendo reconhecimento, a polêmica parece ter o marcado, pois após tal acontecimento, ele demonstrou receio em se envolver em disputas, conforme diz Fossa e Souza (2007).

Em 1833, segundo Fossa e Souza (2007), Boole encontrou oportunidade de emprego apenas na cidade de Liverpool, na escola do Sr. Marrat. A convivência com Marrat poderia ter sido relevante para Boole, pois Marrat teve destaque principalmente escrevendo um livro sobre Mecânica, porém logo Boole se demitiu desta escola, mesmo ganhando um salário três vezes maior que o anterior, pois se sentia incomodado com a desorganização de Marrat. Logo após Boole conseguiu um posto de professor de matemática na Academia de Robert Hall, localizada em Waddington, onde apesar das dificuldades financeiras, Boole apreciou a qualidade de vida de Waddington, e estava feliz, pois se encontrava próximo a sua família, porém ele almejava por em prática suas ideias sobre educação, mas como isto não era possível nas escolas onde passou e também devido as necessidades financeiras, em 1834 Boole abriu sua própria escola.

Ainda neste ano, Boole se associou ao Instituto de Mecânica de Lincoln, que fundado em 1833 tinha como objetivo principal promover a educação de adultos especialmente com respeito às ciências.

Conforme Fossa e Souza (2007), Boole trabalhou no Instituto de Mecânica como professor voluntário de Matemática, ciências e estudos clássicos. E como foi encarregado de fazer um relatório sobre a biblioteca do instituto, ele fez várias recomendações ao acervo desta, incluindo:

> [...] a *Trigonometry de Hind, a Geometry of Three Dimensions de Gregory, os Examples of the Differential and Integral Calculus de Gregory, a Analytical Mechanics de Walton, as Principia Mathematica de Newton, o Tracts de Airy, a Mécanique Analytique de Laplace*[2] *(Sic), a Théorie Mathematique de La Chaleur de Poisson, a Théorie de l'Action Capillaire de Poisson e o Exercise de Cauchy* (FOSSA e SOUZA, 2007, p.16).

Esta lista segundo Fossa e Souza (2007), retirada de MacHale (1985), contém obras que pareciam ser muito além da capacidade dos alunos do Instituto, o que revela os interesses científicos de Boole. E ainda se referindo a esta lista o trabalho *Mécanique Analytique* (1788) de Lagrange, é citado por Boole, em seu artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformations* (1841), segundo a qual será visto no terceiro capítulo, onde será descrita esta citação, feita por Boole.

De acordo com Fossa e Souza (2007), Boole aos 19 anos de idade, teve seu reconhecimento pelo Instituto de Mecânica, que o escolheu para fazer um discurso sobre "A Genialidade e as descobertas de Isaac Newton", em uma apresentação do Instituto, a um busto de mármore deste cientista, apesar de os ingleses reverenciarem Newton, principalmente na terra natal de Boole, reverência segundo a qual Boole também compartilhava, ele não fez um mero elogio a genialidade de Newton, primeiro ele fez uma análise da obra de Newton, apontando suas inovações e limitações, impressionando a todos com a qualidade de seu discurso.

De acordo com Crilly (2006), apesar de os pais de Boole carecerem de dinheiro, eles mantinham uma forte apreciação pela aprendizagem e passaram isto para Boole, que apresentou uma excepcional habilidade e estabeleceu uma reputação local para a conquista educacional. Porém ele foi um forasteiro no mundo da ciência dominado pela descendência das antigas universidades.

---

[2] O autor do Livro Mécanique Analytique Joseph Louis é Lagrange, e não Laplace.

Segundo Fossa e Souza (2007), Boole basicamente foi autodidata na matemática, em especial vale lembrar que não fez nenhum curso universitário, entretanto as suas habilidades linguísticas lhe deram acesso as mais importantes obras matemáticas da época, em sua grande maioria escritas em francês. Devido a falta de um curso universitário, Boole não foi aceito de imediato na Royal Society, porém Ducan F. Gregory (1813-1844), reconheceu o valor dos artigos de Boole, e os publicou em seu jornal “Cambridge Mathematical Journal”, recém-fundado. Boole na intenção de legitimar seu reconhecimento perante a sociedade científica inglesa, pensava em ingressar como aluno na Universidade de Cambridge, Gregory porém, o fez ver que a submissão a rotina universitária, talaria a sua criatividade e reduziria o nível de sua produção científica. Contudo em 1844, com a ajuda de Gregory e Augusto de Morgan (1806-1871), Boole, publicou o artigo *On a General Method in Analysis* nas “Transactions of the Royal Society”, julgado como o melhor artigo matemático publicado nas Transaction no período de 1841-1844, devido a este artigo, Boole, recebeu da Royal Society, a primeira medalha de ouro[3] concedida pela mesma. Antes desta premiação, Boole já tinha amizade com Gregory, de Morgan e o algebrista Arthur Cayley (1821-1895), após a premiação estabeleceu contato com grupo maior de cientistas, como por exemplo, George Biddell Airy (1801-1892), Chales Babbage (1792-1871), Michael Faraday (1791-1867), William Herschel (1738-1822), George Peacock (1791-1858), William Whewell (1794-1866), William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) e George Everest (1790-1866). Apesar de terem os mesmos interesses de estudos e morarem em cidades próximas (Cork e Dublin) durante anos, Boole e Willian Rowan Hamilton[4] (o grande matemático inglês inventor dos quatérnios), nunca tiveram contato, por motivos ainda duvidosos.

De acordo com Fossa e Souza (2007), em 1849 Boole, foi nomeado professor de matemática do Queen’s College, Cork, onde recebeu críticas pouco louváveis do presidente da instituição Robert Kane, que dizia que Boole em suas aulas dava muita ênfase à álgebra e pouca ênfase a geometria. Enfim, George Boole faleceu em 1864, aos 49 anos, em sua própria casa em Ballintemple (Cork).

[3] *Gold Medal of The Royal Society of London*

[4] Willian Rowan Hamilton (1805-1865) foi um matemático, físico e astrónomo. Contribuiu com trabalhos fundamentais para o desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra.

Capítulo 2

Comparação Entre o Método Para Calcular Invariantes de George Boole e os Métodos de Arthur Cayley e James Joseph Sylvester

Neste capítulo faremos uma breve comparação entre o método apresentado no artigo considerado como a origem da Teoria dos Invariantes *Exposition of a General Theory of Linear Transformation*, de George Boole, e os Métodos apresentados por Arthur Cayley e James Joseph Silvester, que desenvolveram juntos a Teoria dos Invariantes.

Desde que o assunto em questão é a Teoria dos Invariantes faremos uma síntese introdutória desta Teoria. Conforme Elliot (1895) uma função f é um invariante de um quântico, se f é uma função de coeficientes do quântico $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$ que mantém a seguinte forma:

$$f(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p) = \phi(\mathrm{l}, \mathrm{m}, \mathrm{l}', \mathrm{m}')\mathrm{f}(\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{p})$$

Para ilustrar tomemos a binária de ordem p, por exemplo:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)(x, y)^p$$

Aplicamos uma transformação linear do tipo:

$$x = lX + mY$$
$$y = l'X + m'Y$$

para tornar-se finalmente:

$$(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p)(X, Y)^p$$

onde $A_0, A_1, A_2, \dots, A_p$ são funções de $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ e l, m, l', m'. Desta maneira, $f(a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$ será um invariante se manter a forma:

$$f(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p) = \phi\,(\mathrm{l}, \mathrm{m}, \mathrm{l}', \mathrm{m}')\mathrm{f}(\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{p})$$

Para exemplificar a definição dada anteriormente, tomaremos o quântico:

$$Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

E tomaremos também o invariante $ac - b^2$, que é um invariante deste quântico, como será mostrado nos cálculos do capítulo 2 deste trabalho. Com isto, aplicaremos a transformação linear $\begin{cases} x = lX + mY \\ y = l'X + m'Y \end{cases}$, que também pode ser escrita na forma:

$M = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$.

Iremos obter então:

$$Q = a(lX + mY)^2 + 2b(lX + mY)(l'X + m'Y) + c(l'X + m'Y)^2$$

Desenvolvendo temos,

$Q = a(l^2X^2 + 2lmXY + m^2Y^2) + 2b(ll'X^2 + lm'XY + l'mXY + mm'Y^2) + c(l'^2X^2 + 2l'm'XY + m'^2Y^2)$

Aplica-se a distributiva,

$Q = al^2X^2 + 2almXY + am^2Y^2 + 2bll'X^2 + 2blm'XY + 2bl'mXY + 2bmm'Y^2 + c\,l'^2X^2 + 2cl'm'XY + cm'^2Y^2$

E finalmente agrupamos os coeficientes com suas variáveis correspondentes,

$Q = X^2(al^2 + 2bll' + cl'^2) + 2XY(alm + blm' + bl'm + cl'm') + Y^2(am^2 + 2bmm' + cm'^2)$

E aplicando a seguinte substituição:

$A = al^2 + 2bll' + cl'^2$,

$B = alm + b(lm' + l'm) + cl'm'$

$C = am^2 + 2bmm' + cm'^2$.

Assim, $ax^2 + 2bxy + cy^2$ se torna $AX^2 + 2BXY + CY^2$.

Anteriormente, concluímos que $ac - b^2$ é um Invariante deste quântico. Para averiguarmos este resultado, é necessário que se mantenha a forma:

$AC – B^2 = (l^2m'^2 – 2ll'mm' + m^2l'^2)(ac – b^2)$

ou

$AC – B^2 = M^2(ac – b^2)$

Substituindo os valores de A, B e C, temos:

$AC = a^2l^2m^2 + 2abl^2mm'+ acl^2m'^2 + 2abll'm^2 + 4b^2ll'mm' + 2bcll'm'^2 + acl'^2m^2 + 2bcl'^2mm'^2 + c^2l'^2m'^2$

$–B^2 = – a^2l^2m^2 – abl^2mm' – abll'm^2 – acll'mm' – abl^2mm' – b^2l^2m'^2 – b^2ll'mm' – bcll'm'^2 – abll'm^2 – b^2ll'mm' – b^2l'^2m^2 – bcl'^2mm' – acll'mm' – bcll'm'^2 – c^2l'^2m'^2$

Assim,

$AC – B^2 = acl^2m'^2 + 2b^2ll'mm' + acl'^2m^2 – 2acll'mm' – b^2l^2m'^2 – b^2ll'm'^2 – b^2l'^2m^2$

Falta ainda calcularmos $M^2(ac – b^2)$.

$M^2(ac – b^2) = acl^2m'^2 + 2b^2ll'mm' + acl'^2m^2 – 2acll'mm' – b^2l^2m'^2 – b^2ll'm'^2 – b^2l'^2m^2$

Dessa forma, concluímos que $AC – B^2 = M^2(ac – b^2)$, portanto, $ac - b^2$ é invariante do quântico Q.

Para descrever o método utilizado por Boole para calcular os invariantes, vamos nos basear em três exemplos, para as funções homogêneas de grau 2, 3 e 4. Sendo assim então, tomemos a seguinte função homogênea quadrática binária:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Agora aplicaremos a esta função homogênea uma derivada em relação a x e outra em relação a y, assim teremos que:

$$\partial_x = 2ax + 2by$$

$$\partial_y = 2bx + 2cy$$

Trazendo para forma irredutível e as igualando a 0, teremos:

$$ax + by = 0$$

$$bx + cy = 0$$

Agora tomaremos uma matriz formada apenas pelos coeficientes destas duas expressões irredutíveis:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \; ou \; \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante obteremos:

$$ac - b^2 \; ou \; b^2 - ac$$

Que é um invariante da função homogênea quadrática binária.

Agora no caso de uma Função homogênea cúbica binária, o processo para encontrar o invariante é diferente. Tomemos a seguinte função homogênea cúbica binária:

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

Agora aplicamos a esta função homogênea uma derivada em relação a x e outra derivada em relação a y, e com isto obtemos:

$$\partial_x = 3ax^2 + 6bxy + 3cy^2$$

$$\partial_y = 3bx^2 + 6cxy + 3dy^2$$

Trazendo para forma irredutível e as igualando a 0 teremos,:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

$$bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0$$

Agora tomaremos os termos em pares de colunas da seguinte maneira, primeiro mantendo os termos com x^2:

$$\begin{vmatrix} ax^2 & 2bxy \\ bx^2 & 2cxy \end{vmatrix} \; e \; \begin{vmatrix} ax^2 & cy^2 \\ bx^2 & dy^2 \end{vmatrix}$$

Depois mantendo os termos com y^2:

$$\begin{vmatrix} ax^2 & cy^2 \\ bx^2 & dy^2 \end{vmatrix} \; e \; \begin{vmatrix} 2bxy & cy^2 \\ 2cxy & dy^2 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo os determinantes destas matrizes teremos, para a primeira linha:

$$(2acx^3y - 2b^2x^3y) - (adx^2y^2 - bcx^2y^2)$$

$$((2acx - 2b^2x) - (ady - bcy))x^2y$$

Colocando na forma irredutível obteremos:

$$2(ac - b^2)x - (ad - bc)y = 0$$

E para a segunda linha:

$$(adx^2y^2 - bcx^2y^2) - (2bdxy^3 - 2c^2xy^3)$$

$$\big((adx - bcx) - (2bdy - 2c^2y)\big)xy^2$$

Colocando na forma irredutível obtemos:

$$(ad - bc)x - 2(bd - c^2)y = 0$$

Agora com as duas linhas, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} 2(ac - b^2)x - (ad - bc)y = 0 \\ (ad - bc)x - 2(bd - c^2)y = 0 \end{Bmatrix}$$

Dispondo os coeficientes deste sistema em uma matriz, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 2(ac - b^2) & -(ad - bc) \\ (ad - bc) & -2(bd - c^2) \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante deste sistema obteremos:

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$$

Ou

$$a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2$$

Que é um invariante da forma cúbica binária.

Agora para a função homogênea binária de quarto grau, tomemos a seguinte função:

$$ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

Agora aplicaremos a esta função homogênea uma derivada em relação a x e outra em relação a y, com isto obtemos:

$$\partial_x = 4ax^3 + 12bx^2y + 12cxy^2 + 4dy^3$$

$$\partial_y = 4bx^3 + 12cx^2y + 12dxy^2 + 4ey^3$$

Devido ao fato de a função original ser de grau par, então precisamos aplicar derivadas em relação a x e a y, até conseguirmos expressões de primeiro grau. Sendo assim aplicaremos a estas duas derivadas, mais uma derivada em relação a x e outra em relação a y, obtendo:

$$\partial_{xx} = 12ax^2 + 24bxy + 12cy^2$$

$$\partial_{xy} = 12bx^2 + 24cxy + 12dy^2$$

$$\partial_{yx} = 12bx^2 + 24cxy + 12dy^2$$

$$\partial_{yy} = 12cx^2 + 24dxy + 12ey^2$$

Como ainda não obtivemos a expressão de grau 1 então aplicaremos mais uma vez este processo de derivação em relação a x e a y, desta maneira teremos:

$$\partial_{xxx} = 24ax + 24by$$

$$\partial_{xxy} = 24bx + 24cy$$

$$\partial_{xyx} = 24bx + 24cy$$

$$\partial_{xyy} = 24cx + 24dy$$

$$\partial_{yxx} = 24bx + 24cx$$

$$\partial_{yxy} = 24cx + 24dy$$

$$\partial_{yyx} = 24cx + 24dy$$

$$\partial_{yyy} = 24dx + 24ey$$

Obtendo assim as expressões de grau 1, traremos estas para a forma reduzida e as igualando a zero, teremos:

$$ax + by = 0 \qquad (1)$$

$bx + cy = 0$ (2)

$bx + cy = 0$ (3)

$cx + dy = 0$ (4)

$bx + cy = 0$ (5)

$cx + dy = 0$ (6)

$cx + dy = 0$ (7)

$dx + ey = 0$ (8)

Agora vamos associar este sistema de equações da seguinte maneira, a (1) com a (8), a (2) com a (7), a (3) com a (6) e a (4) com a (5), colocando-as em matrizes, e lembrando que as posições de (4) e (5) são invertidas, devido ao número de derivadas em x e y, com isto temos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix} e \begin{vmatrix} b & c \\ c & d \end{vmatrix}$$

Agora desenvolvendo os determinantes, temos que:

$$(ae - bd) - (bd - c^2) - (bd - c^2) - (bd - c^2)$$

Que é o mesmo que:

$$ae - 4bd + 3c^2$$

Que é um invariante da função homogênea binária de grau 4.

O método de Boole, para calcular invariantes se diferencia para graus pares e ímpares, apesar de o método usado na de grau 2 parecer diferente do utilizado na de grau 4, mas são o mesmo, pois o que ocorre na de grau 2 é que quando se encontra o sistema de equações de grau 1, elas são apenas duas, desta forma só é gerada apenas uma matriz 2 por 2. Vale lembrar também que Boole, não chegou a calcular invariantes da função homogênea binária de grau 4 no seu trabalho *Exposition of a General Theory of Linear Transformation*, o resultado obtido na função homogênea binária de grau 4 é fruto de estudos meus junto ao "Grupo de Estudos de História da Álgebra do Século XIX da Universidade Metodista de Piracicaba", mas com base no método apresentado por Boole em seu trabalho.

O próximo método para calcular invariantes que será descrito é o de Cayley. Para descrever o método de Cayley para calcular invariantes, utilizaremos principalmente o trabalho intitulado *A Second Memoir Upon Quantics* (1855), pois é nesta segunda memória que se encontra as tabelas, que Cayley utiliza como base para o cálculo de invariantes, estas tabelas são encontradas por Cayley através do método de derivação de Arbogast. Sendo assim, vamos descrever o método para calcular invariantes de Cayley utilizando três exemplos como foi feito com o método de Boole anteriormente.

Então considerando o quântico binário: $ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Tomando a primeira tabela descrita na segunda memória de Cayley sobre os quânticos como base, note que é uma tabela formada a partir dos coeficientes do quântico:

a	b	c

Onde tomaremos os termos em pares dos extremos e na coluna central elevaremos o termo ao quadrado, obtendo assim:

$$ac + b^2$$

A partir desta expressão podemos escrever $Aac + Bb^2$, que é a base de nosso invariante agora para descobrirmos os valores de A e B, aplicaremos a esta estrutura a seguinte operação, $a\partial_b + 2b\partial_c$.

Que nos gera $2Bab + 2Aab$, isto é;

2B	2A	ab

Ou seja, $2B + 2A = 0$[5] , com isto obteremos que $B = -A \; ou \; A = -B$. Então nosso invariante é $ac - b^2 \; ou \; b^2 - ac$. Que é o mesmo invariante encontrado antes pelo método de Boole.

No caso da Cúbica ($ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$), partiremos da seguinte tabela, também encontrada na segunda memória de Cayley, que podemos perceber que é uma combinação dos coeficientes do quântico, tomados dois a dois:

a^2	ab	ac b^2	ad bc	bd c^2	cd	d^2

[5] Cayley, iguala a zero cada linha da tabela gerada através da operação aplicada, porém não deixa muito claro o porquê.

Utilizaremos um pensamento parecido com o do exemplo anterior, porém quando chegarmos a coluna central, elevaremos os dois termos ao quadrado, obtendo a seguinte expressão:

$$a^2d^2 + abcd + acc^2 + b^2bd + (ad)^2 + (bc)^2$$

$$2a^2d^2 + abcd + ac^3 + b^3d + b^2c^2$$

E a partir desta expressão podemos escrever:

$$Aa^2d^2 + Babcd + Cac^3 + Db^3d + Eb^2c^2$$

Que é a base de nosso invariante, agora para descobrirmos os valores de A, B, C, D e E, aplicaremos a esta estrutura a seguinte operação:

$$a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d$$

Que gera:

$$a\partial_b = Ba^2cd + 3Dab^2d + 2Eabc^2$$

$$2b\partial_c = 2Bab^2d + 6Cabc^2 + 4Eb^3c$$

$$3c\partial_d = 6Aa^2cd + 3Babc^2 + 3Db^3c$$

Ou seja:

B		6A	a^2cd
3D	2B		ab^2d
2E	6C	3B	abc^2
	4E	3D	b^3c

Com isto temos que, $B + 6A = 0; 3D + 2B = 0; 2E + 6C + 3B = 0;$

$4E + 3D = 0$. E a partir disto se assumirmos $A = 1$, obteremos:

$B = -6; C = 4; D = 4; E = -3$. Chegando assim ao invariante:

$$a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2$$

Que é o mesmo invariante encontrado através do método de Boole.

Agora no caso do quântico de grau 4:

$$ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

Tomaremos como ponto de partida a tabela a seguir, que também se encontra na segunda memória de Cayley. Observe que assim como a tabela utilizada no cálculo do invariante do quântico binário da forma quadrática, esta tabela é obtida a partir dos coeficientes do quântico:

a	b	c	d	e

Agora produziremos um processo parecido com os processos utilizados nas tabelas nos casos dos quânticos anteriores, pegando os termos dos extremos para o meio e elevando o termo central ao quadrado, obtendo assim:

$$ae + bd + c^2$$

E a partir desta expressão podemos escrever:

$$Aae + Bbd + Cc^2$$

Que é a base do invariante procurado. Agora na intenção de descobrir os valores de A, B e C, vamos aplicar a esta expressão a seguinte operação:

$$a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d + 4d\partial_e$$

Que gera:

$$a\partial_b = Bad$$

$$2b\partial_c = 4Cbc$$

$$3c\partial_d = 3Bbc$$

$$4d\partial_e = 4Aad$$

Ou seja:

B			4A	ad
	4C	3B		bc

Com isto temos que: $B + 4A = 0; 4C + 3B = 0$. E a partir disto se assumirmos que $A = 1$, obtemos: $B = -4; C = 3$. Encontrando assim desta forma o invariante:

$$ae - 4bd + 3c^2$$

Que é o mesmo invariante encontrado pelo método utilizado antes, com raízes no método de Boole.

O próximo e último método para calcular invariantes, que será descrito neste trabalho, é o método apresentado por James Joseph Sylvester. Este método é apresentado por Sylvester em seu trabalho intitulado *On The Principles of The Calculus of Forms* (1852). Utilizaremos três exemplos para descrever o método apresentado por Sylvester, como foi feito com os dois métodos anteriores de Boole e de Cayley. Sendo assim então, primeiramente vamos generalizar o método apresentado por James Joseph Sylvester para o cálculo de invariantes. Seja uma função homogênea integral rational qualquer do tipo binária:

$$(\alpha x + \beta y)^m$$

Onde m é o grau desta função, $\alpha\ e\ \beta$ são os coeficientes e x e y são os facientes. Segundo o qual podemos dizer que $m = n \cdot p$. Destes tendo escolhido o n este será nossa ordem nas permutações de seus coeficientes, como por exemplo, se escolhermos n=2, teremos então $\alpha\alpha$; $\alpha\beta$; $\beta\beta$, ou seja α^2; $\alpha\beta$; β^2. E tendo escolhido n teremos que $p = \frac{m}{n}$ e também que este $p > 1$ que será a quantidade de vezes que relacionaremos estas expressões encontradas, mantendo uma destas expressões fixa, e permutando as posições das demais expressões. Sendo assim cada uma destas relações será um coeficiente do invariante procurado levando em consideração a lei de inversão (parecida com a utilizada no cálculo de determinantes de matrizes), para definição do sinal de cada um destes coeficientes e também uma mudança de base destes coeficientes conforme exemplo:

$$(ax + by)^3 = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

Sendo então as mudanças: $A = a^3$; $B = a^2b$; $C = ab^2$; $D = b^3$.

Agora seguindo esta linha de raciocínio vamos encontrar o invariante da forma quadrática, então sendo $(ax + by)^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

Com isto temos para a mudança de coeficiente: $A = a^2; B = ab; C = b^2$.

E escolhendo n=1, temos que p=2, com isto teremos:

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ a & b \end{Bmatrix}\ e\ \begin{Bmatrix} a & b \\ b & a \end{Bmatrix}$$

$$a^2 \cdot b^2\ e\ ab \cdot ab$$

Com a mudança de coeficiente e tendo uma inversão no segundo sistema temos:

$$A \cdot C - B \cdot B$$

$$AC - B^2$$

Que é um invariante da forma quadrática.

Agora pra forma cúbica: $(ax + by)^3 = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$

Com isto para a mudança de coeficientes temos que:

$$A = a^3;\ B = a^2b;\ C = ab^2;\ D = b^3$$

E escolhendo n=1, temos que p=3, porém no caso de formas de grau ímpar, duplicaremos as expressões, com isto teremos:

$$\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & a\,b \\ a\,b & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & a\,b \\ a\,b & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & a\,b \\ a\,a & b\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & a\,b \\ b\,a & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & a\,b \\ b\,a & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & a\,b \\ b\,b & a\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & b\,a \\ a\,b & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & b\,a \\ a\,b & b\,a \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & b\,a \\ a\,a & b\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & b\,a \\ b\,a & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & b\,a \\ b\,a & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,b & b\,a \\ b\,b & a\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,a & b\,b \\ a\,b & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,a & b\,b \\ a\,b & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,a & b\,b \\ a\,a & b\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,a & b\,b \\ b\,a & a\,b \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,a & b\,b \\ b\,a & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ a\,a & b\,b \\ b\,b & a\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & a\,b \\ a\,b & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & a\,b \\ a\,b & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & a\,b \\ a\,a & b\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & a\,b \\ b\,a & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & a\,b \\ b\,a & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & a\,b \\ b\,b & a\,a \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & b\,a \\ a\,b & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & b\,a \\ a\,b & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & b\,a \\ a\,a & b\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & b\,a \\ b\,a & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & b\,a \\ b\,a & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,a & b\,a \\ b\,b & a\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,b & a\,a \\ a\,b & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,b & a\,a \\ a\,b & b\,a \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,b & a\,a \\ a\,a & b\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,b & a\,a \\ b\,a & a\,b \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,b & a\,a \\ b\,a & b\,a \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} a\,b & a\,b \\ b\,b & a\,a \\ b\,b & a\,a \end{Bmatrix}$$

$$a^3 \cdot b^3 \times a^3 \cdot b^3; a^3 \cdot b^3 \times a^2b \cdot b^2a; a^3 \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^3; a^2b \cdot b^2a \times a^3 \cdot b^3; a^2b \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^2a; a^2b \cdot b^3 \times a^3 \cdot b^2a; a^3 \cdot b^3 \times a^2b \cdot b^2a; a^3 \cdot b^3 \times b^2a \cdot a^2b; a^3 \cdot b^2a \times b^2a \cdot b^2a; a^2b \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^2a; a^2b \cdot b^2a \times b^2a \cdot a^2b; a^2b \cdot b^3 \times a^2b \cdot a^2b; a^3 \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^3; a^3 \cdot b^2a \times b^2a \cdot b^2a; a^3 \cdot a^2b \times b^2a \cdot b^3; a^2b \cdot a^2b \times a^2b \cdot b^3; a^2b \cdot a^2b \times b^2a \cdot b^2a; a^2b \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^2a; a^2b \cdot b^2a \times a^3 \cdot b^3; a^2b \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^2a; a^2b \cdot a^2b \times a^2b \cdot b^3; b^2a \cdot a^2b \times a^3 \cdot b^3; b^2a \cdot a^2b \times a^2b \cdot b^2a; b^2a \cdot b^2a \times a^3 \cdot b^2a; a^2b \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^2a; a^2b \cdot b^2a \times b^2a \cdot a^2b; a^2b \cdot a^2b \times b^2a \cdot b^2a; b^2a \cdot a^2b \times a^2b \cdot b^2a; b^2a \cdot a^2b \times b^2a \cdot a^2b; b^2a \cdot b^2a \times a^2b \cdot a^2b; a^2b \cdot b^3 \times a^3 \cdot b^2a; a^2b \cdot b^3 \times a^2b \cdot a^2b; a^2b \cdot b^2a \times a^2b \cdot b^2a; b^2a \cdot b^2a \times a^3 \cdot b^2a; b^2a \cdot b^2a \times a^2b \cdot a^2b;\ b^2a \cdot b^3 \times a^3 \cdot a^2b.$$

Com a mudança de coeficiente e tendo algumas inversões temos:

$$\begin{aligned} AD \times AD - AD \times BC - AC \times BD - BC \times AD + BC \times BC - BC \times AC - AD \times BC \\ + AD \times BC + AC \times C^2 + BC \times BC - BC \times BC + BD \times B^2 - AC \times BD \\ + AC \times C^2 - AB \times CD + B^2 \times BD - B^2 \times C^2 + BC \times BC - BC \times AD \\ - BC \times BC + B^2 \times BD + BC \times AD - BC \times BC + C^2 \times AC + BC \times BC \\ - BC \times BC - B^2 \times C^2 - BC \times BC + BC \times BC - C^2 \times B^2 - BD \times AC \\ + BD \times B^2 + BC \times BC + C^2 \times AC - C^2 \times B^2 + CD \times AB \end{aligned}$$

$$A^2D^2 - ABCD - ABCD - ABCD + B^2C^2 - ABCD - ABCD + ABCD + AC^3 + B^2C^2 \\ - B^2C^2 + B^3D - ABCD + AC^3 - ABCD + B^3D - B^2C^2 + B^2C^2 \\ - ABCD - B^2C^2 + B^3D + ABCD - B^2C^2 + AC^3 + B^2C^2 - B^2C^2 \\ - B^2C^2 - B^2C^2 + B^2C^2 - B^2C^2 - ABCD + B^3D + B^2C^2 + AC^3 \\ - B^2C^2 + ABCD$$

Agora efetuando as somas:

$$A^2D^2 - 9ABCD + 6B^2C^2 + 3ABCD + 4AC^3 - 9B^2C^2 + 4B^3D$$

Ou seja:

$$A^2D^2 - 6ABCD - 3B^2C^2 + 4AC^3 + 4B^3D$$

Que é um invariante da forma Cúbica.

Agora para forma de grau 4, teremos:

$$(ax + by)^4 = Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4$$

Neste caso então temos que: $A = a^4; B = a^3b; C = a^2b^2; D = ab^3; E = b^4$, é a nossa mudança de coeficiente.

E escolhendo n=1, temos que p=4, com isto teremos:

$$\left\{\begin{array}{cc} a & b \\ a & b \\ \hline a & b \\ a & b \end{array}\right\}; \left\{\begin{array}{cc} a & b \\ a & b \\ \hline a & b \\ b & a \end{array}\right\}; \left\{\begin{array}{cc} a & b \\ a & b \\ \hline b & a \\ a & b \end{array}\right\}; \left\{\begin{array}{cc} a & b \\ a & b \\ \hline b & a \\ b & a \end{array}\right\}; \left\{\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \\ \hline a & b \\ a & b \end{array}\right\}; \left\{\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \\ \hline a & b \\ b & a \end{array}\right\}; \left\{\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \\ \hline b & a \\ a & b \end{array}\right\}; \left\{\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \\ \hline b & a \\ b & a \end{array}\right\}$$

$$a^4 \cdot b^4; a^3b \cdot ab^3; a^3b \cdot ab^3; a^2b^2 \cdot a^2b^2; a^3b \cdot ab^3; a^2b^2 \cdot a^2b^2; a^2b^2 \cdot a^2b^2;$$

$$ab^3 \cdot a^3b$$

Agora aplicando a mudança de coeficiente, e considerando as inversões para a determinação dos sinais temos:

$$AE - BD - BD + C^2 - BD + C^2 + C^2 - BD$$

Agora efetuando as somas:

$$AE - 4BD + 3C^3$$

Que é um invariante do quântico binário de grau 4.

Sendo assim, tendo descrito os métodos para calcular invariantes de George Boole, Arthur Cayley e James Joseph Silvester, podemos notar que apesar de encontrar os mesmos invariantes (principalmente no caso da forma de grau 4, pois a de grau 2 e a de grau 3 possui apenas o invariante encontrado acima), estes três métodos são diferentes. Porém uma semelhança observada entre o método de Boole e os métodos de

Cayley e Silvester, é que os três métodos, abordam de maneira diferente funções homogêneas ou quânticos binários de grau par e de grau ímpar. Vale também lembrar que o método de Boole encontrará apenas um invariante, enquanto que os outros métodos podem encontrar outros invariantes da mesma forma algébrica, conforme afirmam os historiadores matemáticos.

Contudo, até o momento não é possível observar uma regularidade maior entre os três métodos, pois devido ao aumento de dificuldade no cálculo dos invariantes, conforme o acréscimo do grau das formas, necessitaríamos de um tempo maior e de ferramentas mais aprimoradas para encontrar mais invariantes utilizando os três métodos e poder observar melhor possíveis semelhanças existentes entre o método de Boole e os métodos de Cayley e de Sylvester, como o já observado anteriormente que os três métodos possuíam distinção para formas de grau par e para formas de grau ímpar. Entretanto, por não haver ainda outras semelhanças além da distinção de graus pares e graus ímpares, para encontrar uma possível influência do método de Boole sobre os métodos de Cayley e Sylvester, no cálculo de invariantes, no próximo capítulo observaremos a base das afirmações feitas pelos historiadores da matemática referente à origem da teoria dos invariantes, para estudarmos a influência que segundo estes historiadores, George Boole teve sobre os jovens Arthur Cayley e James Joseph Sylvester, referente a este assunto.

Capítulo 3

Análise dos Argumentos Utilizados pelos Historiadores Referentes à Origem da Teoria dos Invariantes

Neste capítulo será feita uma análise dos argumentos, que os historiadores da matemática utilizam para apontar o artigo *Exposition of a General Theory of linear transformations* (1841), de George Boole, como a origem da Teoria dos Invariantes. Sendo assim temos de início para este capítulo, uma declaração feita por Tony Crilly, nos agradecimentos de seu livro *Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age* (2006), na qual ele afirma ter visitado a Biblioteca de Boole na *University College*, Cork, para estudar os trabalhos de Boole, o que mostra que para escrever este livro sobre Arthur Cayley, ele precisou estudar trabalhos construídos por Boole, e possíveis relações com Cayley.

Segundo Parshall (1999), no fim do ano de 1839 e início de 1840, Sylvester, a partir de determinantes, estava trabalhando na redução do problema da solução dos sistemas de equações. No pós-escrito de seu primeiro fascículo, Sylvester tinha alertado seus leitores que:

> *[i]n the next part I trust to be able to present... a direct and symmetrical method of eliminating any number of unknown quantities between any number of equations of any degree, by a newly invented process of symbolical multiplication, and the use of compound symbols of notation* (SYLVESTER, 1839 apud PARSHALL, 1999, p.249).

O método de Sylvester, nomeado *zeta-ic multiplication*, é a construção e cálculo do determinante associado com um sistema de equações lineares em n incógnitas, no qual Sylvester descobriu algumas propriedades de determinantes no percurso de seu estudo. Por exemplo, ele observou que se fosse feita uma permutação entre bases[6], o produto *zeta-ic* prefixado permanece inalterado em sua amplitude, a menos do sinal. Ele também observou que se duas de suas bases são coincidentes a sua amplitude desaparece. Para usar uma termologia e uma notação mais moderna Sylvester estabeleceu duas propriedades elementares de determinantes, isto é, se A é uma matriz $n \times n$ e A' é obtida a partir de permutação de duas colunas de A, então $\det A =$

[6] Sylvester para se referir as linhas e colunas do determinante utiliza o termo base, por exemplo "...one interchange in the order of the bases to which" (SYLVESTER, 1839 apud PARSHALL, 1999, p. 249).

$-\det A'$, e se duas colunas de A são idênticas então $\det A = 0$. Sylvester demonstrava interesse em determinantes e suas propriedades e como podemos observar no capítulo anterior, determinantes é uma das ferramentas utilizadas por Boole no cálculo de invariantes.

Segundo Crilly (2006), das várias contribuições de Cayley, foi sua investida na Teoria dos Invariantes a mais significativa de todas, pois era uma álgebra moderna para os matemáticos britânicos, que a fizeram a sua própria.

Conforme Parshall (1999), uma onda de pequenas notas sobre a teoria das eliminações surgiu em 1841, com isto, Sylvester destacou-se bem, de forma a instituir-se como uma nova força a ser considerada no cenário matemático britânico. Contudo, em 1841, Sylvester encontra-se deixando a Inglaterra e seu posto como Professor de Filosofia Natural na *University College*, para assumir uma cadeira no professorado de matemática da *University of Virginia*, nos Estados Unidos. Ainda de acordo com Parshall (1999), esta escolha de Sylvester como bem se sabe, provou ser uma infeliz e improdutível troca. Como prova disto, em novembro de 1843, ele deixou a América para encarar a incerteza de prospecto em um emprego de volta a Londres. Entretanto, no fim de 1844, Sylvester estando empregado como escrivão e secretário na *Equity* e na *Law Life Assurance Company*, ele disse: “recovered my footing in the world’s slippery path*”*. Porém, mesmo Sylvester podendo recuperar sua posição financeira como um resultado desta nova situação, ele não recuperou rapidamente sua posição de matemático. Apenas um artigo importante e quatro pequenas notas, durante o período de 1844 a 1850, foram emitidos a partir de sua caneta. Contudo, em 1850, ele conheceu Arthur Cayley, com isto, os dois estabeleceram o que seria ao longo de suas vidas, uma amizade e um contínuo diálogo matemático. Não é de surpreender, que com suas forças renovadas, Sylvester foi puxado de volta aos determinantes e a Teoria da Eliminação, este trabalho encaixava perfeitamente com a pesquisa sobre a Teoria das Formas que tanto envolveu Cayley por volta de 1850.

Para Crilly (2006), Cayley, em 1844, colaborou com George Boole, na Teoria dos Invariantes, reconhecendo a importância das n-dimensões geométricas. E em 1851, ele descobriu uma nova base para a Teoria dos Invariantes. O que mostra que Cayley realmente conhecia o artigo escrito por Boole, mas buscou uma nova base para a Teoria dos Invariantes.

Conforme Crilly (2006), a presença de Thomas Grainger Hall (1803–1881) na Universidade, durante o período em que Cayley estava na Universidade, teria sido um estímulo para os pensamentos do matemático Cayley. Hall mesmo que se beneficiando por meio da reforma na matemática de Cambridge, motivado pela *Analytical Society*, era natural encontrar em seus livros visões sobre a base do cálculo, em um capítulo de um de seus livros, ele utiliza o Teorema de Lagrange, como uma pedra angular para operações do cálculo, direcionando uma aproximação da álgebra com o cálculo. Cayley, foi atraído por este assunto quando iniciou sua carreira matemática, e ele seguiu estes métodos e princípios em suas pesquisas posteriores.

Cayley só se envolveu em uma real pesquisa após conhecer os matemáticos *Tripos*[7] e ter uma bolsa de estudos para trabalhar com William Hopkins (1793-1866). Antes seus trabalhos eram técnicos, houve uma nítida mudança após o envolvimento de Cayley com esta nova função, evidenciada em seus trabalhos sobre a teoria de potencial, inspirados no *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788) e em um problema originado por meio de um trabalho de verificação de Hopkins.

Segundo Parshall (1999) Boole em seu artigo, *Exposition of a General Theory of Linear Transformations* publicado em 1841, explorou as relações entre uma forma binária (polinômio homogêneo de grau n em duas variáveis) e uma transformação linear. Em particular, ele verificou o exemplo específico da forma binária quadrática $Q = ax^2 + 2bxy + cy^2$ e uma transformação linear das variáveis x e y dadas por $x = mx' + ny'$ e $y = m'x' + n'y'$, para $m, n, m', n' \in \mathbb{R}$ (sic)[8] e $mn' - m'n \neq 0$. Boole aplicou um processo envolvendo derivadas parciais, generalizando o que ele chamaria de discriminante de Q. Especificamente ele calculou $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2ax + 2by$ e $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2bx + 2cy$, igualando cada uma delas a zero, e eliminando as variáveis no sistema de equações lineares em x e y. O resultado desta eliminação, denominado $\theta(Q)$, foi $b^2 - ac$. Boole repetiu o processo sobre $R = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$, que é a forma binária quadrática obtida a partir da aplicação da transformação linear (dada acima) em Q, obtendo assim $\theta(R) = B^2 - AC$. Assim é fácil mostrar que $\theta(R) = (mn' -$

[7] Matemáticos envolvidos na organização do famoso exame Tripos de Matemática. Cabe citar o professor William Hopkins desde que ele foi o tutor particular de Cayley para a preparação neste exame. Cayley obteve em 1842 o primeiro lugar no Tripos, recebendo o título de Senior Wranglership.

[8] Em 1841, a Teoria dos Conjuntos não tinha sido construída.

$m'n)^2\theta(Q)$, ou que $\theta(R)$ e $\theta(Q)$ são iguais sobre uma potência do determinante da transformação linear.

Conforme Parshall (1999) Boole descobriu um invariante da forma binária quadrática Q, isto é, uma expressão em coeficientes de Q que permanece inalterada independente da potência do determinante, sob a ação de uma não singular transformação linear sobre Q. Cayley leu este trabalho em 1844 e criou um novo procedimento de cálculo envolvendo generalização de determinantes para gerar invariantes de formas binárias, em particular o referente à forma binária de grau quatro.

Crilly (2006) considerava que a maneira de Cayley pensar no que condiz com a Teoria dos Determinantes conectava esta teoria com outras áreas da matemática, incluindo a Teoria da Eliminação, teoria esta que conduziu Cayley dentro do seu ótimo desenvolvimento da “Teoria dos Invariantes”.

Na Teoria dos Determinantes Cayley desenvolveu dois diferentes assuntos: o primeiro era voltado para formas bilineares, estas formas envolviam dois conjuntos de variáveis; o segundo oferecia uma generalização de determinantes ordinários. Cayley mostrou determinantes n-dimensionais obedecendo uma regra de produção como a feita nos determinantes ordinários[9]. Em seguida ele tomou o trabalho de George Boole como referência em relação a estas curiosas extensões de determinantes:

> *I attempted some time ago in the Cambridge Philosophical Transactions, to investigate the properties of some such functions [n-dimensional determinants], formed by permulatory rule… thinking they might be applicable to the general theory of elimination, but they do not seem to possess much importance* (CAYLEY, 1844 apud CRILLY, 2006, p. 66).

Em contra partida, Cayley encontrou utilidade para eles na Teoria dos Invariantes. Esta observação de Cayley, exposta por Tony Crilly, mostra que ele acompanhava as publicações de Boole, e também as comentava.

No retorno da viagem pela Suíça e Itália, Cayley focou sobre a álgebra das formas, fazendo uso de várias áreas da matemática. Cabe mencionar que dois meses antes de seu retorno, William Rowan Hamilton presenteou o mundo com os Quarténios

[9] Trata-se do artigo *On the Theory of Determinants* publicado no *Cambridge Philosophical Transaction* em 1849 (manuscrito em 1843).

e em meio a tudo isto, os trabalhos de George Boole sobre Transformações Lineares, também atraiu a atenção de Cayley (CRILLY, 2006).

Conforme Crilly (2006), Cayley teve a audácia de publicar um trabalho sobre os Quarténios, logo após as descobertas de William Rowan Hamilton, e ao mesmo tempo colaborou com George Boole na "Álgebra das formas". Este último trabalho, ficou conhecido como a Teoria dos Invariantes, proliferou como o principal assunto do século XIX. Note a importância que este assunto desempenhou no século XIX, bem como a relevância de Boole para ele. Cabe também mencionar que Cayley trabalhou mais de uma área da matemática ao mesmo tempo assim como Boole.

Segundo Crilly (2006), apesar da vasta leitura de Cayley, ele estava a procura de um assunto próximo ao trabalho sobre transformações lineares publicado por George Boole, no *Cambridge Mathematical Journal*, em 1841. Boole era um matemático autodidata que vivia em Lincoln, que construiu um contato com os matemáticos de Cambridge e foi encorajado por D. F. Gregory e contribuiu para seu jornal. Embora Boole não tenha ingressado em nenhuma universidade, ele ficou conhecido no mundo científico como um matemático de essência, em 1844 ele foi agraciado com a primeira "*Gold Medal of The Royal Society of London*".

A ideia considerada por Boole, que atraiu a imaginação de Cayley, foi a propriedade particular de invariância, na qual algumas fórmulas (obtidas a partir de uma estrutura algébrica) são preservadas quando uma forma algébrica original é em si transformada.

Para Crilly (2006) Boole foi uma influência decisiva para Cayley, as publicações introdutórias de Boole referentes a Teoria das Transformações Lineares, na qual ele observou que as transformações lineares eram aplicáveis para soluções de equações polinomiais e que também poderiam produzir um novo ponto de vista para a Geometria Analítica. Contudo em 21 de outubro de 1841, ao fechar o segundo trabalho introdutório, ele declarou o seu desejo de abandono do assunto:

> *It is not my intention to enter into the subject in this place, nor have I leisure either to pursue the inquiry, or to elucidate my present views in a separate paper. To those who may be disposed to engage in the investigation, it will, I believe, present an ample field of research and discovery* (Boole, 1841, p. 119).

Esta citação também aparece nos trabalhos de Crilly (2006). Cayley ao ver esta passagem rapidamente focou para a teoria dos determinantes, que o ocuparia nos próximos anos. Durante a viagem pela Suíça e Itália, Cayley ficou mais receptivo as ideias de Boole e fez apenas anotações sobre o assunto. Cayley já estava envolvido com este tema, conforme fica atestado em sua publicação *On The Theory of Determinants*. Cayley percebeu que o conceito de invariância estava intimamente conectado com sua "paixão" na matemática a geometria analítica.

Após tais eventos Cayley, aos 22 anos de idade, escreveu uma carta introdutória para Boole:

> *Will you allow me to make an excuse of the a pleasure afforded me, by a paper of yours published some time ago in the [Cambridge] Mathematical Journal, 'On the theory of linear transformations' and of the interest I take in the subject, for sending you a few formulae relative to it, which were suggested to me by your very interesting paper; I should be delighted if they were to prevail upon you to resume the subject, which really appears inexhaustible* (CAYLEY, 1844 apud CRILLY, 2006, p. 86).

Ou seja, as ideias de invariância de Boole promoveram um grande estímulo no jovem Cayley. Conforme Crilly (2006), a ideia de invariância poderia ser detectada em trabalhos de outros matemáticos anteriores a 1840, como por exemplo, Gauss e Lagrange. E ainda como um método para se trabalhar questões geométricas, este assunto foi apresentado por matemáticos da *Trinity College* em 1830. Portanto Cayley viu uma oportunidade em suas mãos: a Teoria dos Invariantes, que veio a ser desenvolvida e conhecida como uma das mais importantes ideias de sua vida matemática.

De acordo com Crilly (2006) as questões de invariância algébrica são abordadas nos trabalhos de Boole e versam sobre formas algébricas e as transformações lineares. A forma algébrica mais simples é a expressão quadrática $ax^2 + 2bx + c$ e no seu estado homogêneo, a expressão é $ax^2 + 2bxy + cy^2$. O invariante correspondente a esta forma é $ac - b^2$, denominado por Δ_2, trata-se do discriminante da forma quadrática binária. Como já se sabe, a expressão $ac - b^2$ é essencialmente conservada quando se transforma a forma binária por meio de transformação linear, portanto recebeu o nome de invariante. A forma cúbica binária, $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, tem como seu invariante $a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd + 4b^3d + 4ac^3$ que é representado por Δ_3. O invariante da forma binária de sexta ordem é Δ_6, constituído por 246 termos. Estes invariantes foram bem conhecidos por um grupo de algebristas que trabalhou sobre a Teoria das equações em 1840. Em um pequeno trabalho submetido ao *Crelle's Journal*[10] em 1844, Ferdinand Eisenstein (1823-1852), utilizou estes invariantes como base para encontrar soluções de polinômios ate ordem quatro, neste trabalho ele mostrou que Δ_3 tem a propriedade de invariância entre outras, inclusive para as formas não-homogêneas. Boole chegou a conclusões semelhantes sobre essas propriedades. Cayley concordou com Boole.

Vale lembrar, segundo Crilly (2006), que George Boole considerava Cayley de uma maneira um pouco engraçada, como sendo o favorito pretendente da Ninfa Mathesis[11], em suas palavras "most favored wooer of the Nymph Mathesis", que evidência uma liberdade entre ambos. Desde que Cayley tomou a iniciativa em se corresponder com Boole, ele ficou ansioso em relação à primeira resposta. De fato Cayley foi cauteloso, dirigiu-se a Boole com respeito, como se pode observar em uma frase presente em uma de suas primeiras cartas a Boole: "Hoping you will excuse the liberty I have taken in writing to you". Porém a atitude de insegurança de Cayley não persistiu, pois logo ele ganhou confiança no novo assunto, de modo que a discussão entre os dois adquiriu um mesmo nível.

Eles discutiam sobre os mais diversos tópicos matemáticos, mas Cayley estava interessado na Teoria das Transformações Lineares, por um lado, ocasionalmente, Boole tentava atraí-lo com outras questões, mas "Transformações Lineares", foi a sua ideia fixa. Por outro lado, Cayley estimulava Boole a retornar para a teoria, que ele abandonou em 1841[12]. Após a primeira carta de Cayley, Boole calculou o discriminante da forma binária de quarto grau, com a expectativa de que o resultado tivesse aplicação na Teoria das Equações Algébricas, contudo ele ficou entediado com os cálculos (CRILLY, 2006).

Para Crilly (2006), o contato entre Cayley e Boole insurgiu interesses comuns entre os dois matemáticos, por exemplo, o invariante da forma binária de quarto grau (Δ_4), que foi subsequentemente calculado por ambos fazendo uso de métodos diferentes.

[10] Revista Matemática alemã, fundada em 1826, pelo matemático August Leopold Crelle (1780-1855).
[11] Mathesis: Palavra Grega; Lição, ação de aprender.
[12] Como apontado pela sua afirmação no artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformations* (1841, p. 119).

Os cálculos do discriminante (Δ_n) reaparecem ao longo da história da Teoria dos Invariantes. Cayley, por exemplo, conheceu o invariante da forma binária de quinto grau (Δ_5) vários anos após o seu início nesta teoria, e o fez por conta do estudo geométrico sobre superfícies reveláveis[13]. O invariante da forma binária de sexto grau (Δ_6), com os seus 246 termos, também foi calculado. Porém discriminantes de ordem maior da forma binária são tão extensos que é improvável que tenham sido calculados. Naturalmente, era um desejo para Cayley conhecer explicitamente todos os invariantes, este propósito significou um desafio para ele.

Segundo Parshall (1999) as derivadas parciais de Boole, método de 1841, produziu um complicado invariante nomeado K, referente à forma binária de grau quatro. E usando um novo método em 1844, Boole descobriu outro invariante $J = ace - 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$. Pelo Hiperdeterminante de Cayley, método de 1845, produziu um novo invariante $I = ae - 4bd + 3c^2$. Boole rapidamente percebeu, usando um cálculo de força bruta, que estes três invariantes, na realidade satisfaziam a relação: $K = I^3 - 27J^2$. Cayley, usando terminologia moderna, reconheceu que os invariantes I e J formam um conjunto gerador mínimo de invariantes para a binária de grau quatro e além disto, os elementos do conjunto gerador mínimo não precisam ser independentes, isto é, eles podem satisfazer uma relação algébrica de dependência. Como era esperado por Cayley a tarefa de elaborar uma bem sucedida teoria para detectar e analisar estas relações de dependência (*syzygies*, como nomeado por Sylvester) iria apresentar muitas dificuldades.

De acordo com Parshall (1999) em 1850, tanto Cayley como Sylvester, foram ativos explorando várias das ramificações do conhecimento de técnicas para a produção de invariantes, em um contexto algébrico bem como em um contexto geométrico. Guiado por Cayley em suas leituras, Sylvester aprofundou-se dentro de trabalhos de geometria de George Salmon (1819-1904), Otto Hesse (1811-1874), entre outros; buscou encontrar abordagens puramente algébricas para as questões geométricas.

Sinaceur (1991) notou que Sylvester pretendia uma algebrização da análise, com base no Teorema de Sturm (1835). Segundo Parshall (1999) no início da década de 50, Sylvester trabalhou para avançar nos estudos em relação a uma proposta de algebrização

[13] *On the developable derived from an equation of the fifth order* = [CP1 (1850): 501]. The discriminant Δ_5 was calculated by George Salmon as a contribution to Cayley's research (CRILLY, 2006, p. 495).

da geometria, resultando na publicação do artigo *An Enumeration of the Contacts of Lines and Surfaces of the Second Order* em 1851.

> *"Geometry to be properly understood, must be studied under a universal point of view..." he argued. "In this way only (discarding as but the transient outward form of a limited portion of an infinite system of ideas, all notion of extension as essential to the concept of geometry, however useful as a suggestive element) [in this way only] we may hope to see accomplished an organic and vital development of the science"* (SYLVESTER, 1851 apud PARSHALL, 1999, p. 253).

Ainda, de acordo com Parshall (1999), Sylvester precisamente desenvolveu a algébrica Teoria dos Invariantes.

Conforme Crilly (2006), entre 1850 e 1860, as pesquisas relacionadas à polinômios de quinto grau continuou a atrair a atenção de amadores britânicos, com o intuito de mostrar que a equação polinomial de quinto grau possui solução. Cayley rapidamente descobriu que esta solução poderia ser abordada pela Teoria dos Invariantes.

Boole estimulou Cayley em seus primeiros passos nesta teoria, ele beneficiou-se incomensuravelmente. No trabalho impresso de Cayley, inclusive sobre antecipação de resultados, há uma forte evidência da influência de Boole, conforme as suas cartas ilustram, no entanto o jovem matemático não mencionou a influência do ancião, usando os termos de Crilly (2006).

Para Parshall (1999) Sylvester fez sua primeira grande contribuição para a Teoria dos Invariantes no ano de 1852 com o artigo *On the Principles of the Calculus of Forms.* Neste mesmo ano Sylvester fez um estudo das propriedades de uma curva em dois eixos e chegou na forma canônica. Inclusive George Salmon citou este resultado em seu clássico texto *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*, de 1885, referente a invariantes e covariantes, quânticos e transformações lineares. Portanto, o problema da determinação da forma canônica de um quântico tornou-se um passo chave em uma abordagem geral das questões sobre as formas e suas propriedades. Embora *Law of Inertia* de Sylvester[14], resulte deste espírito, este artigo era um de seus resultados menos conhecidos. Cabe mencionar, de acordo com Parshall (1999), que este trabalho

---

[14] No Artigo de Parshall (1999) consta a referência: J. J. Sylvester, A Demonstration of the Theorem That Every Homogeneous Quadratic Polynomial Is Reducible by Real Orthogonal Substitutions to the Form of a Sum of Positive and Negative Squares, Philosophical magazine 4 (1852): 138-142.

permite aos historiadores explorar as interconexões entre a Teoria das Formas tal como Sylvester a concebeu e a Teoria dos Invariantes.

De acordo com Mattos (2008) o trabalho publicado por Cayley em 1854, foi o primeiro de uma série de memórias sobre os quânticos, no qual ele desenvolveu parte da Teoria dos Invariantes.

A abordagem teórica dos invariantes permitiu a algebrização do que era fundamentalmente tratado do ponto de vista geométrico. Referente a isto em 1852, houve o que podemos chamar de explosão da Teoria dos Invariantes, que por si só garantiu o movimento de algebrização da geometria. Neste contexto Sylvester participou ativamente deste movimento, com o seu trabalho sobre cálculos das formas (Parshall, 1999).

De acordo com Parshall (1999) Sylvester apresentou uma técnica de cálculo para determinar invariantes. Cayley em uma breve carta para Sylvester estabeleceu, sem qualquer indicação de uma prova, duas condições que uma expressão de coeficientes de uma forma binária precisaria satisfazer para que a ela fosse um invariante. Ele observou que *"[t]his will constitute the foundation of a new theory of Invariants."*

No segundo fascículo do artigo *On the Principles of the Calculus of Forms,* Sylvester notou sua dívida para com Cayley, mas foi rápido para adicionar que "[t]he method by which I obtain these equations and prove their sufficiency is my own..." Sylvester conduziu suas ideias de uma forma um pouco confusa, em seus trabalhos de 1852. Em 1853 ele investiu intensamente no trabalho *On a Theory of Syzygetic Relations of Two Rational Integral Functions*... no difícil problema de detecção de "syzygies". Foi seguido por Cayley em sua rigorosa sistematização publicada no *Introductory memoir Upon Quantics* de 1854, e em 1856, em seu *Second Memoir Upon Quantics.* Estes quatro trabalhos representam o nascimento da abordagem britânica para a Teoria dos Invariantes, um campo de trabalho sobre o qual tanto Sylvester quanto Cayley ficaram envolvidos durante toda carreira (PARSHALL, 1999).

Segundo Crilly (2006) Cayley propôs uma extensão substancial da Teoria dos Invariantes. Enquanto Boole considerou apenas polinômios homogêneos, Cayley foi além e considerou formas algébricas. Para cada variável expressada por Boole, Cayley associava um conjunto de variáveis. Assim, Cayley substituía termos tais como x^3, por um produto multinomial de termos tais como $x_1y_1z_1$. Por uma propriedade de invariância Cayley generalizou os resultados de Boole, como se observa em suas palavras:

> *[i]n attempting to demonstrate this very beautiful property it occurred to me that it might be generalized by considering for the function U, not a homogeneous function of the n^{th} order between m variables, but one of the same order, containing n sets of m variables, and the variables of each set entering linearly* (CAYLEY, 1845 apud CRILLY, 2006, p. 90).

Cayley definiu uma Função Multilinear θU (notação de Boole, 1841) por meio da propriedade de invariância:

> *A simple example of the function is the following: [For]*
>
> $$U = ax_1y_1z_1 + bx_1y_1z_2 + cx_1y_2z_1 + dx_1y_2z_2$$
> $$+ex_2y_1z_1 + fx_2y_1z_2 + gx_2y_2z_1 + hx_2y_2z_2,$$
>
> *and [is] the [multilinear hyperdeterminant]*
>
> $$\theta U = a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2 - 2ahbg - 2ahcf - 2ahde$$
> $$-2bgcf - 2bgde - 2cfde + 4adfg + 4bech,$$
>
> *which satisfies for instance*
>
> $$\left(a\frac{d}{de} + b\frac{d}{df} + c\frac{d}{dg} + d\frac{d}{dh}\right)\theta U = 0$$
>
> *and five other analogous equations* (CAYLEY, 1844 apud CRILLY, 2006, p. 90).

Nesta mesma carta, Cayley esboçou seu caminho para o desenvolvimento da Teoria dos Invariantes. Fez uso de alguns dispositivos algébricos, por exemplo, o determinante, para escrever o que ele chamou de um hiperdeterminante.

Segundo Crilly (2006) Boole não foi à única influência sobre o jovem matemático Cayley, pois ele teve um detalhado conhecimento dos trabalhos anteriores de Eisenstein e Otto Hesse, ex-alunos de C. G. J. Jacobi[15] (1804-1851). Boole certamente foi uma forte influência sobre Cayley, entretanto, os periódicos da Europa Continental, principalmente o *Crelle's Journal*, talvez tenha sido a mais forte referência para o matemático inglês. Ele publicou diversos artigos nesta revista. Esta combinação

---

[15] Carl Gustav Jakob Jacobi foi um matemático alemão que fez contribuições fundamentais para funções elípticas, dinâmicas, equações diferencias e teoria dos números.

de influências imprimiram sobre ele uma ampla visão, um cenário para a Teoria dos Invariantes, que unificou as ideias de Boole com as de matemáticos alemães.

Embora Cayley tenha desenvolvido uma teoria para as formas multilineares, ela não foi a sua principal meta. Na realidade, Cayley deu continuidade ao trabalho que Boole iniciou e não desenvolveu, que foi o estudo das formas homogêneas (polinômios homogêneos), na qual Cayley viu o prospecto do progresso imediato de um tipo prático e uma conclusão do trabalho para encontrar seus invariantes. Uma técnica frequentemente empregada por Cayley era um deslocamento a partir da "teoria de simples variáveis" para a "teoria de multivariáveis", fundamentada na ideia que para cada variável considerada por Boole, ele considerava um conjunto de variáveis (CRILLY, 2006).

Um significativo resultado produzido por Cayley trata-se do fato que Invariantes Multilineares reduzem os Invariantes Ordinários para como um caso particular.

Um dos resultados mais importantes que Cayley produziu é o fato de que a teoria multilinear gera novos invariantes, que não poderiam ser obtidos pelo método de Boole. Por exemplo, para a forma binária de quarto grau a expressão $v = ae - 4bd + 3c^2$ é um invariante que Boole não obteria a partir de sua formulação teórica (CRILLY, 2006).

Para Crilly (2006) Cayley, desde o início, foi rigoroso com os cálculos, mas isto não foi suficiente para obter um método geral que respondesse sobre a finitude de invariantes dada uma determinada forma, portanto, os invariantes deveriam ser calculados e apresentados. Dessa forma, a Teoria dos Invariantes foi baseada em algoritmos, com o propósito de impetrar uma generalização, que respondesse se os invariantes eram de extensão finita.

De acordo com Crilly (2006), na prática os cálculos eram mais tediosos do que difíceis, portanto, uma boa razão para Boole ter rejeitado desenvolver a Teoria dos Invariantes, desde que esta Teoria dependia dos extensos cálculos. Há várias evidências de que Boole estava à espera de alguém com tempo livre para desenvolver este trabalho.

No fim de agosto de 1844, Cayley escreveu para Boole novamente, com a intenção de corrigir um equívoco em sua primeira carta, relatando os progressos que havia feito.

A magnitude da Teoria dos Invariantes, a necessidade de extensos cálculos e o limite tecnológico desanimaram Boole. Cayley citado por Crilly (2006):

> *For [a quartic multilinear function with] four sets of two variables there is one value of [the multilinear invariants] F, of the second order, another perfectly independent one of the sixth order, the completely developed form of which consists of 232 terms, which I have succeeded with a good deal of difficulty in working out* (CAYLEY, 1844 apud CRILLY, 2006, p. 91).

Dificuldades descritas por Cayley aparecem no trabalho de 2006 de Crilly:

> *I have not been able to work out any thing further on the subject of linear transformations, indeed I almost felt myself come to a standstill for the present and have hardly attempted it. The question now, gives me the idea of requiring some rather complicated combinatorial analysis and I doubt whether I have enough of that, to bestow upon it* (CAYLEY, 1844 apud CRILLY, 2006, p. 92).

De acordo com Crilly (2006), este impasse foi uma consequência direta do cálculo de invariantes explicitamente e ele teve que superar estes problemas de combinatórias, senão o assunto tornar-se-ia morto.

Segundo Crilly (2006) o problema dos cinco pontos no espaço, também tratado por Joseph Louis Lagrange (1736–1813) e outros matemáticos, é um problema de recorrência, que aparece em outros estágios da história da matemática. Provavelmente a mais curiosa recorrência deste problema está na moderna Teoria dos Invariantes.

De acordo com Crilly (2006) Cayley leu o *Mécanique Analytique* de Lagrange publicado em 1788, quando ainda era estudante. Cabe menção ao matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi no que condiz com o desenvolvimento do trabalho de Cayley referente à Teoria dos Invariantes.

Contudo, os argumentos utilizados pelos historiadores da matemática, referentes à origem da Teoria dos Invariantes, são baseados em cartas trocadas entre os matemáticos europeus envolvidos com este assunto.

Segundo historiadores da matemática George Boole influenciou Arthur Cayley, consequentemente influenciou James Joseph Sylvester, o mais próximo interlocutor de Cayley. Em 1850 foi o início de uma amizade que durou por toda a vida matemática ativa de ambos. Naturalmente a coincidência de dividirem o mesmo local de trabalho proporcionou o sucesso desta parceria, além disso, ambos estudavam assuntos próximos ao abordado por Boole em seu artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformation* (1841).

O trabalho *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788), para os historiadores da Matemática, trata-se de uma possível influência sobre Cayley, e como citado no primeiro capítulo deste trabalho, este livro de Lagrange foi um dos interesses de estudo de Boole. Contudo é válido lembrar também que no início do artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformation,* Boole cita:

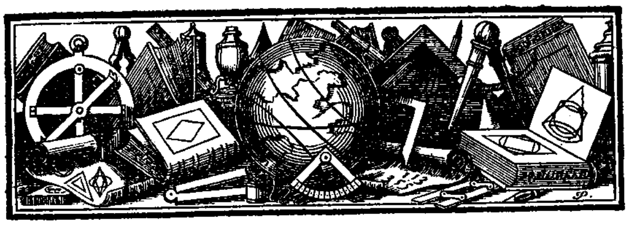
> *The transformation of homogeneous functions by linear substitutions, is an important and oft-recurring problem of analysis. In the Mécanique Analytique of Lagrange, it occupies a very prominent place, and it has been made the subject of a special memoir by Laplace. More recently it has engaged the attention of Lebesgue and Jacobi; the former of whom has extended his investigations to homogeneous functions of the second degree, and of an indefinite number of variables, while the latter has applied the results of such inquiries to the transformation of multiple integrals. A memoir on this subject has also been give to the world by Cauchy; and an ingenious paper by Professor De Morgan, on its geometrical relations will be found in the 5th volume of the Cambridge Philosophical Transactions* (BOOLE, 1841, p. 1).

Onde é possível notar que o trabalho *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788) é colocado como destaque, ou seja, este trabalho de Lagrange é tomado por Boole como sendo uma das principais raízes deste assunto. Contudo, o Artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformation,* é o marco zero em se tratando da Teoria dos Invariantes. Porém como é feito até em nossa contagem de anos, há um marco zero (o ano zero, ou nascimento de Cristo), porém há anos anteriores a este (neste caso, denominados antes de Cristo, ou seja, a.C.).

Portanto é por esta e outras citações referentes a esta produção de Lagrange (1788) que no próximo capítulo será feito um breve estudo referente à *Mécanique Analytique,* buscando verificar se esta produção pode ser considerada como um trabalho anterior ao de Boole de 1841 e relacionado com a Teoria dos Invariantes.

Capítulo 4

Um estudo sobre o Livro *Mécanique Analytique* escrito em 1788 por Joseph Louis Lagrange.



MÉCHANIQUE

ANALITIQUE.

PREMIERE PARTIE.

LA STATIQUE.

SECTION PREMIERE.

Sur les différens Principes de la Statique.

Um dos propósitos deste estudo é conhecer a motivação de Boole para escrever o artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformation.* Então neste Capítulo, fizemos um estudo sobre o trabalho de Lagrange de 1788, *Mécanique Analytique*, com o intuito em encontrar semelhança ou discrepância em relação a Teoria dos Invariantes. Esta obra é dividida em duas partes, intituladas: *A Estática* e *A Dinâmica*.

Estudamos a primeira parte, ou seja, *A Estática*. Desde que Boole em seu artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformation* utilizava com frequência uma expressão "emprestada da Estática" em que envolve funções e suas derivadas e uma equação de equilíbrio.

A Primeira parte do *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788), *La Statique* (A Estática) é subdividido em oito Seções, estudaremos as três primeiras. Na primeira seção, *"Sur lês différen[t]s Principes de la Statique,"*[16] Lagrange (1788) expõe de diversas maneiras o conceito de estática[17].

Segundo Lagrange (1788) força ou energia trata-se de causa que produz ou tende a produzir movimento aos corpos, sendo a quantidade de movimento produzida, ou potencialmente a produzir, aspecto ligado à força ou à energia aplicada aos mesmos. No estado de equilíbrio, a força não tem esta função, ela não produz movimento, mas devemos sempre medi-la pelo efeito que ela produziria se não estivesse parada (neutralizada ou interrompida por outras forças ou energias)[18].

> En prenant une force quelconque, ou son esset pour l'unité, l'expression de toute autre force n'est plus qu'un rapport, une quantité mathématique qui peut être représentée par des nombres ou des lignes ; c'est sous ce point de vue que l'on doit considérer les forces dans la Méchanique (LAGRANGE, 1788, p. 2).[19]

Lagrange (1788) considera que o equilíbrio resulta da destruição de várias forças que se combatem e aniquilam reciprocamente as ações que elas exercem umas nas outras. O objetivo da Estática é estabelecer as leis segundo as quais esta destruição se opera. Estas leis são fundadas nos princípios gerais que podem reduzir-se a três: equilíbrio nas alavancas, composição de movimentos e velocidades virtuais.

Lagrange (1788) sustenta seus argumentos em livros, memórias, trabalhos, periódicos e resultados de autores tais como Archimedes, Galileu, Descartes, Bernoulli, entre outros. A primeira seção de seu livro é dedicada às três leis enunciadas no parágrafo anterior.

Para a lei de equilíbrio nas alavancas ele se baseou no *Princípio da Alavanca* de Archimedes. No qual Lagrange (1788) inicia dizendo que uma alavanca é carregada de dois pesos, um para cada lado do ponto de apoio, se as distâncias entre o ponto de apoio em relação aos centros de massa dos pesos forem reciprocamente proporcionais

---

[16] Sobre os Diferentes Princípios da Estática

[17] Lagrange (1788) no primeiro parágrafo, desta seção, enuncia: *La Statique est la science de l'équilibre des forces (*Estática é a ciência de equilíbrio das forças).

[18] On entend en général par force ou puissance la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée ; & c'est aussi par la quantité du mouvement imprimé, ou prêt à imprimer, que la force ou Puissance doit s'estimer. Dans l 'état d'équilibre la force n'a pas d'exercise actuel ; elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement ; mais on doit toujours la mesurer par l'esset qu'elle produiroit si elle n'étoit pas arrêtée.

[19] Tomando uma força aplicada qualquer, ou o seu efeito em uma unidade, a expressão de outra força qualquer deixa de ser uma representação de uma quantidade matemática que pode ser representado por números ou linhas, isto é, sob este ponto de vista, devemos considerar as forças na Mecânica.

(inversamente proporcionais), a alavanca estará em equilíbrio, e o apoio estará carregado da soma dos dois pesos.

Segundo Lagrange (1788), se carregarmos uma alavanca, com dois pesos iguais e colocados a distâncias iguais de seu ponto de apoio, ela estará em equilíbrio, e se depois dividirmos os dois pesos em vários pedaços iguais, e os distribuirmos de modo a manter as distâncias iguais entre si em relação ao ponto de apoio, a alavanca ainda estará em equilíbrio.

No que condiz com a Teoria dos Invariantes o raciocínio abaixo é utilizado no artigo de Boole (1841). Se carregarmos uma alavanca, com dois pesos de massas P_1 *e* P_2, com as distâncias respectivamente d_1 *e* d_2 de seus centros de massa em relação ao ponto de apoio de maneira com que esta alavanca fique em equilíbrio em relação a este mesmo apoio, teremos então que $P_1 \cdot d_1 = P_2 \cdot d_2$. Portanto determinadas transformações relativas aos pesos, são invariantes em relação ao equilíbrio da alavanca. Mudar a forma dos pesos é uma transformação invariante, desde que não alteremos massa e distância, a expressão $P_1 \cdot d_1 = P_2 \cdot d_2$, se manterá. Outro exemplo de transformação invariante é: se dividirmos qualquer um dos pesos em n partes iguais, e dispormos todas estas partes, do mesmo lado da alavanca que se encontrava antes, e em posições cuja média aritmética das novas distâncias ao ponto de apoio, seja igual a medida *d* referente a distância do peso antes da divisão, ou seja, o centro da massa das n partes permaneça na mesma distância *d*.

Referente à *lei da composição de movimentos*, Lagrange (1788) faz várias referências, mas atentaremos para uma, a *dedução de Stevin*, a qual Lagrange utiliza para introduzir o assunto. A *dedução de Stevin* está relacionada a uma teoria de equilíbrio entre três energias (forças) que agem em um mesmo ponto, se são paralelas e proporcionais aos três lados de um triângulo retilíneo qualquer, então haverá equilíbrio. Concluímos que a *dedução de Stevin* não considera a condição de que: as duas energias nunca tivessem os sentidos voltados para um mesmo vértice do triângulo.

De acordo com Lagrange (1788), qualquer que seja o sistema de forças (energias), sempre pode-se tomá-las duas a duas, e de cada duas gerar uma força resultante que sozinha represente o movimento que as outras duas fariam, desta forma elimina-se todas estas forças até que reste apenas uma que por si só represente todo o sistema. Em um sistema estático a força resultante é nula.

Deduz-se a partir da lei de composição de movimentos que: se tomarmos um triângulo em um plano, se assumirmos três energias, onde cada uma delas é paralela e proporcional a cada lado deste triângulo, estas três energias estarão em equilíbrio, ou seja, formarão um sistema estático de energias.

Com base na lei da *composição de movimentos* há transformações que podem ser aplicadas a este sistema e o mesmo permanecerá estático.

Por exemplo: se aplicarmos uma inclinação igual e no mesmo sentido para as três energias, o sistema permanece estático, desde que seria equivalente a aplicar um giro ao triângulo, desde que a ação de girar um triângulo não altera "o fato" de ser um triangulo com os mesmos ângulos e lados. De modo análogo, o sistema de energias permanece estático. Se multiplicarmos as três energias por uma constante K, elas seriam modificadas proporcionalmente gerando um triângulo semelhante, sem alteração da condição estática, vale mencionar que K é, também, a razão de semelhança entre os triângulos.

Lagrange (1788) fez uso da *lei das velocidades virtuais* para ampliar a noção de equilíbrio e de estática:

> *Si un systême quelconque de tant de corps ou points que l'on veut tirés, chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, e qu'on donne à ce systême un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle; la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où ele est appliquée, parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zero, en regardant cômme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissnces, e comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé* (LAGRANGE, 1788, p. 10 e 11).[20]

Portanto podemos afirmar que neste caso conseguimos aplicar as mesmas transformações utilizadas na *lei da composição de movimentos* (descritos a cima) que o sistema ainda será estático.

[20] *Se um sistema qualquer, tanto de corpos ou de pontos que desejamos elaborar com cada um com energias quaisquer, e este em equilíbrio, e que damos a este sistema um pequeno movimento qualquer, em verdade do qual cada ponto percorrerá um espaço infinitamente pequeno, que exprima a sua velocidade virtual; a soma das energias multiplicadas cada uma pelo espaço que o ponto, onde ela é aplicada, percorre segundo a direção desta mesma energia, será sempre igual a zero, olhando como positivos os pequenos espaços percorridos no sentido da energia e como negativo os pequenos espaços percorridos no sentido oposto da energia.*

A segunda seção do livro de Lagrange (1788) em estudo, intitulada "*Formule générale pour l'équilibre d'um systême quelconque de forces; avec la maniere de faire usage de cette formule,"*[21] Lagrange, apresentou a fórmula geral para o equilíbrio de um sistema qualquer de forças.

A *lei geral do equilíbrio das máquinas* garante que forças ou energias estão em reciprocidade com as velocidades dos pontos onde elas são aplicadas e estimadas segundo a direção de suas energias. Lagrange (1788) afirmou que esta lei consiste no "normalmente" chamado *Princípio das velocidades virtuais*, ou seja, um axioma específico da Mecânica.

Para reduzir este princípio em fórmula, Lagrange (1788) supõe que das energias $P, Q, R, \ldots$ direcionadas seguindo as linhas dadas, que produziram o equilíbrio, ou seja, colocadas de maneira a gerar a estática do sistema. Ele também sugere que dos pontos onde as energias são aplicadas, os levam a linhas retas iguais a $p, q, r, \ldots$ e colocadas na direção desta energia, ou seja, estas retas são as direções nas quais estas energias são aplicadas nestes pontos para gerar a estática do sistema; e designadas geralmente por $dp, dq, dr, \ldots$ as variações ou diferenças nestas linhas, no quanto eles podem resultar de uma mudança qualquer infinitamente pequena nas posições dos diferentes corpos ou pontos do sistema.

Lagrange começou a dedução de sua fórmula tomando como base três energias $P, Q\ e\ R$, em equilíbrio, e sugeriu que se substituirmos qualquer uma das três energias por um ponto fixo capaz de suportar as outras duas energias o equilíbrio ainda subsistirá.

Partindo desta ideia ele analisou as leis de equilíbrio entre duas forças, substituindo por um ponto fixo inicialmente R. Depois de algumas deduções e alguns cálculos ele chegou à seguinte expressão $\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp}$, ou seja, $Pdp + Qdq = 0$.

Finalmente, Lagrange (1788) chegou à *equação geral de equilíbrio* para as três energias, ou seja, $Pdp + Qdq + Rdr = 0$. E com base em algumas observações, ele mostrou que se pode adicionar mais uma força gerando a seguinte equação $Pdp + Qdq + Rdr + Sds = 0$. Portanto, Lagrange deduziu que a equação de equilíbrio de um

[21] fórmula geral para o equilíbrio de um sistema qualquer de forças; com a maneira de se fazer uso desta fórmula

sistema qualquer com uma quantidade qualquer de forças é $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = 0$.

Após algumas observações Lagrange (1788) concluiu que para ter a soma dos instantes de todas as forças de um sistema dado, teremos que considerar em particular cada uma das forças que age nos corpos ou pontos do sistema, e tomar a soma dos produtos das diferentes forças multiplicadas cada uma pela diferencial da distância respectiva aos dois termos de cada força, isto é, o ponto no qual age esta força e aquele para onde ela vai. As diferenciais representam as variáveis de todas as quantidades que dependem do sistema. As constantes representam os pontos ou centros externos, isto é, é suficiente considera-los pontos fixos no sistema. Esta quantidade igualada a zero, dará a fórmula geral do princípio do equilíbrio. Para exprimir analiticamente a mesma quantidade basta informar a posição de todos os pontos do sistema dado, em coordenadas retangulares e paralelas a três eixos fixos no espaço.

Lagrange nomeou as coordenadas em relação aos três eixos de $x, y \; e \; z$, referentes aos pontos onde são aplicadas as forças e designou por $a, b \; e \; c$, as coordenadas para os centros das forças.

Desse modo as distâncias $p, q, r, \ldots$, são expressas, em geral, pela fórmula $\sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}$, e as quantidades $a, b \; e \; c$ são constantes, desde que $x, y \; e \; z$ variem quando relacionada com pontos fixos fora do sistema e variem quando as forças provenham dos corpos do sistema. Caso contrário, tais quantidades $a, b \; e \; c$ se tornam $x'''^{\cdots}, y'''^{\cdots}, z'''^{\cdots}, \ldots$ que poderão por consequência variar.

Lagrange (1788) chegou em $p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, e com mais algumas deduções encontrou a expressão $dp = \frac{x-a}{p}dx + \frac{y-b}{p}dy + \frac{z-c}{p}dz$.

Partindo desta última expressão ele desenvolveu a seguinte equação $dp = \cos\alpha \, dx + \cos\beta \, dy + \cos\gamma \, dz$, onde $\alpha, \beta \; e \; \gamma$ são os ângulos formados pela direção da força em relação aos eixos $x, y \; e \; z$ respectivamente.

Lagrange (1788) a partir disto faz uso de dedução e comparação nas quais se baseia para dizer que *Les valeurs des différences* $dp, dq, dr, \ldots$ *étant connues en fonctions différentielles des coordonnées des différens corps du systême, il n'y aura* *qu'à les substituer dans la formule générale*[22], retornando a equação de equilíbrio $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = 0$, e desenvolvendo desta maneira equações do tipo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

A comparação entre a segunda seção do livro *Mécanique Analytique* (1788) com a Teoria dos Invariantes, proporcionou a identificação de objetos matemáticos usados em ambos. Lagrange (1788) expressou o equilíbrio de em um sistema qualquer de forças, cuja estrutura do sistema deveria garantir a condição estática do sistema, para tanto, ele se baseou no *Princípio das Velocidades Virtuais.*

Na Teoria dos Invariantes, Boole (1841) utilizou as mesmas premissas empregadas por Lagrange (1788) para que um sistema mantenha o equilíbrio, por exemplo, $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = 0$. O propósito nesta Teoria são as estruturas algébricas invariantes sob aplicação de transformação linear em formas homogêneas.

A terceira seção, intitulada, *Propriétés générales de l'équilibre déduites de la formule precedente*[23] é brevemente estudada neste trabalho.

Lagrange (1788) considerou um sistema ou um conjunto qualquer de corpos ou pontos, em equilíbrio, para uma quantidade qualquer de energia. E se num determinado instante esta ação for destruída, o sistema deixará de ser estático e se movimentará. Seja qual for o seu movimento, será sempre designado como um composto: 1º de um movimento de translação comum a todos os corpos; 2º de um movimento de rotação em torno de um ponto qualquer; 3º dos movimentos relativos aos corpos entre si, por qualquer mudança nas suas posições, e suas distâncias mútuas. Qualquer que seja o movimento será um composto destes movimentos.

Entretanto, este último tipo, o composto dos movimentos relativos, depende da maneira como estão dispostos os corpos entre si. A condição necessária para impedir estes movimentos será particular para cada sistema. Porém os outros movimentos de Translação e de Rotação, podem ser independentes da forma do sistema, e são executados sem que a disposição e a ligação mútua dos corpos seja perturbada.

---

[22] Os valores das diferenças $dp, dq, dr, \ldots$ sendo conhecidos nas funções diferenciais das coordenadas dos diferentes corpos do sistema, existirá apenas uma substituição para a fórmula geral.

[23]Propriedades gerais do equilíbrio deduzidas da formula anterior. Do livro *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788).

Assim Lagrange (1788) considerou movimentos de translação e rotação apropriados para elaborar as condições ou propriedades gerais do equilíbrio.

A partir da equação mencionada na seção anterior, $Pdp + P'dp' + P''\mathrm{dp}'' + \cdots = 0$, com notação um pouco diferente, Lagrange chegou nas três equações:

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P"\cos\alpha" + \cdots = 0$$

$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P"\cos\beta" + \cdots = 0$$

$$P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P"\cos\gamma" + \cdots = 0$$

Respectivamente para as diferenciais $dx, dy\, e\, dz$, e ele afirmou que estas equações são necessárias para impedir o movimento de translação e podem se reduzir a expressão $P + P' + P" + \cdots = 0$, a qual mostra que a soma das forças paralelas deverá ser nula.

A consequência deste resultado é o seguinte teorema, *a soma das energias estimadas seguindo a direção dos três eixos perpendiculares entre eles, deveria ser nula em relação a cada um destes eixos em um sistema livre em equilíbrio.*

Segundo Lagrange (1788) qualquer rotação de um sistema em torno de um ponto (com origem no sistema de coordenadas) é sempre possível reduzi-lo para $d\psi, d\omega\ e\ d\varphi$, em torno dos três eixos das coordenadas $x, y\ e\ z$, e as variações de todas as coordenadas x, y, z, x', y', z', ... desse modo chegou a três equações encontradas na seção anterior:

$$P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + P"(x"\cos\beta" - y"\cos\alpha") + \cdots = 0$$

$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P"(x"\cos\gamma" - z"\cos\alpha") + \cdots = 0$$

$$P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + P"(y"\cos\gamma" - z"\cos\beta") + \cdots = 0$$

Elas são suficientes para impedir qualquer rotação em torno de um ponto que tem origem nas coordenadas $x, y\, e\, z$. E caso todas as forças $P, P', P"$, ..., sejam paralelas, então: $\alpha = \alpha' = \alpha"$ ...; $\beta = \beta' = \beta"$ ...; $\gamma = \gamma' = \gamma"$ ... assim estas três equações se tornariam:

$$(Px + P'x' + P"x" + \cdots)\cos\beta - (Py + P'y' + P"y" + \cdots)\cos\alpha = 0$$

$$(Px + P'x' + P"x" + \cdots)\cos\gamma - (Pz + P'z' + P"z" + \cdots)\cos\alpha = 0$$

$$(Py + P'y' + P"y" + \cdots)\cos\gamma - (Pz + P'z' + P"z" + \cdots)\cos\beta = 0$$

respectivamente.

Lagrange (1788) também observou que a terceira equação é uma sequência das outras duas equações, ou seja, conseguiríamos obtê-la através de combinações com base nos outros termos das duas primeiras equações.

Em seguida, Lagrange (1788) chegou no seguinte teorema:

> *que si la somme des produits des forces paralleles, par leurs distances à trois plans perpendiculaires entr'eux, est nulle par rapport à chacun de ces trois plans, l'effet des forces pour faire tourner le systême autor du point commun d'intersection des mêmes plans, se trouvera détruit* (LAGRANGE, 1788, p. 35).[24]

Desta forma para considerar valores máximo e mínimo de movimento no estado de equilíbrio, Lagrange (1788) retoma a fórmula geral $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots = 0$, lembrando que esta representa o equilíbrio das forças $P, Q, R, \ldots$ nas direções das retas $p, q, r, \ldots$, supondo que $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots$ seja uma diferencial exata de uma função de $p, q, r, \ldots$ a qual é representada por ϕ, portanto $d_{\phi =}Pdp + Qdq + Rdr + \cdots$.

Para equilibrar esta equação basta fazermos $d_\phi = 0$, e o sistema deve ser organizado de forma que a função ϕ_y seja um máximo ou um mínimo.

A expressão: $m'u'^2 + m"u"^2 + m'''u'''^2 + \cdots = K - 2\phi$, sendo $m, m', m", m''', \ldots$ as massas de cada corpo do sistema, sendo $u, u', u", u''', \ldots$ as velocidades de cada do corpo do sistema, respectivamente, e o valor de ϕ é um mínimo ou um máximo, no estado de equilíbrio, segundo o valor de $m'u'^2 + m"u"^2 + m'''u'''^2 + \cdots$. Esta expressão trata-se de uma representação da força viva de todo o sistema.

Lagrange (1788) baseado na expressão acima e mais algumas substituições ele encontrou uma nova expressão para ϕ, ou seja, $\phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \cdots$.

Com esta e outras expressões ele encontrou, enfim, a equação:

[24] *que se a soma dos produtos das forças paralelas, pelas suas distâncias aos três planos perpendiculares entre eles, seja nula em relação a cada um destes três planos, o efeito das forças para fazer girar o sistema em torno de um ponto comum da intersecção dos mesmos planos, se encontrara destruída.*

$$M'u'^2 + M"u"^2 + M'''u'''^2 + \cdots$$
$$= M'V'^2 + M"V"^2 + M'''V'''^2 + \cdots - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \cdots$$

A partir desta equação, Lagrange (1788) tirou duas conclusões: 1º No caso em que ϕ, assume valor mínimo, os coeficientes $f, g, h,$ ... são todos positivos. A expressão $2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2 + \cdots$, sempre positiva, deverá ser necessariamente menor, ou igual que o valor dado por $M'V'^2 + M"V"^2 + M'''V'''^2 + \cdots$(este valor é muito pequeno), se chamarmos este valor de T, como consequência, teremos para cada uma das variáveis $\xi, \eta, \zeta,$ ... os limites $\pm\sqrt{\frac{T}{2f}}, \pm\sqrt{\frac{T}{2g}}, \pm\sqrt{\frac{T}{2h}},$ .... Portanto, o sistema desviará muito pouco de seu estado de equilíbrio, e também oscilará muito pouco; 2º No caso em que ϕ assume valor máximo os coeficientes $f, g, h,$ ..., são todos negativos. A expressão $-2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \cdots$, sempre positiva, poderá crescer para o infinito, portanto o sistema desviará mais e mais do seu estado de equilíbrio.

Lagrange (1788) encontrou uma estrutura equacionada (fórmula), que pudesse representar ou calcular condições de equilíbrios de um sistema qualquer de corpos, com uma quantia qualquer de forças atuando sobre ele, em que a condição estática permanecesse invariante.

Quase meados do século XIX, George Boole, publicou *Exposition of a General Theory of Linear Transformation* (1841) e neste artigo ele fez uso dos resultados para sistemas em equilíbrio para procurar invariantes de formas homogêneas.

Na segunda seção do *Mécanique Analytique,* Lagrange (1788) demonstrou que é possível trabalhar com três energias duas a duas, e com as três equações geradas a partir destas relações, mostrou que podemos gerar apenas uma energia (força) resultante referente às três energias. Os três eixos perpendiculares entre si no espaço, $x, y\ e\ z,$ para cada dois destes eixos em um plano, gerou três fórmulas que foram reduzidas a apenas uma expressão.

Boole (1841) usou a expressão $\phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \cdots$ encontrada por Lagrange, para formas homogêneas.

Portanto, podemos afirmar que o Trabalho *Mécanique Analytique* de Lagrange, foi usado por Boole no artigo *Exposition of a General Theory of Linear Transformation* e trata-se de uma das raízes (origens) da Teoria dos Invariantes.

Conclusão

O propósito desta pesquisa foi o estudo sobre as origens da Teoria dos Invariantes. Segundo historiadores da matemática a Teoria dos Invariantes nasceu em 1841, tendo como marco o artigo de George Boole, *Exposition of a General Theory of Linear Transformations.* Segundo Fisher (1996) a Teoria dos Invariantes tornou-se obsoleta por volta de 1930, "...Hilbert's act took on a symbolic meaning in the passing of time (...) the rhetoric of modern mathematical method supplied an explanation for the changes that took place" (p.159).

O fato de Boole (1841) ter usado o trabalho *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788) em sua publicação foi a razão pela qual decidimos estudar esta obra clássica de Lagrange e, podemos afirmar que se a obra de Lagrange não foi a única influência, certamente foi uma forte influência sobre a Teoria dos Invariantes no cenário inglês.

A defesa, dos historiadores da matemática, de que o artigo de Boole de 1841 marcou o início da Teoria dos Invariantes na Inglaterra está sustentada principalmente sobre as correspondências trocadas por Boole e Cayley, e por um parecer escrito por Cayley referente ao artigo de Boole (1841).

George Boole quando foi professor voluntário de Matemática, Ciências e estudos Clássicos, do Instituto de Mecânica de Lincoln, ficou encarregado de fazer um relatório referente ao acervo da biblioteca do Instituto e indicar obras importantes para atualizar o acervo. O livro *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788) foi considerado por Boole, como uma obra imprescindível para aquela Biblioteca e futuramente esta obra foi relevante em sua carreira.

Boole (1841) desenvolveu um método para encontrar invariantes relativos às formas homogêneas, ele fez uso dos resultados elaborados por Lagrange (1788) relativos a sistemas de forças (energias) em equilíbrio. Ele usou principalmente a equação de equilíbrio de Lagrange (1788) para construir as equações usadas em seu método.

Várias expressões elaboradas por Lagrange (1788) adquiriram relevância para a nova teoria matemática que estava nascendo. Por exemplo, a expressão $\phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \cdots$.

No que condiz com a comparação entre o método para calcular invariantes de George Boole, com os métodos de cálculo de invariantes de Arthur Cayley e de James Joseph Sylvester, verificamos que os três métodos apresentavam a seguinte semelhança, faziam uso da distinção entre os graus pares e ímpares.

Enfim, a motivação exercida pelo *Mécanique Analytique* de Lagrange (1788), sobre Boole é bem diferente daquela exercida por Boole (1841) sobre Cayley. Enquanto Boole tentou desenvolver as ideias de Lagrange na matemática, Cayley desenvolveu as ideias de Boole. Portanto, criou a partir das ideias de Boole uma nova área para a matemática.

Podemos concluir que Lagrange (1788) foi a grande referência para Boole escrever *Exposition of a General Theory of Linear Transformation* (1841) e, podemos concluir que esta publicação foi uma influência decisiva para Arthur Cayley em sua juventude.

Referências

BALL, W.W. R. **A short Account of the History of Mathematics**. Second edition. London: Macmillian an CO., Limited: 1893.

BOOLE, G., "Exposition of a general theory of linear transformations", **The Cambridge Mathematical Journal.** vol.III, November, Part. I. 1841.

BOOLE, G., "Exposition of a general theory of linear transformations", **The Cambridge Mathematical Journal.** vol.III, November, Part. II. 1841.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** Edgard Blücher. São Paulo. 1974.

CAJORI, F. **A History of Mathematics.** Macmillan & Co.: New York & London, 1938.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, The John Hopkins University Press, 2006.

CRILLY, T. The Rise of cayley's Invariant Theory (1841-1862). **Historia Mathematica.** V.13, 1986, p. 241-254.

CRILLY, T. The young Arthur Cayley. **Notes and Records of the Royal Society.** London, v.52 (2), 1998, pp.267-282.

CAYLEY, A. An Introductory memoir on quantics. **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1854b, 144, pp. 244-258.

CAYLEY, A. A Second memoir upon quantics. **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1855, 146, pp. 101-126.

CAYLEY, A. A Third memoir upon quantics. **Philosophical Transaction of Royal Society of London.** London, 1856, 147, pp. 627-647.

ELLIOT, E. B. **An Introduction to the Algebra of Quantics**, Oxford: At the Claredon Press, 1895.

FISHER, S.C. The Death of a Mathematical theory : a Study in the Sociology of Knowledge. **Archive for the History of Exact Sciences**, 3, 1996.

FOSSA, J. A., SOUZA, G. C. *Uma Introdução à vida e obra de George Boole*. SBHMat. Guarapuava, 2007, Coleção História da Matemática para Professores.

LAGRANGE, Joseph Louis, Mécanique Analytique. 1788. Academia de Ciências de Paris e de Berlin. Pétersbourg – Turin. Editions Jacques Gabay, 1989

MACHALE, D., *George Boole: His Life and Work.* Dublin: The George Boole Press, 1985.

MATTOS, A. C., ABDOUNUR, O. J., "A study of George Boole's paper: "Exposition of a general theory of linear transformations". **Proceedings of the 6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education**, 19 – 23 Julho, 2010, Viena, Austria. Proceedings http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/ESU_Files/abstracts.pdf

MATTOS, A.C. The process of recognition in the history of mathematics. In : **Proceedings of 11th International Congress of Mathematics Education (ICME), 2008. Monterrey. Mexico**. Proceedings. http://tsg.icme11.org/document/get/626

MATTOS, A.C. **The role of the referee in the History of Mathematics. In :** Proceedings of 5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education **(EUS - 5), 2007, Praga, Republica Checa. Proceedings.** http://www.pedf.cuni.cz/kmdm/esu5

MATTOS, A.C. TANAAMI, S. **Reconhecimento na história da Matemática: O caso de Arthur Cayley. In :** 4ª Mostra Acadêmica da Universidade Metodista de Piracicaba**, 2006, Piracicaba, Brasil. Procedido de** http://www.unimep.br/phpg/mostraacademica/anais/4mostra/pdfs/119.pdf

KATZ, V.J. **A History of Mathematics: An Introduction**. 2.ed. Massachusetts, Addison-Wesley, 1998.

OLVER, P. J. Classical Invariant Theory. Cambridge: At the University Press, 1999.

PARSHALL, K. H., The British development of the theory of invariants (1841-1895). ***BSHM Bulletin***. 2006, **21**, 186-199.

PARSHALL, K. H., **The Mathematical Legacy of James Joseph Sylvester**. University of Virginia, Charlottesville: 1999. pp. 247-267.

PARSHALL, K. H., **James Joseph Sylvester: Life and Work in letters**. Oxford, Clarendon Press: 1998.

SINACEUR, H., Corps et Modèles: Essai sur l'Histoire de l'Algèbre réelle. Paris: Librairie philosophique J. Vrin: 1991.

SYLVESTER, J. J., On The Principles of The Calculus of Forms. Cambridge and Dublin Mathematical Journal 7: 1852, 52-97 and 179-217.