Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Espaços Vetoriais Topológicos

Wasthenny Vasconcelos Cavalcante

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2015

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Espaços Vetoriais Topológicos

por

Wasthenny Vasconcelos Cavalcante

sob a orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

e coorientação do

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2015

C376e Cavalcante, Wasthenny Vasconcelos.
Espaços Vetoriais Topológicos/ Wasthenny Vasconcelos Cavalcante. João Pessoa - 2015.
130f.
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino
Coorientador: Joedson Silva dos Santos
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.
1.Matemática. 2. Espaços Vetoriais Topológicos. 3. Espaços localmente Convexo. 4. Topologias. 5. Teorema de Aplicação Aberta. Teorema do Gráfico Fechado.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Espaços Vetoriais Topológicos

por

Wasthenny Vasconcelos Cavalcante [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Daniel Núñez Alarcón – UFPE
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista do Conselho Nacional de Pesquisa - CNPq.

À minha família.

Agradecimentos

- A Deus.

- Aos meus avós, Jesse Florêncio Cavalcante e Cleidemar da Silva Cavalcante, a minha mãe, Aurora Maria Vasconcelos Neta e minha irmã, Wadna Vasconcelos Cavalcante por me apoiarem incondicionalmente.

- A Marília Gabriela da Costa, por ser essa pessoal especial, com quem tenho apoio e motivação para continuar me esforçando na matemática.

- Aos meus colegas de turma, Cássio Nunes dos Anjos, Daniel Correia Lemos de Messias, Igor Laélio Barbosa Souza e Jorge Alexandre Cardoso do Nascimento, por quebrarem a cabeça nas disciplinas que fizemos.

- Agradeço aos meu amigos da Graduação Ailton Pereira, Arlandson Matheus Silva Oliveira, Caio Illan Ferreira Rodrigues, Erivaldo Diniz de Lima, Geilson Ferreira Germano, Guilherme Francisco do Nascimento, Igor Délio de Sousa, Isaque Tertuliano Cavalcante Bezerra, José Damião Souza de Oliveira, Marcus Felipe Soares Bezerra, Paulo Roberto Beltrão Maia, Pedro Henrique Oliveira Pantoja, Romildo Nascimento de Lima, Ronaldo Cesar e Wênia Valdevino Fêlix.

- Agradeço aos meus amigos Alexandre Grama, Ludnilson, Luis Otávio, Rafaela Medeiros e William Targino.

- Aos professores Roberto Hugo Bielschowsky e Viviane Simioli Medeiros Campos, por me incentivarem durante a Graduação.

- Ao professor, Daniel Marinho Pellegrino, por toda ajuda que tive durante esse período.

- Ao Professor, Joedson Silva dos Santos, por ajudar a corrigir este trabalho.

- Aos amigos que fiz durante esse tempo Diego Dias, Diego Ferraz, Gustavo, Isabelly, Marcius, Mariana, Maury, Rainelly e Tony.

- Ao CNPq - Conselho Nacional de Pesquisa, pelo apoio financeiro.

- A todos que de alguma forma contribuíram para a construção do trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o conceito de espaços vetoriais topológicos e suas propriedades. No primeiro capítulo, apresentamos duas seções de resultados básicos e, nas demais seções, apresentamos um estudo sobre tais espaços de forma mais ampla. No segundo capítulo, restringimo-nos ao corpo dos reais e fazemos um estudo sobre os espaços localmente convexos, o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Banach-Alaoglu, construímos as topologias fraca, fraca-estrela, da convergência limitada e da convergência pontual. Por último, estudamos o Teorema da Limitação Uniforme, o Teorema do Gráfico Fechado e o da Aplicação Aberta no contexto mais geral dos espaços de Fréchet.

Palavras-chave: espaços vetoriais topológicos, espaços localmente convexos, topologias, Teorema de Hahn-Banach, Teorema de Banach-Alaoglu, Teorema de Banach-Steinhauss, Teorema da Aplicação Aberta, Teorema do Gráfico Fechado.

Abstract

In this work we investigate the concept of topological vector spaces and their properties. In the first chapter we present two sections of basic results and in the other sections we present a more general study of such spaces. In the second chapter we restrict ourselves to the real scalar field and we study, in the context of locally convex spaces, the Hahn-Banach and Banach-Alaoglu theorems. We also build the weak, weak-star, of bounded convergence and of pointwise convergence topologies. Finally we investigate the Theorem of Banach-Steinhauss, the Open Mapping Theorem and the Closed Graph Theorem.

Keywords: topological vector spaces, locally convex spaces, topologies, Hahn-Banach Theorem, Theorem of Banach-Alaoglu, Theorem of Banach-Steinhauss, Open Mapping Theorem, Closed Graph Theorem.

Sumário

Introdução

Os espaços de Banach, e mais geralmente os espaços normados, possuem duas estruturas: uma estrutura linear e a noção de limite compatível com sua estrutura linear. Nos cursos de Análise Funcional, o nosso objeto de estudo são os espaços de Banach, isso devido a presença dessas estruturas. Observando essas estruturas a presente dissertação trata, essencialmente, em estudar os espaços vetoriais que apresentam a noção de convergência compatível com sua estrutura linear. Chamaremos tais espaços de espaços vetoriais topológicos.

O objetivo deste trabalho é generalizar alguns resultados da Análise Funcional em espaços de Banach para os espaços vetoriais topológicos. Dividimos nosso trabalho em três capítulos e um apêndice.

No *Capítulo* 1, estudamos os espaços vetoriais topológicos da seguinte forma: Na seção 1.1, introduzimos o conceito de espaços uniformes e estudamos suas propriedades. Na seção 1.2, introduzimos o conceito de filtros e a noção de convergência em espaços topológicos a partir dos filtros. Na seção 1.3, iniciamos o nosso estudo sobre Espaços Vetoriais Topológicos. Na seção 1.4, o nosso objeto de estudo são os subespaços, o espaço produto, soma direta e o espaço quociente. Na seção 1.5, vamos verificar como se comportam os espaços vetoriais topológicos de dimensão finita. Na seção 1.6, extrapolaremos o conceito de limitação em espaços normados para os espaços vetoriais topológicos. Na seção 1.7, iniciamos um estudo sobre as variedades lineares e os hiperplanos.

No *Capítulo* 2, estudamos as propriedades de convexidade nos espaços vetoriais topológicos da seguinte forma: Na seção 2.1, estudamos as propriedades de convexidade. Na seção 2.2, estudamos as propriedades dos funcionais sublineares, seminormas e do funcional de Minkowski. Na seção 2.3, estudamos o Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais topológicos e suas consequências. Na seção 2.4, estudamos o conceito de polar e suas propriedades. Na seção 2.5, estudamos as topologias fraca, fraca-estrela, da convergência limitada e da convergência pontual, e vemos a relação do conceito de polar com as topologias fraca e fraca-estrela. Na seção 2.6, estudamos a topologia gerada por uma família de seminormas e o conceito de espaço de Fréchet.

O objetivo do *Capítulo* 3 é demonstrar o Teorema da Limitação Uniforme, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Na seção 3.1, estudamos os conceitos de espaços tonelados, infratonelados e bornológicos, e suas propriedades. Na seção 3.2, estudamos o espaço das transformações lineares contínuas e demonstramos o Teorema da Limitação Uniforme. Na seção 3.3 ,introduzimos o conceito de função aproximadamente aberta e demonstramos alguns resultados que auxiliaram na demonstração do Teorema da Aplicação Aberta e do Gráfico Fechado.

Finalmente, o *Apêndice A* é dedicado a alguns resultados necessários para o que pretendemos fazer nos capítulos 1 e 2. O apêndice A.1 é dedicado aos resultados da álgebra abstrata. O apêndice A.2 trata, essencialmente, de resultados da topologia geral.

Cada Capítulo ou seção foi fortemente baseado nas seguintes referências bibliográficas:

Capítulo 1: Schaefer [3] e Willard [5];

Capítulo 2: Osborne [4];

Capítulo 3: Osborne [4].

Para a Teoria de Topologia geral apresento Lima [2], Willard [5]. Para um estudo sobre Análise Funcional em espaços de Banach e uma introdução sobre espaços vetoriais topológicos apresento Botelho, Pellegrino, Texeira [1].

A literatura brasileira sobre Espaços Vetoriais Topológicos é escassa. Um objetivo importante desta dissertação é contribuir para o acervo literário brasileiro, com o preenchimento dos detalhes das demonstrações dos principais resultado.

Capítulo 1

Espaços Vetoriais Topológicos

Em espaços vetoriais sabemos somar seus elementos e multiplicar por escalares, enquanto que em espaços topológicos podemos falar sobre proximidade. Espaços vetoriais topológicos é a estrutura matemática na qual tudo isso pode ser feito em um mesmo ambiente.

1.1 Espaços Uniformes

Seja X um conjunto não vazio e defina $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$. Caso não haja perigo de dúvida, denotaremos Δ_X simplesmente por Δ.

Se $U, V \subset X \times X$, definimos

$$\begin{aligned} U \circ V &= \{(x,y) : \text{existe } z \in X \text{ com } (x,z) \in V \text{ e } (z,y) \in U\}, \\ U^{-1} &= \{(y,x) : (x,y) \in U\}. \end{aligned}$$

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma **uniformidade** em X é uma coleção $\mathcal{D}$ de subconjuntos de $X \times X$, chamados **arredores**, tais que

(U1) Se $D \in \mathcal{D}$, então $\Delta \subset D$;

(U2) Se $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, então $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$;

(U3) Se $D \in \mathcal{D}$, então existe $E \in \mathcal{D}$ de modo que $E \circ E \subset D$;

(U4) Se $D \in \mathcal{D}$, então existe $E \in \mathcal{D}$ tal que $E^{-1} \subset D$;

(U5) Se $D \in \mathcal{D}$ e $D \subset E$, então $E \in \mathcal{D}$.

Quando X possui tal estrutura, dizemos que X é um **espaço uniforme**. A uniformidade $\mathcal{D}$ é chamada **separante**, e X é dito **separado**, se

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D = \Delta.$$

Note que, em certo sentido, (U4) é equivalente a

$$D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^{-1} \in \mathcal{D}. \tag{1.1}$$

De fato, por (U4), dado $D \in \mathcal{D}$, existe $E \in \mathcal{D}$ tal que $E^{-1} \subset D$. Vejamos que $E \subset D^{-1}$. Com efeito, se $(x, y) \in E$, então $(y, x) \in E^{-1}$. Logo $(y, x) \in D$ e $(x, y) \in D^{-1}$. Portanto, por (U5), temos $D^{-1} \in \mathcal{D}$. Agora, suponha (1.1). Nesse caso, se $E = D^{-1}$, temos

$$(x, y) \in E^{-1} \Rightarrow (x, y) \in (D^{-1})^{-1} \Rightarrow (y, x) \in D^{-1} \Rightarrow (x, y) \in D,$$

o que mostra que $E^{-1} \subset D$.

Uma **base** para uma uniformidade $\mathcal{D}$ é qualquer subcoleção $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$ tal que para qualquer $D \in \mathcal{D}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset D$.

Exemplo 1.1.1. Para cada $\varepsilon > 0$, defina

$$D_\varepsilon = \{(x, y) : |x - y| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

e

$$\mathcal{A} = \{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$

Assim,

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \text{existe } A \in \mathcal{A},\ \text{com } A \subset F\}$$

é uma uniformidade em $\mathbb{R}$. Vejamos que as propriedades (U1)-(U5) são todas válidas.

(U1) Como $x - x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $\Delta \subset D_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

(U2) Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, tais que $D_{\varepsilon_1} \subset F_1$ e $D_{\varepsilon_2} \subset F_2$. Tome $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Assim,

$$D_{\varepsilon_0} \subset D_{\varepsilon_1} \cap D_{\varepsilon_2} \subset F_1 \cap F_2$$

e portanto $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

(U3) Sejam $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e $D_\varepsilon \subset F$, e considere $E = D_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Mostraremos que $E \circ E \subset D_\varepsilon$. De fato, se $(x, y) \in E \circ E$, então existe $z \in \mathbb{R}$ de modo que $(x, z) \in E$ e $(z, y) \in E$. Como

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

concluímos que $(x, y) \in D_\varepsilon$.

(U4) Seja $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e seja $D_\varepsilon \subset F$. Como $D_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1}$, obtemos $D_\varepsilon^{-1} \subset F$.

(U5) É imediata.

Exemplo 1.1.2. Seja (M,d) um espaço métrico. Para cada $\varepsilon > 0$, defina

$$D_\varepsilon = \{(x,y) : d(x,y) < \varepsilon\} \subset M \times M.$$

Considere

$$\mathcal{A} = \{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$

Assim,

$$\mathcal{D}_\mathcal{A} = \{F : \text{existe } A \in \mathcal{A}, \text{ com } A \subset F\}$$

é uma uniformidade em M. Como $d(x,x) = 0$ para todo $x \in M$, temos $\Delta \subset D_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $D_{\varepsilon_1} \subset F_1$ e $D_{\varepsilon_2} \subset F_2$. Tome $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Assim,

$$D_{\varepsilon_0} \subset D_{\varepsilon_1} \cap D_{\varepsilon_2} \subset F_1 \cap F_2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, considere $E = D_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Mostraremos que $E \circ E \subset D_\varepsilon$. De fato, se $(x,y) \in E \circ E$, existe $z \in M$ de modo que $(x,z) \in E$ e $(z,y) \in E$. Como

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

concluímos que $(x,y) \in D_\varepsilon$. Se $(x,y) \in D_\varepsilon^{-1}$, então $(y,x) \in D_\varepsilon$. Uma vez que $d(x,y) = d(y,x)$, segue que $(x,y) \in D_\varepsilon$. Logo, $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ é uma uniformidade em M.

Definição 1.1.2. Uma **topologia** num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados **abertos** (segundo a topologia) satisfazendo as condições:

(T1) X e $\emptyset$ são abertos;

(T2) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;

(T2) a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Se X é um espaço uniforme, com uniformidade $\mathcal{D}$, defina

$$\Omega = \{G \subset X : \text{ dado } x \in G, \text{ existe } D \in \mathcal{D} \text{ tal que } D(x) \subset G\},$$

onde $D(x) = \{y : (x,y) \in D\}$. Afirmamos que Ω é uma topologia em X. Com efeito, $\emptyset \in \Omega$, por vacuidade. Ademais, $X \in \Omega$, pois como $D \subset X \times X$ para todo $D \in \mathcal{D}$, segue que $D(x) \subset X$ para todo $D \in \mathcal{D}$.

Se $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \Omega$, então dado $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$, existem $D_1, D_2, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$ tais que

$D_i(x) \subset G_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Uma vez que $\mathcal{D}$ é uma uniformidade, temos

$$D = \bigcap_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{D}.$$

Assim, dado $y \in D(x)$, segue que $y \in D_i(x)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Logo $y \in G_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Agora, seja $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família em Ω. Dado $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x \in G_\lambda$ e, como $G_\lambda \in \Omega$, existe $D_\lambda \in \mathcal{D}$ com $D_\lambda(x) \subset G_\lambda$. Daí,

$$D_\lambda(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda.$$

Chamaremos Ω de **topologia gerada pela uniformidade** e denotamos esta topologia por $\tau_{\mathcal{D}}$.

Definição 1.1.3. Sejam X, Y espaços uniformes. Uma função $f : X \to Y$ é **uniformemente contínua**, se para cada V arredor em Y, existe U arredor em X tal que

$$(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V.$$

Proposição 1.1.1. Se X, Y são espaços uniformes e $f : X \to Y$ é uma função uniformemente contínua, então f é contínua.

Demonstração. Dado um aberto W de Y, queremos mostrar que $f^{-1}(W)$ é aberto de X. Se $x \in f^{-1}(W)$, então $y = f(x) \in W$, e portanto existe V arredor em Y tal que $V(y) \subset W$. Como f é uniformemente contínua, existe U arredor em X, com

$$(v, w) \in U \Rightarrow (f(v), f(w)) \in W.$$

Note que $\Delta_X \subset U$, donde segue que

$$(x, x) \in U \Rightarrow x \in U(x).$$

Assim, dado $w \in U(x)$, temos

$$(x, w) \in U \Rightarrow (f(x), f(w)) = (y, f(w)) \in V \Rightarrow f(w) \in V(y) \Rightarrow f(w) \in W$$

e portanto $f(U(x)) \subset W \Rightarrow U(x) \subset f^{-1}(W)$. $\square$

Proposição 1.1.2. Sejam X, Y, Z espaços uniformes. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são uniformemente contínuas, então $g \circ f : X \to Z$ é uniformemente contínua.

Demonstração. Dado W arredor em Z, existe V arredor em Y tal que

$$(z, w) \in V \Rightarrow (g(z), g(w)) \in W,$$

pois g é uniformemente contínua. Uma vez que f é uniformemente contínua, para este V, existe U arredor em X tal que

$$(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V.$$

Assim,

$$(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V \Rightarrow (g(f(x)), g(f(y))) \in W.$$

□

Definição 1.1.4. Sejam X, Y espaços uniformes. Dizemos que X, Y são **isomorfos** se existe uma função $f : X \to Y$ satisfazendo

(I1) f é bijeção;

(I2) f, f^{-1} são uniformemente contínuas.

Nesse caso dizemos que f é um **isomorfismo uniforme**.

Definição 1.1.5. Sejam $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ uniformidades em X. Se $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$, dizemos que $\mathcal{D}_1$ **é mais grosseira do que** $\mathcal{D}_2$.

Consideremos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ uniformidades em X. Chamaremos $X_1 = (X, \mathcal{D}_1)$, $X_2 = (X, \mathcal{D}_2)$ e defina $i : X_2 \to X_1$, por $i(x) = x$. Se $\mathcal{D}_1$ é mais grosseira do que $\mathcal{D}_2$, então dado um arredor V em X_1, segue que V é arredor em X_2, pois $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$. Assim,

$$(x, y) \in V \Rightarrow (i(x), i(y)) = (x, y) \in V,$$

e concluímos que i é uniformemente contínua.

Reciprocamente, suponhamos que $i : X_2 \to X_1$ é uniformemente contínua. Então dado um arredor V em X_1, existe U arredor em X_2 tal que

$$(x, y) \in U \Rightarrow (i(x), i(y)) \in V \Rightarrow (x, y) \in V.$$

Daí, $U \subset V$, e consequentemente $V \in \mathcal{D}_2$. Portanto, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$.

Definição 1.1.6. Um conjunto $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X \times X$ é um **sistema fundamental de arredores** de uma uniformidade em X, se

(S1) Dados $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, existe $A_3 \in \mathcal{A}$ tal que $A_3 \subset A_1 \cap A_2$;

(S2) Se $A \in \mathcal{A}$, então $\Delta \subset A$;

(S3) Se $A \in \mathcal{A}$, então existe $B \in \mathcal{A}$ com $B \subset A^{-1}$;

(S4) Se $A \in \mathcal{A}$, então existe $B \in \mathcal{A}$ com $B \circ B \subset A$.

Afirmamos que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \{F \subset X \times X : \text{ existe } A \in \mathcal{A} \text{ com } A \subset F\}$$

é uma uniformidade em X. Vejamos que as propriedades (U1)-(U5) são todas válidas.

(U1) Dado $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset F$. Como $\Delta \subset A$, segue que $\Delta \subset F$.

(U2) Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, existem $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ de modo que $A_1 \subset F_1$ e $A_2 \subset F_2$. Como $\mathcal{A}$ é sistema fundamental, existe $A_3 \in \mathcal{A}$ com $A_3 \subset A_1 \cap A_2$. Portanto, $A_3 \subset F_1 \cap F_2$.

(U3) Dado $D \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, existe $A \in \mathcal{A}$ com $A \subset D$, e como $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \circ B \subset A$. Logo, $B \circ B \subset D$.

(U4) Se $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, então existe $A \in \mathcal{A}$ com $A \subset F$ e, como $A \in \mathcal{A}$, existe $B \in \mathcal{A}$ com $B \subset A^{-1}$. Daí, $B \subset F^{-1}$, donde $F^{-1} \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ sempre que $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$.

(U5) Dados $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ e $F \subset E$, como $F \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, existe $A \in \mathcal{A}$ com $A \subset F$. Logo $A \subset E$ e portanto $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ é uma uniformidade em X.

Exemplo 1.1.3. No Exemplo 1.1 vimos que

$$\mathcal{A} = \{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$$

satisfaz as propriedades (S1),(S2) e (S4). Agora, note que dado $\varepsilon > 0$ tal que $(x, y) \in D_{\frac{\varepsilon}{2}}$, segue que

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |y - x| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (y, x) \in D_\varepsilon \Rightarrow (x, y) \in D_\varepsilon^{-1}.$$

Portanto, $D_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset D_\varepsilon^{-1}$. Consequentemente $\mathcal{A}$ é um sistema fundamental de arredores.

Proposição 1.1.3. Sejam X um conjunto e $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ uma família de espaços uniformes. Suponha que para cada $\alpha \in \Lambda$ exista uma função $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Então existe uma uniformidade em X tal que f_α é uniformemente contínua, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Demonstração. Para cada $\alpha \in \Lambda$, defina $g_\alpha : X \times X \to Y_\alpha \times Y_\alpha$ dada por $g_\alpha(x, y) = (f_\alpha(x), f_\alpha(y))$. Defina Σ como o conjunto dos subconjuntos de $X \times X$ da forma $g_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, onde $\alpha \in \Lambda$ e V_α é um arredor em Y_α. Considere $\mathcal{A}$ o conjunto de todas a interseções finitas

$$U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}) = g_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap g_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n})$$

dos subconjuntos de Σ. Afirmamos que $\mathcal{A}$ é um sistema fundamental em X. Vejamos que (S1) é verdadeira. Dados $U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}), U(V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_m})$, temos

$$\begin{aligned} U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}, V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_m}) &= g_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap g_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n}) \cap g_{\beta_1}^{-1}(V_{\beta_1}) \cap \ldots \cap g_{\beta_m}^{-1}(V_{\beta_m}) \\ &\subset U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}) \cap U(V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_m}). \end{aligned}$$

Agora, vejamos que (S2) é verdadeira. Dado $(x, x) \in \Delta_X$, temos

$$g_\alpha(x, x) = (f_\alpha(x), f_\alpha(x)) \in \Delta_{Y_\alpha}, \forall \alpha \in \Lambda.$$

Portanto,

$$g_\alpha(\Delta_X) \subset V_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda \text{ e } V_\alpha \text{ arredor em } Y_\alpha.$$

Logo $\Delta_X \subset g_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, para todo $\alpha \in \Lambda$ e todo V_α arredor em Y_α. Dado V_α arredor em Y_α, defina $W_\alpha = g_\alpha^{-1}(V_\alpha)$. Assim, Se $(x, y) \in W_\alpha^{-1}$, então

$$\begin{aligned} (y, x) \in W_\alpha \Rightarrow g_\alpha(y, x) \in V_\alpha \Rightarrow (f_\alpha(y), f_\alpha(x)) \in V_\alpha \\ \Rightarrow (f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \in V_\alpha^{-1} \Rightarrow (x, y) \in g_\alpha^{-1}(V_\alpha^{-1}). \end{aligned}$$

Dado $(x, y) \in g_\alpha^{-1}(V_\alpha^{-1})$, segue que

$$(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \in V_\alpha^{-1} \Rightarrow (f_\alpha(y), f_\alpha(x)) \in V_\alpha \Rightarrow (y, x) \in W_\alpha \Rightarrow (x, y) \in W_\alpha^{-1}.$$

Portanto, $W_\alpha^{-1} = g_\alpha^{-1}(V_\alpha^{-1})$. Dado $(x, y) \in W_\alpha \circ W_\alpha$, existe $z \in X$ com $(x, z), (z, y) \in W_\alpha$. Daí

$$\begin{aligned} g_\alpha(x, z), g_\alpha(z, y) \in V_\alpha \Rightarrow (f_\alpha(x), f_\alpha(z)) \in V_\alpha, (f_\alpha(z), f_\alpha(y)) \in V_\alpha \\ \Rightarrow (f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \in V_\alpha \circ V_\alpha \Rightarrow (x, y) \in g_\alpha^{-1}(V_\alpha \circ V_\alpha). \end{aligned}$$

Portanto,

$$W_\alpha \circ W_\alpha \subset g_\alpha^{-1}(V_\alpha \circ V_\alpha).$$

Vejamos que (S3) é válida. Seja

$$U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}) = g_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap g_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n}).$$

Então, dado $(x, y) \in U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n})^{-1} = (g_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap g_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n}))^{-1}$, denotando novamente $W_\alpha = g_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, temos

$$\begin{aligned}(x,y) \in (W_{\alpha_1} \cap \ldots \cap W_{\alpha_n})^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in W_{\alpha_i},\ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in W_{\alpha_i}^{-1}, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in g_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}^{-1}), \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}.\end{aligned}$$

Logo,

$$U(V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_n})^{-1} = g_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}^{-1}) \cap \ldots \cap g_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n}^{-1}).$$

Finalmente, mostraremos a propriedade (S4). Dado $U(V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_n})$, como $V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_n}$ são arredores em $Y_{\alpha_1},\ldots,Y_{\alpha_n}$, respectivamente, existem $E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n}$ arredores em $Y_{\alpha_1},\ldots,Y_{\alpha_n}$, respectivamente, com $E_{\alpha_i} \circ E_{\alpha_i} \subset V_{\alpha_i}$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Daí, concluímos que $U(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n}) \subset g^{-1}(E_{\alpha_i})$ para todo $i \in \{1,2\ldots,n\}$. Assim, dado $(x,y) \in U(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n}) \circ U(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n})$, existe $z \in X$ com

$$(x,z),(z,y) \in U(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n}).$$

Dessa forma

$$(x,z),(z,y) \in g_{\alpha_i}^{-1}(E_{\alpha_i}), \forall i \in \{1,2\ldots,n\}$$

e portanto

$$(x,y) \in g_{\alpha_i}^{-1}(E_{\alpha_i}) \circ g_{\alpha_i}^{-1}(E_{\alpha_i}) \subset g_{\alpha_i}^{-1}(E_{\alpha_i} \circ E_{\alpha_i}).$$

Assim,

$$\begin{aligned}U(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n}) \circ U(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n}) &\subset g_{\alpha_1}^{-1}(E_{\alpha_1} \circ E_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap g_{\alpha_n}^{-1}(E_{\alpha_n} \circ E_{\alpha_n})\\ &\subset U(V_{\alpha_1},\ldots,V_{\alpha_n}),\end{aligned}$$

uma vez que $g_{\alpha_i}^{-1}(E_{\alpha_i} \circ E_{\alpha_i}) \subset g_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$. Portanto, $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ é uma uniformidade em X. Mostraremos que f_α é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\alpha \in \Lambda$, se V_α é um arredor em Y_α, então $U(V_\alpha) \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$, donde

$$(x,y) \in U(V_\alpha) \Rightarrow (f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \in V_\alpha.$$

□

A uniformidade $\mathcal{D}_\mathcal{A}$ da demonstração anterior será denotada por $\mathcal{U}$.

Lema 1.1.4. Sejam X um conjunto com uniformidade $\mathcal{U}$, Z com uniformidade $\mathcal{D}$ e $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ uma família de espaços uniformes. Suponha que para cada $\alpha \in \Lambda$ exista uma função $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Então uma função $h : Z \to X$ é uniformemente contínua se, e somente se, $f_\alpha \circ h$ são uniformemente contínuas, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que h é uniformemente contínua. Então para cada $\alpha \in \Lambda$, pela proposição anterior segue que f_α é uniformemente contínua. Daí, $f_\alpha \circ h$ é uniformemente contínua, pois é a composição de funções uniformemente contínuas.

Reciprocamente, suponhamos que cada $f_\alpha \circ h$ seja uniformemente contínua. Então considere $U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n})$, e assim para cada $1 \leq i \leq n$, V_{α_i} é um arredor em Y_{α_i}. Como $f_{\alpha_i} \circ h$ é uniformemente contínua, existe W_i arredor em Z tal que

$$(x, y) \in W_i \Rightarrow (f_{\alpha_i} \circ h(x), f_{\alpha_i} \circ h(y)) \in V_{\alpha_i}.$$

Logo $W = W_1 \cap \ldots \cap W_n$ é um arredor em Z, de modo que

$$(x, y) \in W \Rightarrow (h(x), h(y)) \in g_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap g_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n}) = U(V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}).$$

□

Corolário 1.1.5. Seja X um espaço com a uniformidade da proposição anterior. Então esta uniformidade é a mais grosseira que torna todas as funções $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ uniformemente contínuas.

Demonstração. Suponhamos que exista $\mathcal{D}$ uniformidade em X tal que toda f_α seja uniformemente contínua. Queremos mostrar que $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$. Considere $i : (X, \mathcal{D}) \to (X, \mathcal{U})$ a função identidade. Então para todo α, temos $f_\alpha(i(x)) = f_\alpha(x)$, para todo $x \in X$. Como f_α é uniformemente contínua, segue que $f_\alpha \circ i$ é uniformemente contínua. Pelo lema anterior i é uniformemente contínua. □

De acordo com a proposição anterior, podemos definir o que é uma uniformidade em A, com $A \subset X$.

Se X é um espaço uniforme, $A \subset X$, a **uniformidade induzida** em A por X é a uniformidade mais grosseira em A que torna o mergulho canônico $i : A \to X$ uniformemente contínuo.

1.2 Filtros

Definição 1.2.1. Seja X um conjunto não vazio. Um conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X é chamado de **filtro**, quando as condições abaixo são satisfeitas:

(f1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(f2) Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset G \subset X$, então $G \in \mathcal{F}$;

(f3) Se $F, G \in \mathcal{F}$, então $F \cap G \in \mathcal{F}$.

Exemplo 1.2.1. Seja X um conjunto não vazio. Dado $A \subset X$, com $A \neq \emptyset$, considere

$$\mathcal{F} = \{F : A \subset F\}.$$

Mostraremos que $\mathcal{F}$ é um filtro em X.

(f1) Como $A \subset X$, segue que $X \in \mathcal{F}$. Além disso, $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois se $\emptyset \in \mathcal{F}$, teríamos $A \subset \emptyset$, o que é absurdo;

(f2) Dados $F \in \mathcal{F}$ e G tais que $F \subset G$, como $A \subset F$, segue que $A \subset G$ e daí $G \in \mathcal{F}$;

(f3) Sejam $F, G \in \mathcal{F}$. Então $A \subset F$ e $A \subset G$. Logo, $A \subset F \cap G$.

Exemplo 1.2.2. Seja X um espaço topológico. Dado $x \in X$, considere

$$\mathcal{U}_x = \{V \subset X : V \text{ é vizinhança de } x\}.$$

(f1) Note que $X \in \mathcal{F}$, pois X é vizinhança de x. Ademais, $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pois $x \notin \emptyset$;

(f2) Dados $V \in \mathcal{F}$ e $G \subset X$ tais que $V \subset G$. Como V é vizinhança de x, existe A aberto em X tal que $x \in A \subset V$. Portanto, $x \in A \subset G$. Daí, G é vizinhança de x;

(f3) Dados $U, V \in \mathcal{F}$, segue que U, V são vizinhanças de x, ou seja, existem A, B abertos em X satisfazendo $x \in A \subset U$ e $x \in B \subset V$. Assim, $x \in A \cap B \subset U \cap V$ e $A \cap B$ é aberto. Daí, vemos que $U \cap V \in \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é o **filtro de vizinhanças** de x, e denotamos por $\mathcal{U}_x$.

Definição 1.2.2. Seja X um conjunto não vazio. Um conjunto $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é chamado **base de filtro**, se

(b1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$;

(b2) Se $A, B \in \mathcal{B}$, então existe $C \in \mathcal{B}$ de modo que $C \subset A \cap B$.

Assim, o filtro gerado por $\mathcal{B}$ é $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{F \subset X : B \subset F \text{ para algum } B \in \mathcal{B}\}$.

Se $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ são filtros em X, dizemos que $\mathcal{F}_1$ é **mais fino** que $\mathcal{F}_2$ se $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Um filtro $\mathcal{F}$ é dito **fixado** se $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ e **livre** se $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$.

Definição 1.2.3. Um filtro $\mathcal{F}$ em um espaço topológico X converge para algum $x \in X$ quando $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$, isto é, $\mathcal{F}$ é mais fino do que $\mathcal{U}_x$. Escrevemos, $\mathcal{F} \to x$. Dizemos que $x \in X$ é **ponto de acumulação** de $\mathcal{F}$ se, para cada $F \in \mathcal{F}$, tem-se $x \in \overline{F}$.

Definição 1.2.4. Uma base de filtro $\mathcal{B}$ em um espaço topológico X converge para algum $x \in X$ se dado $U \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $B \subset U$.

Definição 1.2.5. Uma **estrutura de ordem** sobre um conjunto X é uma relação binária R, usualmente denotada por $\leq$, satisfazendo:

(O1) $x \leq x$, para todo $x \in X$;

(O2) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;

(O3) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

O par $(X, \leq)$ é chamado de **conjunto ordenado**.

Se $(X, \leq)$ é um conjunto ordenado, um subconjunto A de X é **majorado** se existe $a_0 \in X$ tal que $a \leq a_0$, para todo $a \in A$. Dizemos que a_0 é **cota superior** de A.

Definição 1.2.6. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado não vazio. Dizemos que X é **dirigido** se todo subconjunto $\{x, y\}$ de X possui cota superior. Se $x_0 \in X$, o conjunto

$$\{x \in X : x_0 \leq x\}$$

é dito uma **seção** de X. Uma família $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ é chamada **família dirigida** se A é um conjunto dirigido. As seções de uma família dirigida são subfamílias da forma

$$\{y_\alpha : \alpha_0 \leq \alpha\}$$

para todo $\alpha_0 \in A$.

Sejam X um conjunto e $\{X_\lambda : \lambda \in A\}$ uma família não vazia. Se $\{X_\lambda : \lambda \in A\}$ é uma família dirigida, então dado $\lambda_0 \in A$, defina

$$B_{\lambda_0} = \{X_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}.$$

Agora, considere $\mathcal{B} = \{B_{\lambda_0} : \lambda \in A\}$. Mostraremos que $\mathcal{B}$ é base de um filtro em X. Com efeito, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$, pois dado $\lambda \in A$ tem-se $X_\lambda \in B_\lambda$, isto é, $B_\lambda \neq \emptyset, \forall \lambda \in A$. Agora, dados $B_{\lambda_1}, B_{\lambda_2} \in \mathcal{B}$, temos $\lambda_1, \lambda_2 \in A$. Como A é dirigido, existe $\lambda_0 \in A$ cota superior de $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, isto é, $\lambda_0 \geq \lambda_1$ e $\lambda_0 \geq \lambda_2$. Seja $X_\lambda \in B_{\lambda_0}$. Então, $\lambda \geq \lambda_0$. Logo, $\lambda \geq \lambda_1$ e $\lambda \geq \lambda_2$. Assim, $X_\lambda \in B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2}$. Portanto, $\mathcal{B}$ é base de um filtro em X. Dizemos que $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ é o **filtro de seção**. Chamamos de **filtro elementar** o filtro de seção da sequência $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em X.

Seja X um espaço uniforme. Dizemos que um filtro $\mathcal{F}$ em X é um **filtro de Cauchy** se dado V arredor em X, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset V$. Se todo filtro de Cauchy converge em X, então X é dito **completo**.

Uma **sequência de Cauchy** em X é uma sequência cujo filtro de seção é um filtro de Cauchy. Se toda sequência de Cauchy converge em X, então X é dito **semi-completo**.

1.3 Definições, Exemplos e Propriedades

Definição 1.3.1. Seja K um corpo. Dizemos que $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ é um valor absoluto se

(v1) $|\lambda| \geq 0$, para todo $\lambda \in K$

(v2) $|\lambda| = 0$ se, e somente se, $\lambda = 0$;

(v3) $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$;

(v4) $|\lambda \cdot \mu| = |\lambda||\mu|$.

Diz-se, então, que K munido de um valor absoluto é um **corpo valorado**. A função $(\lambda, \mu) \to |\lambda - \mu|$ é uma métrica em K. O corpo valorado K é chamado **não discreto** se sua topologia é não discreta.

Definição 1.3.2. Sejam G um grupo e τ uma topologia em G. Dizemos que G é um **grupo topológico**, se

(g1) $G \times G \to G : (x, y) \to xy$;

(g2) $G \to G : x \to x^{-1}$

são contínuas.

Definição 1.3.3. Sejam L um espaço vetorial sobre um corpo valorado não discreto K, (não necessariamente comutativo), e τ uma topologia em L. O par (L, τ) é chamado **espaço vetorial topológico** sobre K, ou simplesmente evt, se as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & L \times L & \longrightarrow & L \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \odot : & K \times L & \longrightarrow & L \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

são contínuas. Um evt (L, τ) pode ser denotado por $L(\tau)$, ou simplesmente L se não houver possibilidade de dúvida.

A topologia de K é induzida pelo valor absoluto e $L \times L$ e $K \times L$ estarão munidos com a topologia produto. Note que a aplicação $\ominus : L \times L \to L$ dada por $\ominus(x, y) = x - y$ é contínua, pois

$$\begin{aligned} \ominus(x, y) &= x - y \\ &= x + (-1)y \\ &= \oplus(x, \odot(-1, y)). \end{aligned}$$

Além disso, L é um grupo topológico comutativo. Uma vez que L é espaço vetorial segue que $(L, \oplus)$ é grupo comutativo. Vejamos que

$$\begin{array}{rccc} f: & L \times L & \longrightarrow & L \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} g: & L & \longrightarrow & L \\ & x & \longmapsto & -x \end{array}$$

são contínuas. Como $f \equiv \oplus$, então f é contínua. Note que g é contínua, pois

$$\begin{aligned} g(x) &= -x \\ &= \ominus(0, x) \end{aligned}$$

é contínua.

Exemplo 1.3.1. (a) Espaços normados são espaços vetoriais topológicos.

(b) Considere L um espaço vetorial e $\tau_c = \{\emptyset, L\}$. Então

$$\oplus^{-1}(\emptyset) = \emptyset \times \emptyset,$$
$$\odot^{-1}(\emptyset) = \emptyset \times \emptyset$$

e

$$\oplus^{-1}(L) = L \times L,$$
$$\odot^{-1}(L) = K \times L.$$

Portanto, (L, τ_c) é um espaço vetorial topológico. Vejamos que este espaço não é normado no caso em que $L \neq \{0\}$. Suponha que existe uma norma $\|\cdot\|$ em L que induza a topologia τ_c. Neste caso, por ser um conjunto aberto, a bola aberta $B(0;1) = \{x \in L : \|x\| < 1\}$ coincide com $\emptyset$ ou com L. Como a origem pertence à bola, segue que $B(0;1) = L$. Isso claramente não pode ocorrer pois espaços normados não-triviais não são limitados (tome $0 \neq x \in L$ e observe que o conjunto $\{ax : a \in K\}$ é ilimitado).

Definição 1.3.4. Sejam (L_1, τ_1) e (L_2, τ_2) espaços vetoriais topológicos sobre o mesmo corpo K, onde K é um corpo valorado não discreto. Dizemos que L_1 e L_2 são **isomorfos** ou **topologicamente isomorfos** se existe $T : L_1 \longrightarrow L_2$, satisfazendo:

(I1) T é bijeção linear;

(I2) T é homeomorfismo.

Neste caso T é chamado **isomorfismo** de L_1 para L_2, ou **isomorfismo topológico** e escrevemos $L_1 \simeq L_2$.

Definição 1.3.5. Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $\mathcal{B} \subset \tau$ é dito uma **base** (global) quando para todo $U \in \tau$ e todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Definição 1.3.6. Seja (X, τ) um espaço topológico. Se $x \in X$, então uma **base de vizinhanças** $\mathcal{B}_x$ para x, é uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo as condições abaixo:

(a) Toda $B \in \mathcal{B}_x$ é uma vizinhança de x; isto é, $x \in int(B)$;

(b) Se U é vizinhança de x, então existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset U$;

(c) Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ com $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definição 1.3.7. Um subconjunto A do espaço vetorial L é dito:

(a) **absorvente** se para todo $x \in L$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A$ para todo $\lambda \in K$ com $|\lambda| \geq \lambda_0$.

(b) **equilibrado** se $\lambda x \in A$ para todo $x \in A$ e todo $\lambda \in K$ com $|\lambda| \leq 1$; isto é, $\lambda A \subset A$ sempre que $|\lambda| \leq 1$.

Proposição 1.3.1. Seja L um espaço vetorial topológico sobre K, onde K é um corpo valorado não discreto. Então:

(a) Para cada $x_0 \in L$ e cada $\lambda_0 \in K$ com $\lambda_0 \neq 0$, a função $f : L \to L$ dada por $f(x) = \lambda_0 x + x_0$ é um homeomorfismo.

(b) Sejam A um subconjunto de L e $\mathcal{B}$ uma base do filtro de vizinhanças do $0 \in L$. O fecho de A é dado por $\overline{A} = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{B}} (A + U)$.

(c) Sejam A e B subconjuntos de L tal que A é aberto em L. Então $A + B$ é aberto em L.

(d) Sejam A e B subconjuntos fechados de L de modo que todo filtro de A possui um ponto aderente dele. Então $A + B$ é fechado em L.

(e) Seja A um subconjunto equilibrado de L. Então $\overline{A}$ é equilibrado, e $int(A)$ é equilibrado quando $0 \in int(A)$.

Demonstração. (a)

Mostraremos que f é bijetora. Com efeito, defina $g : L \to L$ por $g(x) = \lambda_0^{-1}(x - x_0)$. Então

$$f(g(x)) = \lambda_0 \cdot [\lambda_0^{-1}(x - x_0)] + x_0 = (x - x_0) + x_0 = x$$

e

$$g(f(x)) = \lambda_0^{-1}[(\lambda_0 x + x_0) - x_0] = \lambda_0^{-1} \cdot \lambda_0 x = x.$$

Vejamos que f e g são contínuas. Uma vez que $\oplus$, $\odot$ e $\ominus$ são contínuas, segue que

$$f(x) = \lambda_0 x + x_0 = \oplus(\odot(\lambda_0, x), x_0)$$

e

$$g(x) = \lambda_0^{-1}(x - x_0) = \odot(\lambda_0^{-1}, \ominus(x, x_0)).$$

Portanto, $f(x) = \oplus(\odot(\lambda_0, x), x_0)$ e $g(x) = \odot(\lambda_0^{-1}, \ominus(x, x_0))$ são contínuas.

(b)

Considere $B = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} A + U$. Mostraremos inicialmente que $\overline{A} \subset B$. Por (a) sabemos que dado $x \in L$, toda vizinhança de x em L é homeomorfa a uma vizinhança da origem em L, pois $T(y) = y - x$ é homeomorfismo. Dados $x \in \overline{A}$ e $U \in \mathcal{U}$ segue que $x - U$ é vizinhança de x em L. Então, $(x - U) \cap A \neq \emptyset$, isto é, existe $y \in (x - U) \cap A$. Logo, $y = x - u$, para algum $u \in U$, ou seja, $x = y + u \in A + U$. Portanto, $\overline{A} \subset B$. Falta mostrar que $B \subset \overline{A}$. Se $b \in B$ e V é vizinhança de b em L, então $b - V$ é vizinhança da origem, e consequentemente existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset b - V$. Como $b \in B$, segue que $b \in A + U$. Assim, $b = a + u$, para algum $a \in A$ e $u \in U$. Logo,

$$b - u = a \Rightarrow (b - U) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset.$$

Portanto, $B \subset \overline{A}$.

(c)

Como A é aberto e $T(y) = y + x$ é um homeomorfismo, segue que $A + x$ é aberto e

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + b$$

é aberto em L.

(d)

Devemos mostrar que para cada $x_0 \notin A + B$, existe U vizinhança da origem em L de modo que $(x_0 - U) \cap (A + B) = \emptyset$. Note que

$$x_0 - u = a + b \Leftrightarrow x_0 - a = b + u$$

onde $u \in U$, $a \in A$, $b \in B$. Assim,

$$(x_0 - U) \cap (A + B) = \emptyset \Leftrightarrow (B + U) \cap (x_0 - A) = \emptyset.$$

Suponhamos, por absurdo, que exista $y_0 \notin A + B$ tal que $(B + U) \cap (y_0 - A) \neq \emptyset$ para toda vizinhança U da origem. Escolha uma base de vizinhanças da origem, digamos $\mathcal{U}$. Considere

$$\mathcal{C} = \{(B + U) \cap (y_0 - A) : U \in \mathcal{U}\}.$$

Então, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{C}$. Sejam $(B+U)\cap(y_0-A), (B+V)\cap(y_0-A) \in \mathcal{C}$. Assim,

$$[(B+U)\cap(y_0-A)]\cap[(B+V)\cap(y_0-A)] = [(B+U)\cap(B+V)]\cap(y_0-A).$$

Como $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ com $W \subset U \cap V$. Logo,

$$(B+W)\cap(y_0-A) \subset [(B+U)\cap(B+V)]\cap(y_0-A).$$

Assim, $\mathcal{C}$ é base de um filtro em $y_0 - A$. Daí, $\mathcal{C}' = \{[y_0-(B+U)]\cap A : U \in \mathcal{U}\}$ é base de um filtro em A. Como todo filtro em A possui um ponto de acumulação, segue que o filtro gerado por $\mathcal{C}'$ tem z_0 como ponto de acumulação. Assim, $z_0 \in \overline{[y_0-(B+U)]\cap A}$, qualquer que seja $U \in \mathcal{U}$. Note que

$$\overline{[y_0-(B+U)]\cap A} \subset \overline{[y_0-(B+U)]}\cap\overline{A} = [y_0-\overline{(B+U)}]\cap\overline{A}.$$

Donde, $z_0 \in A$ e $z_0 = y_0 - w$, com $w \in \overline{B+U}$. Chame $z_1 = y_0 - z_0$, então $z_1 \in y_0 - A$ e $z_1 \in \overline{B+U}$. Por (b) segue que $z_1 \in B+U+V$, para todos $U, V \in \mathcal{U}$. Como $\oplus$ é contínua, dado $W \in \mathcal{U}$ existem $U, V \in \mathcal{U}$ tal que

$$\oplus(U\times V) \subset W \Rightarrow U+V \subset W.$$

Portanto, $z_1 \in B+W$, para todo $W \in \mathcal{U}$. Por (b) segue que $z_1 \in \overline{B}$. Como B é fechado em L, temos $z_1 \in B$. De $z_1 \in y_0 - A$, tem-se que $z_1 = y_0 - a$, para algum $a \in A$. Logo, $y_0 = a + z_1 \in A + B$. Absurdo, pois $y_0 \notin A+B$.

(e)

Seja $\lambda \in K$ com $|\lambda| \leq 1$. Então $\lambda A \subset A$. Assim, $\overline{\lambda A} \subset \overline{A}$. Como $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$, segue que $\lambda\overline{A} \subset \overline{A}$, quando $|\lambda| \leq 1$. Se $\lambda \neq 0$, então $\lambda \cdot int(A)$ é o interior de λA e, como $\lambda A \subset A$ para todo $0 < |\lambda| \leq 1$, segue que $\lambda int(A) = int(\lambda A) \subset int(A)$, quando $0 < |\lambda| \leq 1$. Por hipótese $0 \in int(A)$, então $0 \cdot a = 0$ para todo $a \in L$. Portanto $\lambda int(A) \subset int(A)$, sempre que $|\lambda| \leq 1$. □

O exemplo abaixo exibe um conjunto equilibrado com interior não equilibrado.

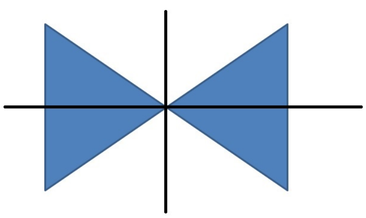


Figura 1.1: Gravata Borboleta

Definição 1.3.8. Seja τ uma topologia em um espaço vetorial L. Dizemos que τ é **invariante por translações** se toda translação é um homeomorfismo.

Teorema 1.3.2. *Suponha que τ é uma topologia em um espaço vetorial L sobre K, onde K é um corpo valorado não discreto. Então (L, τ) é um espaço vetorial topológico se, e somente se, τ é invariante por translações e possui uma base de vizinhanças da origem $\mathcal{B}$, satisfazendo as condições abaixo:*

(a) Para todo $V \in \mathcal{B}$, existe $U \in \mathcal{B}$ de modo que $U + U \subset V$;

(b) Todo $V \in \mathcal{B}$ é absorvente e equilibrado;

(c) Existe $\lambda \in K$, com $0 < |\lambda| < 1$, tal que $V \in \mathcal{B} \Rightarrow \lambda V \in \mathcal{B}$.

Se K é um corpo valorado arquimediano, a condição (c) é dispensável.

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que (L, τ) é um espaço vetorial topológico. Então, $\odot$ é contínua. Assim, dada uma vizinhança W da origem em L, existem U vizinhança da origem e $\varepsilon > 0$ tais que $\lambda U = \odot(\lambda, U) \subset W$, quando $|\lambda| \leq \varepsilon$. Chame

$$V = \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda U.$$

Logo, V é vizinhança da origem. Além disso,

$$V = \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda U \subset \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} W = W.$$

Vejamos que V é equilibrado. Com efeito, sejam $\lambda \in K$, com $|\lambda| \leq 1$ e $v \in V$. Então, existe $\mu \in K$ com $|\mu| \leq \varepsilon$ e $v \in \mu U$, ou seja, existe $w \in U$ tal que $v = \mu w$. Note que $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu| \leq 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon$. Daí,

$$\lambda v = (\lambda\mu)w \in \lambda\mu U.$$

Como $|\lambda\mu| \leq \varepsilon$, segue que $\lambda\mu U \subset V$, e portanto $\lambda V \subset V$. Considere $\mathcal{B}$ a família de todas as vizinhanças equilibradas da origem em L. Então, $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pois $V \in \mathcal{B}$. Sejam $U, W \in \mathcal{B}$ e $x_0 \in L$. Então, se $\alpha \in K$ com $|\alpha| \leq 1$, temos

$$\alpha(U \cap W) \subset \alpha U \cap \alpha W \subset U \cap W.$$

Logo, $U \cap W \in \mathcal{B}$. Dessa forma, vemos que $\mathcal{B}$ satisfaz as condições da Definição 1.3.5, e portanto $\mathcal{B}$ é base de vizinhanças da origem.

Para concluir a condição (b) nos resta mostrar que todo elemento de $\mathcal{B}$ é absorvente. Daí, defina $f : K \to L$ pela sentença $f(\lambda) = \lambda x_0$. Note que f é contínua, pois $f(\lambda) = \odot(\lambda, x_0)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(\lambda) \in U$ sempre que $|\lambda| \leq \delta$. Assim,

$\lambda x_0 \in U$ quando $|\lambda| \leq \delta$. Equivalentemente, vemos que $x_0 \in \mu U$, quando $|\mu| \geq \frac{1}{\delta}$. Logo, (b) é satisfeita.

Vamos verificar que a condição (a) é verdadeira. Sabemos que $\oplus$ é contínua e $\oplus(0,0) = 0$. Para todo $U \in \mathcal{B}$, existem $V, W \in \mathcal{B}$ com $\oplus(V \times W) \subset U$, isto é, $V + W \subset U$. Para $Z = V \cap W$, existe $Z' \in \mathcal{B}$ com $Z' \subset Z$. Então $Z' + Z' \subset V + W \subset U$.

Verifiquemos que a condição (c) é válida. Como K é não discreto, existe $\alpha \in K$ com $0 < |\alpha| < 1$. Seja $U \in \mathcal{B}$. Então, αU é vizinhança da origem. Queremos mostrar que $\mu(\alpha U) \subset \alpha U$, sempre que $|\mu| \leq 1$. Podemos escrever $\mu = \alpha\lambda\alpha^{-1}$, com $|\lambda| \leq 1$. Então, $|\mu| = |\lambda| \leq 1$. Dado $v \in U$, segue que

$$\mu(\alpha v) = (\mu\alpha)v = (\alpha\lambda\alpha^{-1}\alpha)v = \alpha(\lambda v).$$

Logo, $\lambda v \in V$, pois V é equilibrado. Assim, $\mu(\alpha V) \subset \alpha V$. Da Proposição 1.6.(a) segue que τ é invariante por translações.

Reciprocamente, suponha que τ é invariante por translações e L possui uma base de vizinhanças da origem, satisfazendo as propriedades de (a) até (c), digamos $\mathcal{B}$. Queremos mostrar que $\oplus$ e $\odot$ são contínuas. Se $x_0 \in L$, então $\{x_0 + V : V \in \mathcal{B}\}$ é base de vizinhanças de x_0. Com efeito, $\{x_0 + V : V \in \mathcal{B}\} \neq \emptyset$. Sejam $x_0 + U, x_0 + V \in \{x_0 + V : V \in \mathcal{B}\}$. Escolha $W \in \mathcal{B}$ com $W \subset U \cap V$; temos

$$x_0 + W \subset x_0 + (U \cap V) \subset (x_0 + V) \cap (x_0 + W).$$

Seja Z vizinhança de x_0 em L. Então, $Z - x_0$ é vizinhança da origem, pois τ é invariante por translações. Escolha $U \in \mathcal{B}$ com $U \subset Z - x_0$, isto é, $x_0 + U \subset Z$. Mostraremos que $\oplus$ é contínua. Dada uma vizinhança W de $x_0 + y_0$ em L, segue que $W - (x_0 + y_0)$ é vizinhança da origem. Assim, existe $V \in \mathcal{B}$ com

$$V \subset W - (x_0 + y_0), \text{ ou ainda, } (x_0 + y_0) + V \subset W.$$

Escolha $U \in \mathcal{B}$ de modo que $U + U \subset V$. Se $x - x_0 \in U$ e $y - y_0 \in U$, segue que $x = x_0 + u_0$ e $y = y_0 + v_0$, com $u_0, v_0 \in U$. Daí,

$$x + y = (x_0 + u_0) + (y_0 + v_0) = (x_0 + y_0) + (u_0 + v_0) \in (x_0 + y_0) + U + U.$$

Como $U + U \subset V$, temos $\oplus(x, y) = x + y \in (x_0 + y_0) + V \subset W$, ou seja,

$$(x_0 + U) + (y_0 + U) \subset W.$$

Portanto, $\oplus$ é contínua.

Vejamos que $\odot$ é contínua. Fixe $\lambda_0 \in K$ e $x_0 \in L$ e seja $V \in \mathcal{B}$. Por (a), existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$. Por (b), U é absorvente, ou seja, existe $\delta > 0$ satisfazendo $x_0 \in \alpha U$, sempre que $|\alpha| \geq \frac{1}{\delta}$. Equivalentemente, $\alpha x_0 \in U$, quando $|\alpha| \leq \delta$. Logo, se $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ segue que $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$. Se K é não arquimediano, então por (c) existe $\beta \in K$ com $0 < |\beta| < 1$. Então, $|\beta|^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Daí, $|\beta|^{-n} \to \infty$, isto é, dado $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\beta|^{-n} \geq A.$$

Fazendo $A = |\lambda_0| + \delta$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $|\beta|^{-n} \geq |\lambda_0| + \delta$, se $n \geq n_0$. Defina $W = \beta^{n_0}U$. Note que $W \in \mathcal{B}$, pois $\beta U \in \mathcal{B}$ implica que $\beta^2 U \in \mathcal{B}$, e prosseguindo dessa forma teremos $W = \beta^{n_0}U \in \mathcal{B}$. Se $x - x_0 \in W$, então $x - x_0 = \beta^{n_0}u$, para algum $u \in U$. Note que $|\beta|^{n_0} \leq \frac{1}{|\lambda_0|+\delta}$. Como $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, segue que

$$|\lambda| \leq |\lambda_0| + |\lambda - \lambda_0| \leq |\lambda_0| + \delta.$$

Logo,

$$|\lambda\beta^{n_0}| \leq (|\lambda_0| + \delta) \cdot \frac{1}{|\lambda_0| + \delta} = 1.$$

Como U é equilibrado, temos

$$\lambda(x - x_0) = (\lambda\beta^{n_0})u \in U.$$

Se $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ e $x \in x_0 + W$, então

$$\lambda x = \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda(x - x_0) \in \lambda_0 x_0 + U + U.$$

Como $U + U \subset V$, temos $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + V$. Portanto, $\odot$ é contínua.

Finalmente, suponhamos que K é um corpo valorado arquimediano. Então, existe $2_K \in K$ com $|2_K| > 1$. Donde, $|2_K|^n \to \infty$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $|2_K|^n > \frac{1}{|\lambda_0|+\delta}$, se $n \geq n_0$. Escolha $Z_1 \in \mathcal{B}$ tal que $Z_1 + Z_1 \subset U$. Para Z_1, escolha $Z_2 \in \mathcal{B}$ com $Z_2 + Z_2 \subset Z_1$, e assim $Z_2 + Z_2 + Z_2 + Z_2 \subset U$. Prosseguindo dessa forma, encontraremos $W_1 \in \mathcal{B}$ com $W_1 + W_1 + \ldots + W_1 \subset U$, com uma quantidade 2^{n_0} de W_1's ($2 \in \mathbb{N}$). Se $v \in 2_K^{n_0}W_1$, então

$$v = 2_K^{n_0}w = w + w + \ldots + w$$

onde os w's aparecem 2^{n_0} vezes. Portanto,

$$2_K^{n_0}W_1 \subset W_1 + W_1 + \ldots + W_1 \subset U.$$

Mostraremos que $2^{n_0}W_1$ é equilibrado. De fato, dados $|\lambda| \leq 1$ e $v \in W_1$, segue que

$$\lambda 2_K^{n_0} w = \lambda(w + w + \ldots + w) = \lambda w + \lambda w + \ldots + \lambda w.$$

Como W_1 é equilibrado, segue que $\lambda w \in W_1$, ou seja, $\lambda w = v$, para algum $v \in W_1$. Logo,

$$\lambda 2_K^{n_0} w = v + v + \ldots + v = 2_K^{n_0} v$$

e daí $\lambda 2_K^{n_0} w \in 2_K^{n_0} W_1$. Chame $W = 2_K^{n_0} W_1 \in \mathcal{B}$. Se $x - x_0 \in W$, então $x - x_0 = 2_K^{n_0} u$, para algum $u \in W_1$. Como $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, segue que

$$|\lambda| \leq |\lambda_0| + |\lambda - \lambda_0| \leq |\lambda_0| + \delta.$$

Assim,

$$|\lambda 2_K^{n_0}| \leq (|\lambda_0| + \delta) \cdot \frac{1}{|\lambda_0| + \delta} = 1.$$

Sendo U é equilibrado, vemos que

$$\lambda(x - x_0) = (\lambda 2_K^{n_0}) u \in U.$$

Se $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ e $x \in x_0 + W$, então

$$\lambda x = \lambda_0 x_0 + (\lambda - \lambda_0) x_0 + \lambda(x - x_0) \in \lambda_0 x_0 + U + U$$

e como $U + U \subset V$, segue-se $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + V$. Portanto, $\odot$ é contínua. □

Corolário 1.3.3. Sejam L um espaço vetorial sobre um corpo valorado não discreto K. Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em L com as propriedades de (a) até (c) do Teorema 1.3.2 e todo elemento de $\mathcal{B}$ contém a origem, então $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças da origem para uma única topologia τ tal que (L, τ) é um evt sobre K.

Demonstração. Defina

$$\tau = \{G \subset L : \text{ para todo } x \in G, \text{ existe } V \in \mathcal{B} \text{ com } x + V \subset G\}.$$

Note que $\emptyset \in \tau$, por vacuidade. Além disso, $L \in \tau$. Para cada $x \in L$, escolha $V \in \mathcal{B}$. Então $x + V \subset L$. Logo, $L \in \tau$. Sejam $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma família em τ. Dado $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, existe λ_0 tal que $x \in G_{\lambda_0}$. Então, existe $V \in \mathcal{B}$ com

$$x + V \subset G_{\lambda_0}.$$

Logo,

$$x + V \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda.$$

Sejam $G_1, \ldots, G_n \in \tau$. Então, dado $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, segue-se que para cada i existe $V_i \in \mathcal{B}$ tal que $x + V_i \subset G_i$. Como $\mathcal{B}$ é base de filtro, existe $W \in \mathcal{B}$ com $W \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Logo,

$$x + W \subset x + \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i.$$

Portanto, τ é uma topologia em L.

Vejamos que $T : L \to L$, dada por $T(x) = x + x_0$ é um homeomorfismo. Dado $G \in \tau$, temos

$$y \in T^{-1}(G) \Leftrightarrow y + x_0 \in G \Leftrightarrow y \in G - x_0$$

e como $y + x_0 \in G$, segue que existe $V \in \mathcal{B}$ tal que

$$(y + x_0) + V \subset G \Rightarrow y + V \subset G - x_0 \Rightarrow y + V \subset T^{-1}(G) = G - x_0.$$

Portanto T é contínua. De maneira análoga, vemos que T^{-1} é contínua.

Para finalizar, mostraremos que se Ω é uma topologia invariante por translações em L tal que $\mathcal{B}$ é base de vizinhanças da origem e (L, Ω) é um evt, então $\Omega = \tau$. Sejam $V \in \Omega$ e $x \in V$. Então $V - x$ é vizinhança da origem. Logo existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset V - x$, e segue que $x + U \subset V$. Portanto $V \in \tau$. Dados $U \in \mathcal{B}$ e como Ω é invariante por translações, segue que $x + int(U) \in \Omega$. Então, se $V \in \tau$, tem-se que para cada $v \in V$, existe $U_v \in \mathcal{B}$ de modo que $v + int(U_v) \subset V$. Daí,

$$V = \bigcup_{v \in V} (v + int(U_v)).$$

Logo, $V \in \Omega$. $\square$

Exemplo 1.3.2. Sejam A um conjunto não vazio e K um corpo valorado não discreto. Considere

$$K^A = \{f : A \to K : f \text{ é função }\}.$$

Sejam $f, g \in K^A$ e $\alpha \in K$. Defina $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Com essas operações K^A é um espaço vetorial sobre K. Sejam $H \subset A$, com $card(H) < \infty$ e $\varepsilon > 0$. Defina

$$V_{H,\varepsilon} = \{f : |f(x)| \leq \varepsilon \text{ se } x \in H\}$$

e considere

$$\mathcal{B} = \{V_{H,\varepsilon} : \varepsilon > 0,\ H \subset A \text{ com } card(H) < \infty\}.$$

Vejamos que $\mathcal{B}$ é um filtro tal que todo elemento contém a origem e satisfaz as condições de (a) até (c) do Teorema 1.3.2 pois, se $x \in H$, temos

$$0(x) = 0 \Rightarrow |0(x)| = 0 \Rightarrow |0(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Sejam $V_{H_1,\varepsilon_1}, V_{H_2,\varepsilon_2} \in \mathcal{B}$. Fazendo $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ e $H = H_1 \cap H_2$, segue que

$$V_{H,\varepsilon} \subset V_{H_1,\varepsilon_1} \cap V_{H_2,\varepsilon_2}.$$

Portanto, $\mathcal{B}$ é um filtro de vizinhanças da origem.

Mostraremos que $\mathcal{B}$ satisfaz a condição (a). Com efeito, note que $V_{H,\frac{\varepsilon}{2}} + V_{H,\frac{\varepsilon}{2}} \subset V_{H,\varepsilon}$. De fato, dado $f + g \in V_{H,\frac{\varepsilon}{2}} + V_{H,\frac{\varepsilon}{2}}$, segue que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)|, \forall x \in H \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Verifiquemos que todo $V \in \mathcal{B}$ é equilibrado. Para $|\lambda| \leq 1$ e $f \in V_{H,\varepsilon}$, temos

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Então, $V_{H,\varepsilon}$ é equilibrado. Mostraremos que $V_{H,\varepsilon}$ é absorvente. Com efeito, dado $f \in K^A \backslash \{0\}$, existe $x \in H$ com $f(x) \neq 0$. Chame $r = max\{|f(x)| : x \in H\} > 0$. Se $|\lambda| \leq \frac{\varepsilon}{r}$, então

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon.$$

Portanto, $f \in \mu V_{H,\varepsilon}$, sempre que $|\mu| \geq \frac{r}{\varepsilon}$, e isso conclui a verificação de (b). Para mostrar que a condição (c) é valida, mostraremos que existe $\lambda \in K$ com $0 < |\lambda| < 1$ tal que $\lambda V_{H,\varepsilon} \in \mathcal{B}$, para todo $V_{H,\varepsilon}$. Como K é não discreto, existe λ com $0 < |\lambda| < 1$. Dado $g \in \lambda V_{H,\varepsilon}$, existe $f \in V_{H,\varepsilon}$ tal que $g = \lambda f$. Dessa forma, se $x \in H$, então

$$|g(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \cdot \varepsilon.$$

Logo, $\lambda V_{H,\varepsilon} \subset V_{H,|\lambda|\cdot\varepsilon}$. Agora, sejam $g \in V_{H,|\lambda|\cdot\varepsilon}$ e $x \in H$. Então,

$$|g(x)| \leq |\lambda| \cdot \varepsilon \Rightarrow |\lambda^{-1} g(x)| \leq \varepsilon.$$

Assim,

$$\lambda^{-1}g \in V_{H,\varepsilon} \Rightarrow g \in \lambda V_{H,\varepsilon}.$$

Do Corolário 1.3.3, existe τ topologia em K^A que torna K^A um espaço vetorial topológico.

Exemplo 1.3.3. Sejam K um corpo valorado não discreto e $K[t]$ o anel de polinômios $f[t] = \sum_n \alpha_n t^n$ com indeterminada t. Dados $f[t] = \sum_n \alpha_n t^n, g[t] = \sum_n \beta_n t^n \in K[t]$ e $\lambda \in K$, defina $(f+g)[t] = \sum_n (\alpha_n + \beta_n)t^n$ e $(\lambda f)[t] = \sum_n (\lambda\alpha_n)t^n$. Com as operações definidas anteriormente, sabemos que $K[t]$ é um espaço vetorial. Fixe $r \in \mathbb{R}$, com $0 < r \leq 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ defina

$$V_\varepsilon = \left\{ \sum_n \alpha_n t^n : \sum_n |\alpha_n|^r \leq \varepsilon \right\}.$$

Como $|0|^r = 0$, segue que $0 \in V_\varepsilon$. Considere

$$\mathcal{B} = \{V_\varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$

Vejamos que $\mathcal{B}$ é um filtro tal que todo seus elementos contém a origem e satisfaz as condições do Teorema 1.3.2. Sejam $V_{\varepsilon_1}, V_{\varepsilon_2} \in \mathcal{B}$ e, sem perda de generalidade, suponhamos que $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_n \alpha_n t^n \in V_{\varepsilon_1} \quad &\Rightarrow \quad \sum_n |\alpha_n|^r \leq \varepsilon_1 \\ &\Rightarrow \quad \sum_n |\alpha_n|^r \leq \varepsilon_2 \\ &\Rightarrow \quad \sum_n \alpha_n t^n \in V_{\varepsilon_2} \end{aligned}$$

e portanto $V_{\varepsilon_1} = V_{\varepsilon_1} \cap V_{\varepsilon_2}$.

Verifiquemos que (a) é verdadeira, ou seja, mostraremos que $V_{\frac{\varepsilon}{2}} + V_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset V_\varepsilon$. Se $\sum_n \alpha_n t^n, \sum_n \beta_n t^n \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, então

$$\begin{aligned} \sum_n |\alpha_n + \beta_n|^r \quad &\leq \quad \sum_n |\alpha_n|^r + \sum_n |\beta_n|^r \\ &\leq \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \quad \varepsilon. \end{aligned}$$

Mostraremos que a condição (b) é válida. Para $|\lambda| \leq 1$ e $\sum_n \alpha_n t^n \in V_\varepsilon$, segue que

$$\begin{aligned}\sum_n |\lambda \alpha_n|^r &= |\lambda|^r \cdot \sum_n |\alpha_n|^r \\ &\leq 1 \cdot \varepsilon \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, V_ε é equilibrado. Seja $\sum_n \alpha_n t^n \in K[t]$ e chame $s = \sum_n |\alpha_n|^r$. Daí, se $|\lambda| \leq (\frac{\varepsilon}{s})^{\frac{1}{r}}$, então

$$\sum_n |\lambda \alpha_n|^r = |\lambda|^r \cdot \sum_n |\alpha_n|^n \leq \frac{\varepsilon}{s} \cdot s = \varepsilon.$$

Portanto, $\lambda \cdot \sum_n \alpha_n t^n \in V_\varepsilon$. Dessa forma, $\sum_n \alpha_n t^n \in \mu V_\varepsilon$ sempre que $|\mu| \geq (\frac{s}{\varepsilon})^{\frac{1}{r}}$, mostrando que V_ε é absorvente.

Só nos resta mostrar que a condição (c) é verdadeira. Como K é não discreto, existe λ com $0 < |\lambda| < 1$. Se $g \in \lambda V_\varepsilon$, existe $\sum \alpha_n t^n \in V_\varepsilon$ tal que $g = \lambda \sum \alpha_n t^n$. Daí,

$$\sum_n |\lambda \alpha_n|^r = |\lambda|^r \cdot \sum_n |\alpha_n|^r \leq |\lambda|^r \cdot \varepsilon.$$

Logo, $\lambda V_\varepsilon \subset V_{|\lambda|^r \cdot \varepsilon}$. Agora, seja $\sum \alpha_n t^n \in V_{|\lambda|^r \cdot \varepsilon}$. Então

$$\sum_n |\alpha_n|^r \leq |\lambda|^r \cdot \varepsilon \Rightarrow \sum_n |\lambda^{-1} \alpha_n|^r = |\lambda^{-1}|^r \sum_n |\alpha_n|^r \leq \varepsilon.$$

Assim,

$$\lambda^{-1} \sum_n \alpha_n t^n \in V_\varepsilon, \text{ ou ainda }, \sum_n \alpha_n t^n \in \lambda V_\varepsilon.$$

Do Corolário 1.3.3, existe τ topologia em $K[t]$ que torna $K[t]$ um espaço vetorial topológico.

Proposição 1.3.4. Sejam um evt L e $x \in L$. Então toda vizinhança de x contém uma vizinhança fechada de x.

Demonstração. Agora mostraremos que qualquer vizinhança da origem contém uma vizinhança fechada da origem. Seja U vizinhança da origem em L. Então existe V vizinhança da origem em L com $V + V \subset U$. Verifiquemos que $\overline{V} \subset U$. Com efeito, dado $y \in \overline{V}$, segue que $y - V$ é vizinhança de y em L. Assim, $(y - V) \cap V \neq \emptyset$, e portanto existe $z \in (y - V) \cap V$. Como $z \in y - V$, segue que $z = y - v$, para algum $v \in V$. Daí, $y = z + v \in V + V$, pois $z \in V$. Dessa forma,

$$\overline{V} \subset V + V \subset U.$$

Dada uma vizinhança W de x em L, segue que $W - x$ é vizinhança da origem. Então, $W - x$ contém uma vizinhança fechada da origem, digamos $\overline{V}$. Assim,

$$\overline{V} \subset W - x \Rightarrow x + \overline{V} \subset W.$$

□

Definição 1.3.9. Seja um espaço vetorial L sobre o corpo K. Uma uniformidade em L é chamada **invariante por translações** se possui uma base $\mathcal{R}$ tal que $(x, y) \in N$ é equivalente a $(x + z, y + z) \in N$ para todo $z \in L$ e todo $N \in \mathcal{R}$.

Teorema 1.3.5. *A topologia de qualquer espaço vetorial topológico pode ser obtida de uma única uniformidade invariante por translações.*

Demonstração. Sejam (L, τ) um evt e $\mathcal{B}$ a base de vizinhanças da origem fornecida pelo Teorema 1.3.2. Para cada $V \in \mathcal{B}$ defina

$$N_V = \{(x, y) : x - y \in V\}$$

e tome

$$\mathcal{R} = \{N_V : V \in \mathcal{B}\}.$$

Então $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Afirmamos que $\mathcal{R}$ é base para uma uniformidade em L. Com efeito, dados $N_{V_1}, N_{V_2} \in \mathcal{R}$ e como $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que

$$W \subset V_1 \cap V_2.$$

Assim, se $(x, y) \in N_W$, temos

$$x - y \in W \subset V_1 \cap V_2$$

e consequentemente

$$N_W \subset N_{V_1} \cap N_{V_2}.$$

Como $x - x = 0 \in V$, para todo $V \in \mathcal{B}$, segue que $\Delta_L \subset N_V$. Dado $V \in \mathcal{B}$, existe $U \in \mathcal{B}$ satisfazendo $U + U \subset V$. Seja $(x, y) \in N_U \circ N_U$. Então, existe $z \in L$ tal que

$$(x, z), (z, y) \in N_U.$$

Assim,

$$x - z, z - y \in U$$

e daí

$$x - y = (x - z) + (z - y) \in U + U \subset V.$$

Portanto, $N_U \circ N_U \subset N_V$. Note que

$$N_V^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in N_V\} = \{(y, x) : x - y \in V\}$$

e, com isso, se V é vizinhança da origem, então $-V$ é vizinhança da origem, e assim existe $W \in \mathcal{B}$ de modo que

$$W \subset -V.$$

Se $(x, y) \in N_W^{-1}$, então $y - x \in W$. Assim, $y - x \in -V$ e consequentemente $x - y \in V$, pois $x - y = -(y - x)$. Portanto,

$$N_W^{-1} \subset N_V \Rightarrow N_W \subset N_V^{-1}.$$

Percebe-se que $\mathcal{R}$ é um sistema fundamental de arredores em L, e portanto $\mathcal{R}$ é base da uniformidade em L. Chame $\mathcal{D}$ a uniformidade gerada por $\mathcal{R}$.

Verifiquemos que $\mathcal{R}$ é invariante por translações. De fato, se $(x, y) \in N_V$ e $z \in L$, então

$$x - y = (x + z) - (z + y).$$

Assim,

$$x - y \in V \Leftrightarrow (x + z) - (z + y) \in V \Leftrightarrow (x + z), (z + y) \in V.$$

Logo, $(x, y) \in N_V \Leftrightarrow (x + z, z + y) \in N_V$.

Finalmente, mostraremos que $\tau = \Omega$, onde Ω é a topologia gerada pela uniformidade $\mathcal{D}$. Sejam $W \in \tau$ e $x \in W$. Então, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + V \subset W$. Escolha $U \in \mathcal{B}$ com $U \subset -V$ e vejamos que $N_U(x) \subset W$. De fato,

$$\begin{aligned} y \in N_U(x) &\Rightarrow (x, y) \in N_U \\ &\Rightarrow x - y \in U \subset -V. \end{aligned}$$

Como $y = x - (x - y) \in x + V \subset W$, segue que $\tau \subset \Omega$. Dados $W \in \Omega$ e $x \in W$, existe $N_U(x) \subset W$. Vejamos que $x - U \subset W$. De fato,

$$\begin{aligned} y \in x - U &\Rightarrow \exists v \in U : y = x - v \\ &\Rightarrow x - y = v \in U. \end{aligned}$$

Assim, $(x, y) \in N_U$, e portanto $x - U \subset W$. Logo, $\Omega \subset \tau$.

Falta provar que $\mathcal{D}$ é a única uniformidade em L. Se $\mathcal{D}_1$ é outra uniformidade em L com as propriedades enunciadas, considere $\mathcal{R}_1$ base de $\mathcal{D}_1$ invariante por translações. Para cada $M \in \mathcal{R}_1$, defina

$$U_M = \{x - y : (x, y) \in M\}.$$

Como $(x, x) \in M$, para todo $M \in \mathcal{R}_1$, segue que $0 = x - x \in U_M$. Afirmamos que

$$\mathcal{A} = \{U_M : M \in \mathcal{R}_1\}$$

é base de vizinhanças da origem. De fato, se V vizinhança da origem, então $-V$ é vizinhança da origem e existe $M \in \mathcal{R}_1$ tal que $M(0) \subset -V$. Seja $(z, y) \in M$ e como $\mathcal{R}_1$ é invariante por translações, segue que $(0, y - z) \in M$ e, portanto, $y - z \in M(0)$. Assim, $y - z \in -V$. Logo,

$$z - y \in V \Rightarrow U_M \subset V.$$

Dados $U_M, U_N \in \mathcal{A}$, existe $Z \in \mathcal{R}_1$ tal que $Z \subset M \cap N$. Se $x - y \in U_Z$, então

$$(x, y) \in Z \Rightarrow (x, y) \in M \text{ e } (x, y) \in N.$$

Logo, $x - y \in U_M \cap U_N$.

Verifiquemos que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$. Com efeito, se $M \in \mathcal{D}_1$, então existe $V \in \mathcal{B}$ de modo que $V \subset U_M$. Assim, $N_V \subset M$ e portanto, $M \in \mathcal{D}$. Se $N_V \in \mathcal{D}$, existe $U_M \in \mathcal{A}$ com $U_M \subset V$. Assim, $M \subset N_V$ e seque que $N_V \in \mathcal{D}_1$. □

Suponhamos que L é um evt. Dado $A \subset L$ não vazio, segue que A possui uma uniformidade induzida por L. Sendo assim A é completo se, e somente se, todo filtro de Cauchy em A converge para um elemento de A. E A é semi-completo se toda sequência de Cauchy em A converge para um elemento de A.

Afirmação 1.3.1. Um filtro $\mathcal{F}$ em A é um filtro de Cauchy se, e somente se, para toda vizinhança V da origem em L, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F - F \subset V$.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy em A. Considere $\mathcal{B}$ a base de vizinhanças da origem em L com as propriedades de (a) até (c) do Teorema 1.3.2. Dada uma vizinhança V da origem em L, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset V$. Como $\mathcal{F}$ é filtro de Cauchy, existe $F \in \mathcal{F}$ de modo que $F \times F \subset N_U$. Se $u - v \in F - F$, então

$$(u, v) \in N_U \Rightarrow u - v \in U.$$

Portanto,

$$F - F \subset U.$$

Agora, suponhamos que toda vizinhança V da origem em L é tal que existe $F \in \mathcal{F}$ satisfazendo $F - F \subset V$, onde $\mathcal{F}$ é um filtro em A. É suficiente mostrar que dado N_V, existe $F \in \mathcal{F}$ com $F \times F \subset N_V$. Por hipótese, dado $V \in \mathcal{B}$, existe $F \in \mathcal{F}$ com

$$F - F \subset V.$$

Se $(x, y) \in F \times F$, então

$$x - y \in F - F \subset V \Rightarrow (x, y) \in N_V.$$

Portanto, $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy em A. □

Afirmação 1.3.2. Uma sequência $\{x_n : n \in \mathcal{N}\} \subset A$ é de Cauchy se, e somente se, para toda vizinhança V da origem em L, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m - x_n \in V$, quando $m, n \geq n_0$.

Demonstração. (x_n) é uma sequência de Cauchy em A se, e somente se,

$$\mathcal{F} = \{B_n : n \in \mathcal{N}\}$$

é um filtro de Cauchy, onde $B_n = \{x_r : r \geq n\}$. Assim, $\mathcal{F}$ é um filtro de Cauchy em A se, e somente se, para toda vizinhança V da origem em L, existe B_n tal que

$$B_n - B_n \subset V$$

isto é

$$\{x_r - x_l : r, l \geq n\} \subset V$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. □

Afirmação 1.3.3. Um evt L é Hausdorff se, e somente se, L é um espaço uniforme separado.

Demonstração. Suponhamos que a topologia de L é Hausdorff. Considere $\mathcal{D}$ a uniformidade em L fornecida pela Teorema 1.3.5. Como

$$\Delta_L \subset \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D,$$

só nos resta mostrar que

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D \subset \Delta_L.$$

Com efeito, dado $(x, y) \in \cap_{D \in \mathcal{D}} D$, por absurdo, vamos supor que $x \neq y$. Então, existem U, V vizinhanças de x, y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$. Além disso, existem $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ de modo que

$$D_1(x) \subset U \text{ e } D_2(y) \subset V.$$

Se $z \in D_1(x)$, então $z \in U$. Mais ainda,

$$z \notin V \Rightarrow z \notin D_2(y).$$

Note que $y \in D_1(x)$, pois

$$(x, y) \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D.$$

Então,

$$(x, y) \in D_1.$$

Logo,

$$y \in D_1(x) \Rightarrow y \notin D_2(y)$$

e como $D_1(x) \cap D_2(y) = \emptyset$, segue que $(y, y) \notin D_2$ e isso configura um absurdo. Portanto, $x = y$.

Reciprocamente, suponhamos que L é separado. Então,

$$\Delta_L = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D.$$

Verifiquemos que a topologia de L é Hausdorff. Se $x \neq y$, então

$$(x, y) \notin \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D,$$

isto é, existe $D \in \mathcal{D}$, com $(x, y) \notin D$. Como $D \in \mathcal{D}$, existe $E \in \mathcal{D}$ tal que $E \circ E \subset D$. Fazendo $W = E \cap E^{-1}$, temos

$$W \in \mathcal{D} \text{ e } W \circ W \subset D.$$

Se $z \in W(x) \cap W(y)$, então $(x, z), (y, z) \in W$ e segue que $(z, y) \in W$. Como $(x, z), (z, y) \in W$, tem-se $(x, y) \in W \circ W$. Logo, $(x, y) \in D$. Absurdo, pois $x \neq y$. Portanto, $W(x) \cap W(y) = \emptyset$. $\square$

Afirmação 1.3.4. L é separado se, e somente se, para qualquer $\mathcal{U}$ base de vizinhanças da origem em L tem-se que

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \{0\}.$$

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que L é separado. Dados $\mathcal{U}$ base de vizinhança da origem e

$$y \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U\backslash\{0\}.$$

Como L é separado, segue que L é um espaço de Hausdorff. Então, existem U, V vizinhanças de $y, 0$, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$. Como V é vizinhança da origem, existe $W \in \mathcal{U}$ de modo que $W \subset V$. Assim, $y \in W$ e portanto $y \in V$, o que é um absurdo. Logo, $y = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que para qualquer $\mathcal{U}$ base de vizinhanças da origem em L tem-se que

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \{0\}.$$

Considere $\mathcal{B}$ a base de vizinhanças da origem fornecida pelo Teorema 1.3.2. Se

$$(x, y) \in \bigcap_{D\in\mathcal{D}} D,$$

onde $\mathcal{D}$ é a uniformidade em L fornecida pelo Teorema 1.3.5, então $(x, y) \in N_V$, para todo $V \in \mathcal{B}$. Daí,

$$x - y \in V, \text{ para todo } V \in \mathcal{B}.$$

Logo,

$$x - y \in \bigcap_{V\in\mathcal{B}} V = \{0\}$$

e portanto,

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

□

1.4 Subespaço, Espaço Produto, Soma Direta e Espaço Quociente

Definição 1.4.1. Seja L um espaço vetorial sobre K. Dizemos que $M \subset L$ é um **subespaço vetorial**, ou simplesmente **subespaço** se

(S1) $M \neq \emptyset$;

(S2) $M + M \subset M$;

(S3) $KM \subset M$.

Neste caso escrevemos $M \leq L$.

Sejam (L, τ) é um evt e M é um subespaço vetorial de L. Vamos definir em M uma topologia que tornará $\oplus : M \times M \to M$ e $\odot : K \times M \to M$ funções contínua. Com efeito, defina

$$\tau_M = \{U \cap M : U \in \tau\}.$$

Verifiquemos que $\oplus$ é contínua. Se U aberto de L, então $U \cap M$ é aberto de M. Como $\oplus : L \times L \to L$ é contínua, segue que $\oplus(U)^{-1}$ é aberto em $L \times L$. Assim,

$$\begin{aligned} \oplus^{-1}(U \cap M) &= \oplus^{-1}(U) \cap \oplus^{-1}(M) \\ &= \oplus^{-1}(U) \cap (M \times M). \end{aligned}$$

Portanto, $\oplus^{-1}(U \cap M)$ é aberto em $M \times M$.

Mostraremos que $\odot : K \times L \to L$ é contínua. Para o mesmo U definido acima, segue que $\odot^{-1}(U)$ é aberto em $K \times L$. Assim,

$$\begin{aligned} \odot^{-1}(U \cap M) &= \odot^{-1}(U) \cap \odot^{-1}(M) \\ &= \odot^{-1}(U) \cap (K \times M). \end{aligned}$$

Logo, $\odot^{-1}(U \cap M)$ é aberto em $K \times M$, e portanto M é um espaço vetorial topológico com a topologia induzida por L. Chamaremos M de **subespaço vetorial topológico**, ou **subespaço topológico**.

Seja $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K. Então, $L = \prod_\alpha L_\alpha$ é um espaço vetorial sobre K com $\oplus(x, y) = (x_\alpha +_\alpha y_\alpha)$ e $\odot(\lambda, x) = (\lambda \cdot_\alpha x_\alpha)$, onde $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha) \in L$ e $\lambda \in K$.

Afirmamos que se (L_α, τ_α) são espaços vetoriais topológicos, então L é um espaço vetorial topológico com a topologia produto. De fato, como cada $+_\alpha : L_\alpha \times L_\alpha \to L_\alpha$ é contínua e

$$(P_\alpha \circ \oplus)(x, y) = P_\alpha(\oplus(x, y)) = P_\alpha(x_\alpha +_\alpha y_\alpha) = x_\alpha +_\alpha y_\alpha = +_\alpha(x_\alpha, y_\alpha),$$

onde $P_\alpha : L \to L_\alpha$ é a projeção, segue que $P_\alpha \circ \oplus$ é contínua. Dessa forma, $\oplus$ é contínua. De maneira análoga, vemos que $\odot$ é contínua. Logo, L é um espaço vetorial topológico com a topologia produto.

Proposição 1.4.1. Suponha que (L, τ) é um espaço vetorial topológico e M é um subespaço topológico de L. Então, $\overline{M}$ é um subespaço vetorial topológico.

Demonstração. Da hipótese que M é subespaço, segue que $M + M \subset M$. Note que $\oplus^{-1}(\overline{M})$ é fechado em $L \times L$, pois $\overline{M}$ é fechado em L e $\oplus$ é contínua. Como $M \subset \overline{M}$, segue que $M \times M \subset \oplus^{-1}(\overline{M})$. Assim, $\overline{M} \times \overline{M} \subset \oplus^{-1}(\overline{M})$. Aplicando $\oplus$ em $\overline{M} \times \overline{M}$, temos $\overline{M} + \overline{M} \subset \overline{M}$.

Vejamos que $K\overline{M} \subset \overline{M}$. De fato, como M é um subespaço de L e $M \subset \overline{M}$ segue-se $K \times M \subset \odot^{-1}(\overline{M})$. Sendo $\odot^{-1}(\overline{M})$ é fechado e $K \times \overline{M} \subset \overline{K \times M}$, segue que $K \cdot \overline{M} \subset \overline{M}$. Logo, $\overline{M}$ é um subespaço vetorial de L, e portanto $\overline{M}$ é um evt com a topologia induzida por L. □

Definição 1.4.2. Sejam L um espaço vetorial e M_i subespaços vetoriais de L com $i = 1, \ldots, n$ tais que

(S1) $L = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$;

(S2) $M_i \cap (\sum_{j \neq i} M_j) = \{0\}$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Então, L é chamado **soma direta algébrica** dos subespaços M_i.

Da definição acima segue que todo elemento de L se escreve de maneira única como combinação linear de elementos de M_i's, ou seja, dado $x \in L$, existem únicos $x_i \in M_i$ satisfazendo

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Defina $u_i : L \to M_i$, por $u_i(x) = x_i$ e chamemos u_i a **projeção** de L em M_i. Note que

$$u_i(u_j(x)) = u_i(x_j) = \delta_{ij} u_i(x), \text{ ou seja, } u_i \circ u_j = \delta_{ij} u_i.$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i = x \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i = I.$$

onde $I : L \to L$ representa a aplicação identidade.

Verifiquemos que u_i são aplicações abertas. Com efeito, defina

$$N_i = \{x \in L : u_i(x) = 0\}.$$

Dados G um aberto em L e $x \in G$, temos

$$u_i(x) = u_i(x + 0) \in u_i(G + N_i).$$

Se $x + y \in G + N_i$, então

$$u_i(x + y) = u_i(x) + u_i(y) = u_i(x) \in u(G).$$

Logo, $u_i(G) = u_i(G + N_i)$.

Vejamos que $u_i(G + N_i) = (G + N_i) \cap M_i$. De fato, se $x \in (G + N_i) \cap M_i$, então $x = u + v$ onde $u \in G$ e $v \in N_i$. Assim,

$$u_i(u + v) = u_i(x) = x$$

e consequentemente $x \in u_i(G + N_i)$. Dado $z \in u_i(G + N_i)$, existem $x \in G$ e $y \in N_i$ tais que $z = u_i(x + y)$. Assim,

$$u_i(x) = z$$

e daí

$$u_i(z - x) = u_i(z) - u_i(x) = z - z = 0$$

e portanto

$$z - x \in N_i \Rightarrow z \in x + N_i \Rightarrow z \in (G + N_i) \cap M_i.$$

Sendo G é aberto em L, segue que $G + N_i$ é aberto em L. Logo, $u_i(G)$ é aberto em M_i.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \prod_i M_i & \longrightarrow & \sum_i M_i = L \\ & (x_i) & \longrightarrow & \sum_i x_i. \end{array}$$

Da Álgebra Linear, segue que ψ é um isomorfismo algébrico. Além disso,

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \oplus(x_1, \oplus(x_2, \ldots, \oplus(x_{n-1}, x_n)))$$

e portanto ψ é contínua. Se ψ é um isomorfismo topológico, dizemos que L é **soma direta topológica**, ou simplesmente **soma direta**. Denotaremos por $L = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

Proposição 1.4.2. Seja L um espaço vetorial topológico. Suponha que L é soma direta algébrica de n subespaços M_i. Então $L = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ se, e somente se, cada projeção u_i for contínua.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $L = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$. Então, ψ é um homeomorfismo e

$$\psi^{-1} : L \to \prod_{i=1}^{n} M_i$$

é contínua e

$$\psi^{-1}(x) = \psi^{-1}(\sum_i x_i) = (x_1, \ldots, x_n) = (u_1(x), \ldots, u_n(x)).$$

Como $\prod M_i$ é um evt com a topologia produto, segue que cada função coordenada de

ψ^{-1} é contínua. Consequentemente, cada u_i é contínua.

Reciprocamente, suponhamos que cada projeção u_i seja contínua. Como $\psi^{-1}(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$, segue que ψ^{-1} é contínua, e portanto ψ é um isomorfismo topológico.

□

Um subespaço N do espaço vetorial topológico L tal que $L = M \oplus N$ é chamado de **suplementar topológico** ou **complementar topológico** para M.

Sejam (L, τ) um evt sobre o corpo K e M um subespaço de L. Dados $x, y \in L$, usaremos a notação $x \sim y$ para representar $x - y \in M$. Novamente da Álgebra Linear, sabemos que $\sim$ é uma relação de equivalência e, para cada $x \in L$, temos a classe de equivalência $\widehat{x} = x + M$. Ademais, L/M é um espaço vetorial sobre K, com $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x+y}$ e $\lambda \cdot \widehat{x} = \widehat{\lambda \cdot x}$.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & L & \longrightarrow & L/M \\ & x & \longrightarrow & \widehat{x}. \end{array}$$

Chamamos Φ de **aplicação natural** e vejamos que Φ é sobrejetiva. Com efeito, dado $\widehat{y} \in L/M$, existe $x \in L$ tal que $x = y + m$, onde $m \in M$. Então, $\Phi(x) = \widehat{y}$.

Agora, vamos definir em L/M uma topologia que o torne um evt. Para isso defina

$$\widehat{\tau} = \{\widehat{U} \subset L/M : \Phi^{-1}(\widehat{U}) \text{ é aberto em } L\}.$$

Mostraremos que L/M possui uma base de vizinhanças da origem $\mathcal{B}$ satisfazendo as propriedades do Teorema 1.3.2 e que $\widehat{\tau}$ é invariante por translações. Dado $\widehat{U} \subset L/M$, segue que $\widehat{U} = \bigcup_{x \in U} \widehat{x}$. Se $\widehat{U}$ é aberto em L/M, então $\Phi^{-1}(\widehat{U})$ é aberto em L e

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\widehat{U}) &= \Phi^{-1}\Big(\bigcup_{x \in U} \widehat{x}\Big) \\ &= \bigcup_{x \in U} \Phi^{-1}(\widehat{x}) \\ &= \bigcup_{x \in U} x + M \\ &= U + M. \end{aligned}$$

Como $\Phi(U) = \Phi(U + M) = \widehat{U}$, segue que os abertos de L/M são conjuntos $\Phi(U)$ tais que $U + M$ é aberto em L. Note que, se V aberto em L, então $V + M$ é aberto em L. Portanto, $\Phi(V)$ é aberto em L/M, e percebe-se que Φ é uma aplicação aberta.

Considere $\mathcal{B}$ uma base de vizinhanças da origem do evt L, fornecida pelo Teorema 1.3.2 e defina

$$\widehat{\mathcal{B}} = \{\Phi(V) : V \in \mathcal{B}\}.$$

Como V é vizinhança da origem, segue que $\Phi(V)$ é uma vizinhança da origem em L/M. Dado $V \in \mathcal{B}$, existe $U \in \mathcal{B}$ com $U + U \subset V$. Assim,

$$\Phi(U + U) \subset \Phi(V) \Rightarrow \Phi(U) + \Phi(U) \subset \Phi(V).$$

Verifiquemos que $\Phi(V)$ é absorvente e equilibrado, para todo $V \in \mathcal{B}$. De fato, dado $\widehat{y} \in L/M$, escolha $y \in L$ representante de $\widehat{y}$. Se $V \in \mathcal{B}$, então existe $\delta > 0$ de modo que $y \in \lambda V$, sempre que $|\lambda| \geq \delta$. Dessa forma, se $|\lambda| \geq \delta$, então

$$\widehat{y} = \Phi(y) \in \Phi(\lambda V) \Rightarrow \widehat{y} \in \lambda\Phi(V).$$

Vamos verificar que $\Phi(V)$ é equilibrado. Sejam $|\lambda| \leq 1$ e $\widehat{y} \in \Phi(V)$, ou seja, existe $v \in V$ com $\widehat{y} = \Phi(v)$. Assim,

$$\lambda \cdot \widehat{y} = \lambda \cdot \Phi(v) = \Phi(\lambda \cdot v).$$

Como $|\lambda| \leq 1$ e $v \in V$, segue que $\lambda \cdot v \in V$, isto é, $\lambda \cdot v = w$, para algum $w \in V$. Logo, $\lambda \cdot \widehat{y} = \Phi(w) \in \Phi(V)$. A partir do Teorema 1.3.2, existe $0 < |\lambda_0| < 1$ tal que $\lambda_0 V \in \mathcal{B}$, para todo $V \in \mathcal{B}$. Dado, $V \in \mathcal{B}$, temos

$$\lambda_0\Phi(V) = \Phi(\lambda_0 V).$$

Como $\lambda_0 V \in \mathcal{B}$, segue que $\lambda_0\Phi(V) \in \widehat{\mathcal{B}}$, para todo $\Phi(V) \in \widehat{\mathcal{B}}$.

Vejamos que a topologia de L/M é invariante por translações. Dado $\widehat{y} \in L/M$, defina $T : L/M \to L/M$, por $T(\widehat{x}) = \widehat{x} + \widehat{y}$. Então, T é uma função bijetora, pois $T^{-1}(\widehat{x}) = \widehat{x} - \widehat{y}$ é a inversa de T. Para mostrar que T é um homeomorfismo, basta mostrar que T, T^{-1} são aplicações abertas. Com efeito, sejam $\widehat{W}$ aberto em L/M e $\widehat{z} \in T(\widehat{W}) = \widehat{y} + \widehat{W}$. Então, $\widehat{z} = \widehat{y} + \widehat{x}$, para algum $\widehat{x} \in \widehat{W}$. Como $\widehat{x} \in \widehat{W}$, existe $\widehat{U}$ aberto em L/M de modo que $\widehat{x} \in \widehat{U} \subset \widehat{W}$. Daí,

$$\widehat{z} = \widehat{y} + \widehat{x} \in \widehat{y} + \widehat{U} \subset \widehat{y} + \widehat{W}.$$

Logo, T é uma aplicação aberta. De maneira análoga, vemos que T^{-1} é uma aplicação aberta. Portanto, $\widehat{\mathcal{B}}$ é base de vizinhanças do $\widehat{0}$ satisfazendo as condições do Teorema 1.7. Consequentemente, $(L/M, \widehat{\tau})$ é um espaço vetorial topológico.

Proposição 1.4.3. Sejam L um evt e M um subespaço de L. Então L/M é um espaço de Hausdorff se, e somente se, M é fechado em L.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que L/M é um espaço de Hausdorff. Então, todo subconjunto finito de L/M é fechado. Em particular, $\{\widehat{0}\}$ é fechado em L/M. Como $\Phi^{-1}(\widehat{0}) = M$ e Φ é contínua, segue que M é fechado.

Reciprocamente, suponhamos que M é fechado. Queremos mostrar que L/M é um espaço de Hausdorff. Dado $\widehat{x} \neq \widehat{0}$, existe $x \in L$ tal que $\widehat{x} = \Phi(x)$ e $x \notin M$. Como M é fechado em L, concluímos que M^c é aberto em L e $x \in M^c$. Como Φ é uma aplicação aberta, segue que $\Phi(M^c)$ é aberto em L/M e $\widehat{x} \in \Phi(M^c)$. Note que $\widehat{0} \notin \Phi(M^c)$. Caso contrário, existiria $y \in M^c$ com $\Phi(y) = \widehat{y} = \widehat{0}$, ou seja, $y = y - 0 \in M$. Logo, $M \cap M^c \neq \emptyset$, o que é absurdo. Pela Proposição 1.3.4, existe W aberto em L/M tal que $\widehat{x} \in W \subset \overline{W} \subset \Phi(M^c)$. Assim,

$$\overline{W}^c \text{ é aberto em } L/M,\ \widehat{0} \in \overline{W}^c \text{ e } W \cap \overline{W}^c = \emptyset.$$

Agora, dados $\widehat{x} \neq \widehat{y}$ e fazendo $\widehat{z} = \widehat{x} - \widehat{y}$, temos $\widehat{z} \neq \widehat{0}$. Logo, existem U, V abertos em L/M tais que $\widehat{z} \in U$, $\widehat{0} \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Assim, $\widehat{x} \in \widehat{y} + U$ e $\widehat{y} \in \widehat{y} + V$. Vejamos que $(\widehat{y}+U) \cap (\widehat{y}+V) = \emptyset$. De fato, se $\widehat{w} \in (\widehat{y}+U) \cap (\widehat{y}+V)$, teríamos $\widehat{w} = \widehat{y} + \widehat{v}_1 = \widehat{y} + \widehat{v}_2$, onde $\widehat{v}_1 \in U$ e $\widehat{v}_2 \in V$, e portanto

$$\widehat{y} + \widehat{v}_1 = \widehat{y} + \widehat{v}_2 \Rightarrow \widehat{v}_1 = \widehat{v}_2.$$

Logo, $U \cap V \neq \emptyset$, o que é absurdo, pois $U \cap V = \emptyset$. □

Sejam L um espaço vetorial, M, N subespaços de L com $L = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$. Para cada $\widehat{x} \in L/M$ escolha um representante $x \in N$, e defina $v : L/M \to N$ da seguinte forma $v(\widehat{x}) = x$. Vejamos que v está bem definida, isto é, se $\widehat{x} = \widehat{y}$ queremos mostrar que $v(\widehat{x}) = v(\widehat{y})$. Assim,

$$\widehat{x} = \widehat{y} \Rightarrow x - y \in M.$$

Como $x, y \in N$, segue que $x - y \in M \cap N$ e então $x - y = 0$, pois $M \cap N = \{0\}$, e consequentemente $x = y$.

Agora, mostraremos que v é um isomorfismo. Por construção vemos que v é sobrejetora, e como

$$v(\widehat{x}) = v(\widehat{y}) \Rightarrow x = y \Rightarrow \widehat{x} = \widehat{y}$$

segue que v é injetora

Proposição 1.4.4. Sejam L um evt e M, N subespaços de L, com $L = M + N$. Então, L é soma direta topológica de M, N se, e somente se, a aplicação v definida acima é um isomorfismo topológico.

Demonstração. Seja u a projeção de L em N e Φ a aplicação natural de L em L/M. Vejamos que

$$u = v \circ \Phi.$$

De fato, dado $x \in L$, temos $x = m + n$, para algum $m \in M$ e $n \in N$. Assim, $\Phi(x) = \Phi(m+n) = \Phi(n) = \widehat{n}$. Logo, $v(\Phi(x)) = v(\widehat{n}) = n = u(m+n) = u(x)$.

Suponhamos inicialmente que $L = M \oplus N$. Então, u é contínua e Φ é uma aplicação aberta. Se V um aberto em N, então $\Phi(u^{-1}(V))$ é um aberto de L/M. Por outro lado, $v^{-1}(V) = \Phi(u^{-1}(V))$, e portanto v é contínua.

Sabemos que u é aplicação aberta e Φ é contínua. Então, dado V aberto em L/M, segue que $\Phi^{-1}(V)$ é aberto em L e $u(\Phi^{-1}(V))$ é aberto em N. Logo, $v(V) = u(\Phi^{-1}(V))$ é aberto em N, e consequentemente v^{-1} é contínua. Portanto, v é um isomorfismo topológico.

Agora, suponhamos que v é um isomorfismo topológico. Então, v é contínua. Como $u = v \circ \Phi$, segue que u é contínua. Considere w a projeção de L em M, e assim $I : L \to L$, definida por $I(x) = x$ é tal que $I = w + u$. Como I, u são contínuas, segue que $w = I - u$ é contínua. Portanto, $L = M \oplus N$. □

1.5 Espaços vetoriais topológicos de dimensão finita

Por **dimensão** de um espaço vetorial topológico L sobre K, entenderemos como a dimensão algébrica de L sobre K, isto é, a cardinalidade de qualquer subconjunto maximal e linearmente independente de L. Tais conjuntos chamaremos de **base**, ou **base de Hamel**, de L. Denotaremos por K_0 o evt de dimensão 1 obtido considerando K o espaço vetorial sobre ele mesmo.

Proposição 1.5.1. Sejam L_1, L_2 espaços vetoriais topológicos e $f : L_1 \to L_2$ isomorfismo. Então, f é contínua se, e somente se, f é contínua na origem

Demonstração. Se f é contínua, então f é contínua na origem. Agora, suponhamos que f é contínua na origem. Sejam W vizinhança em L_2 e $x \in f^{-1}(W)$. Então, $W - f(x)$ é vizinhança da origem em L_2. Logo, existe U vizinhança da origem em L_1 tal que

$$f(U) \subset W - f(x) \Rightarrow f(x) + f(U) \subset W \Rightarrow f(x+U) \subset W.$$

Como $x + U$ é vizinhança de x em L_1, segue que

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} x + U.$$

□

Proposição 1.5.2. Todo evt Hausdorff L sobre K com dimensão 1 é topologicamente isomorfo a K_0.

Demonstração. Dado $x_0 \in L$, com $x_0 \neq 0$, segue que $L = [x_0]$. Assim, para todo $x \in L$, existe $\lambda \in K$ tal que $x = \lambda \cdot x_0$. Defina $f : K_0 \to L$ pela sentença $f(\lambda) = \lambda \cdot x_0$. Note que f é contínua, pois $f(\lambda) = \odot(\lambda, x_0)$. Agora, defina $g : L = [x_0] \to K_0$, por $g(\lambda \cdot x_0) = \lambda$. Daí,

$$g(f(\lambda)) = g(\lambda \cdot x_0) = \lambda. \tag{1.2}$$

e

$$f(g(\lambda \cdot x_0)) = f(\lambda) = \lambda \cdot x_0. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3), segue que g é a inversa de f.

Verifiquemos que g é contínua na origem. Dado $\varepsilon > 0$, escolha δ tal que $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1\}$. Como K é não discreto, existe λ_0 tal que $0 < |\lambda_0| < \delta$. Sendo L Hausdorff, existe V vizinhança equilibrada da origem em L de modo que $\lambda_0 \cdot x_0 \notin V$. Se $v \in V$, então $v = \alpha \cdot x_0$. Afirmamos que $|\alpha| < \delta$, pois caso existisse $\alpha_0 \in K_0$, com $|\alpha_0| \geq \delta$ e $\alpha_0 \cdot x_0 \in V$, teríamos $|\alpha_0^{-1}| \leq \delta^{-1}$. Assim,

$$|\lambda_0 \alpha_0^{-1}| < \delta \cdot \delta^{-1} = 1.$$

Como $\alpha_0 \cdot x_0 \in V$ e V é equilibrado, segue que $\lambda_0 \cdot x_0 = \lambda_0 \alpha_0^{-1}(\alpha_0 \cdot x_0) \in V$. Absurdo, pois $\lambda_0 \cdot x_0 \notin V$, e consequentemente se $\alpha \cdot x_0 \in V$, tem-se $|\alpha| < \delta$. Portanto,

$$f(V) \subset (-\delta, \delta) \subset (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Logo, g é contínua na origem. □

Teorema 1.5.3. *Seja K um corpo completo. Todo evt Hausdorff L sobre K, de dimensão n é topologicamente isomorfo a K_0^n.*

Demonstração. Quando $n = 1$, o resultado foi demonstrado na proposição anterior. Suponhamos que para $n-1$, todo evt Hausdorff sobre K de dimensão $n-1$ é isomorfo topologicamente a K_0^{n-1}. Provaremos que todo evt Hausdorff L sobre K de dimensão n é topologicamente isomorfo a K_0^n. Considere $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset L$ uma base e faça $M = [x_1, \ldots, x_{n-1}]$ e $N = [x_n]$. Então, $L = M + N$. Da hipótese de indução M é topologicamente isomorfo a K_0^{n-1}. Como K_0 é completo, segue que K_0^{n-1} é completo, e consequentemente M é completo. Sendo L Hausdorff e M completo, segue que M é fechado, e portanto L/M é Hausdorff. Note que dado $x \in L$, tem-se $x = m + \lambda \cdot x_n$, com $m \in M$. Assim,

$$\Phi(x) = \Phi(m + \lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot \Phi(x_n).$$

Logo, $L/M = [\Phi(x_n)] = [\widehat{x_n}]$, e portanto a dimensão de L/M é 1. Pela Proposição 1.5.2, segue que L/M é topologicamente isomorfo a K_0, ou seja, existe $f : L/M \to K_0$ isomorfismo topológico, dada por $f(\alpha \cdot \widehat{x_n}) = \alpha$. Como L é Hausdorff, segue que N é Hausdorff com dimensão 1. Pela Proposição 1.5.2, N é topologicamente isomorfo a K_0, isto é, existe $g : K_0 \to N$, dada por $g(\lambda) = \lambda x_n$ isomorfismo topológico.

Agora, vamos verificar que $v : L/M \to N$, definida por $v(\widehat{x}) = x$ é um isomorfismo topológico. Dado $\widehat{x} \in L/M$, existe $\mu \in K_0$ com $\widehat{x} = \mu \cdot \widehat{x_n}$. Assim, $v(\widehat{x}) = \mu \cdot x_n$. Por outro lado,

$$g(f(\widehat{x})) = g(f(\mu \cdot \widehat{x_n})) = g(\mu) = \mu \cdot x_n$$

Logo, $v = g \circ f$. Então, v é um isomorfismo topológico. Pela Proposição 1.3.4, segue que $L = M \oplus N$, ou seja, $\psi : M \times N \to M \oplus N$ é um isomorfismo topológico. Por hipótese de indução, segue que M é topologicamente isomorfo a K_0^{n-1}, isto é, existe $h : K_0^{n-1} \to M$ isomorfismo topológico. Então, $q : K_0^{n-1} \times K_0 \to M \times N$, definida por $q(\lambda, \mu) = (h(\lambda), g(\mu))$ é isomorfismo topológico. Logo, $q \circ \psi : K_0^{n-1} \times K_0 \to M \oplus N$ é isomorfismo topológico, e portanto L é topologicamente isomorfo a K_0^n. □

Proposição 1.5.4. Seja um evt L sobre K, com K completo. Se M, N são subespaços de L com M fechado e dimensão de N finita, então $M + N$ é fechado.

Demonstração. Como M é fechado, pela Proposição 1.3 segue que L/M é evt Hausdorff, e considere $\Phi : L \to L/M$ a aplicação natural. Como N possui dimensão finita, segue que a dimensão de $\Phi(N)$ é um inteiro positivo n. Pelo Teorema 1.5.3, segue que $\Phi(N)$ é topologicamente isomorfo a K_0^n, e então $\Phi(N)$ é completo. Sendo L/M Hausdorff e $\Phi(N)$ completo, concluímos que $\Phi(N)$ é fechado em L/M. Logo, $\Phi^{-1}(\Phi(N)) = M + N$. □

Proposição 1.5.5. Sejam K um corpo completo, N um evt Hausdorff sobre K com dimensão finita e L um evt sobre K. Então, toda aplicação linear de N em L é contínua.

Demonstração. Afirmamos que toda transformação linear $T : K_0^n \to L$, é contínua. De fato,

$$\begin{aligned} T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) &= T(\lambda_1, 0, \ldots, 0) + T(0, \lambda_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + T(0, 0, \ldots, \lambda_n) \\ &= \lambda_1 \cdot T(1, 0, \ldots, 0) + \lambda_2 \cdot T(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \lambda_n \cdot T(0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Fazendo $y_1 = T(1, 0, \ldots, 0), y_2 = T(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, y_n = T(0, 0, \ldots, 1)$ e como podemos escrever

$$\begin{aligned} T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) &= \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 + \ldots + \lambda_n \cdot y_n \\ &= \oplus(\odot(\lambda_1, y_1), \oplus(\odot(\lambda_2, y_2), \ldots, \oplus(\odot(\lambda_{n-1}, y_{n-1}), \odot(\lambda_n, y_n)))), \end{aligned}$$

segue que T é contínua.

Agora, suponhamos que $N = \{0\}$ e $T : N \to L$ é uma transformação linear. Então, $T \equiv 0$ contínua. Agora, vamos considerar $N \neq \{0\}$ com dimensão n. Pelo Teorema 1.5.3, segue que N é topologicamente isomorfo a K_0^n, e portanto existe $f : N \to K_0^n$ isomorfismo topológico. Seja $T : N \to L$ uma transformação linear e definamos $\tilde{T} = T \circ f^{-1}$ aplicação de K_0^n em L. Então, $\tilde{T}$ é linear. Pela afirmação anterior $\tilde{T}$ é contínua. Portanto, $T = \tilde{T} \circ f$ é contínua, pois f é contínua. □

Dizemos que a **codimensão** de um subespaço M de um espaço vetorial L é a dimensão de L/M. Um conjunto N é dito **suplementar algébrico** de M se $L = M + N$ é soma direta algébrica.

Proposição 1.5.6. Sejam L um evt sobre K, onde K é completo e M um subespaço de L fechado com codimensão finita. Então, $L = M \oplus N$ para todo subespaço N suplementar algébrico de M.

Demonstração. Como M é fechado, segue que L/M é Hausdorff. Sendo a codimensão de M finita, a dimensão de L/M é um inteiro positivo n. Seja N subespaço de L com $L = M + N$ e considere $v : L/M \to N$, dada por $v(\widehat{x}) = x$. Pela Proposição 1.5.5, segue que v é contínua. Considere u a projeção de L sobre N, e assim $u = v \circ \Phi$, resultado demonstrado na Proposição 1.4.4. Logo, u é contínua. Como $I = u + w$, onde I é a aplicação identidade e w é a projeção de L sobre M, segue que $w = I - u$ é contínua. Portanto, $L = M \oplus N$. □

Definição 1.5.1. Seja X um espaço topológico, dizemos que X é **localmente compacto** se todo $x \in X$, possui uma vizinhança compacta de x.

Teorema 1.5.7. *Sejam K um corpo completo, $L \neq \{0\}$ um evt sobre K, localmente compacto e Hausdorff. Então, K é localmente compacto e L tem dimensão finita.*

Demonstração. Mostraremos inicialmente que K é localmente compacto. Como $L \neq \{0\}$, existe M subespaço de L com dimensão 1 e pela Proposição 1.5.2, M é topologicamente isomorfo a K_0, e consequentemente M é completo. Sendo L Hausdorff, segue que M é fechado em L. Dado $x \in M$ e por L ser localmente compacto, existe C vizinhança compacta de x em L. Daí, $M \cap C$ é fechado em C, e portanto $M \cap C$ é compacto. Logo, M é localmente compacto.

Dado $x \in M \backslash \{0\}$, definamos $f : M \to K_0$, por $f(\lambda \cdot x) = \lambda$. Então, f é isomorfismo topológico de M sobre K_0. Se $\mu \in K_0$, então existe C vizinhança compacta de $\mu \cdot x$ em M. Como f é homeomorfismo, segue que $f(C)$ é vizinhança compacta de μ em K_0. Portanto, K é localmente compacto.

Agora, vamos mostrar que L possui dimensão finita. Sendo L é localmente compacto, existe C vizinhança compacta da origem em L. Então, existe V vizinhança fechada e equilibrada da origem em L de modo que $V \subset C$. Como V é fechado e C é compacta, seque que V é compacta e, portanto V é vizinhança equilibrada e compacta da origem em L. Considere (λ_n) uma sequência em $K \backslash \{0\}$, com $\lambda_n \to 0$. Mostraremos que $B = \{\lambda_n V : n \in \mathbb{N}\}$ é base de vizinhanças da origem em L. Por construção, vemos que $B \neq \emptyset$ e $\emptyset \notin B$.

Afirmação 1.5.1. Se $|\alpha| \leq |\beta|$ e E é um conjunto equilibrado em L, então $\alpha E \subset \beta E$.

Demonstração da afirmação 1.5.1:

Se $|\alpha| \leq |\beta|$, então $|\beta^{-1} \cdot \alpha| \leq 1$. Dado $v \in \alpha E$, existe $u \in E$ com $v = \alpha \cdot u$. Assim, $\beta^{-1} \cdot v = (\beta^{-1} \cdot \alpha) \cdot u \in E$, pois $|\beta^{-1} \cdot \alpha| \leq 1$. Daí, $\beta^{-1} v = w$, com $w \in E$. Portanto, $v \in \beta \cdot w \in \beta E$.

Agora, vamos dar continuação a demonstração do teorema. Pela afirmação acima, dados $\lambda_n V, \lambda_m V \in B$, tem-se que $\lambda_n V \cap \lambda_m V = \alpha V$, onde $\alpha = \lambda_n$ ou $\alpha = \lambda_m$.

Seja U vizinhança da origem em L e escolha W vizinhança equilibrada da origem em L satisfazendo $W + W \subset U$. Então,

$$V \subset \bigcup_{x \in V} (x + W).$$

Como V é compacto, existem $x_1, x_2, \ldots x_n \in V$ de modo que $V \subset \cup_{i=1}^{n} (x_i + W)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, defina $f_i : K \mapsto L$ por $f_i(\lambda) = \lambda \cdot x_i$. Então cada f_i é contínua. Como W é vizinhança da origem, para cada i existem $\delta_i > 0$ tais que $f_i(\lambda) \in W$ se $|\lambda| \leq \delta_i$. Faça $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} > 0$ e escolha $\lambda \in K \backslash \{0\}$ tal que $|\lambda| \leq \delta$. Logo $f_i(\lambda) \in W$, para todo i. Como $\lambda_n \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_{n_0}| \leq |\lambda|$, e portanto $\lambda_{n_0} V \subset \lambda V$.

Dado $w \in \lambda V$, existe $v \in V$ com $w = \lambda \cdot v$. Como $v \in V$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $v \in x_i + W$. Então, $v = x_i + u$, para algum $u \in W$ e $w = \lambda \cdot x_i + \lambda \cdot u$. Portanto,

$$w \in \lambda x_i + \lambda W \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \lambda W).$$

Como $|\lambda| \leq \delta \leq 1$, segue que $\lambda x_i \in W$ e $\lambda W \subset W$. Assim,

$$\lambda_{n_0} V \subset \lambda V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \lambda W) \subset W + W \subset U.$$

Logo, B é base de vizinhanças da origem em L.

Finalmente, vamos mostrar que L possui dimensão finita. Escolha $\rho \in K$ com $0 < |\rho| \leq \frac{1}{2}$. Como V é vizinhança da origem, segue que ρV é vizinhança da origem em L. Então,

$$V \subset \bigcup_{y \in V} (y + \rho V).$$

Sendo V compacto, existem $y_1, \ldots, y_n \in V$ tal que $V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (y_i + \rho V)$. Seja M o menor subespaço de L que contém $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Afirmamos que $M = L$. Por absurdo, suponhamos que $M \subsetneq L$. Então, existe $w \in L$ com $w \notin M$. Como a dimensão de M é finita e L é Hausdorff, segue que M é fechado em L. Logo, M^c é aberto em L, isto é, existe V' vizinhança de w em L satisfazendo $V' \cap M^c$. Como B é base de vizinhanças, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w + \lambda_{n_0} V \subset V'$, ou seja, $(w + \lambda_{n_0} V) \cap M = \emptyset$.

Defina $f : K \mapsto L$, por $f(\lambda) = \lambda(y_1 - w)$. Sendo f contínua e V vizinhança da origem, existe $\mu \in K$ com $f(\mu^{-1}) \in V$, isto é, $\mu^{-1} \cdot (y_1 - w) \in V$. Dessa forma, existe $u \in V$ satisfazendo $\mu^{-1} \cdot (y_1 - w) = u$. Logo,

$$\mu^{-1} \cdot (y_1 - w) = u \Rightarrow y_1 - w = \mu \cdot u \Rightarrow y_1 = w + \mu \cdot u.$$

Portanto, $y_1 \in w + \mu V$, e consequentemente $(w + \mu V) \cap M \neq \emptyset$. Agora, considere $\beta = \inf\{|\mu| : (w + \mu V) \cap M \neq \emptyset\}$ e como $(w + \lambda_{n_0} V) \cap M = \emptyset$, temos $0 < |\lambda_{n_0}| \leq \beta$. Uma vez que β é a maior cota inferior de $\{|\mu| : (w + \mu V) \cap M \neq \emptyset\}$, existe $\mu_0 \in K$ com $\beta \leq |\mu_0| \leq \frac{3 \cdot \beta}{2}$, e assim $(w + \mu_0 V) \cap M \neq \emptyset$. Logo, existe $y = w + \mu_0 v \in M$, com $v \in V$. Como $V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (y_i + \rho V)$, existe i_0 tal que $v \in y_{i_0} + \rho V$, e portanto $v = y_{i_0} + \rho u$, com $u \in V$. Assim,

$$y = w + \mu_0 v = w + \mu_0 y_{i_0} + \mu_0 \rho u \Rightarrow z = y - \mu_0 y_{i_0} = w + \mu_0 \rho u \Rightarrow z \in (w + \mu_0 \rho V) \cap M$$

consequentemente $\beta \leq |\mu_0 \rho|$. Por outro lado,

$$|\mu_0 \rho| = |\mu_0| \cdot |\rho| \leq \frac{3 \cdot \beta}{2} \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{3 \cdot \beta}{4} < \beta$$

absurdo. Portanto, $M = L$. $\square$

1.6 Conjuntos Limitados

Definição 1.6.1. Um subconjunto A do evt L é chamado **limitado** quando para toda vizinhança U da origem em L, existe $\lambda \in K$ tal que $A \subset \lambda U$.

Suponhamos que $A \subset L$ é limitado, e pelo Teorema 1.3.2 sabemos que as vizinhanças equilibradas da origem em L formam uma base de vizinhança da origem. Assim, dada uma vizinhança U da origem, existe uma vizinhança equilibrada V da origem com $V \subset U$. Sendo A limitado, existe $\lambda_0 \in K$ tal que $A \subset \lambda_0 V$. Seja $\lambda \in K$ tal que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$. Então, $|\lambda^{-1} \cdot \lambda_0| \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} a \in A &\Rightarrow a \in \lambda_0 V \\ &\Rightarrow a = \lambda_0 \cdot v, \text{ para algum } v \in V \\ &\Rightarrow \lambda^{-1} \cdot a = (\lambda^{-1} \cdot \lambda_0) \cdot v. \end{aligned}$$

Como $|\lambda^{-1} \cdot \lambda_0| \leq 1$, segue que $\lambda^{-1} \cdot a \in V$, e portanto

$$\lambda^{-1} \cdot a \in U \Rightarrow a \in \lambda U,$$

sempre que $|\lambda| \geq |\lambda_0|$. Agora, suponhamos que dada uma vizinhança U da origem, existe $\delta > 0$ tal que $A \subset \lambda U$, para todo $\lambda \in K$ com $|\lambda| \geq \delta$. Assim, dada uma vizinhança U da origem, basta tomar $\lambda_0 \in K$ com $|\lambda_0| \geq \delta$, e consequentemente $A \subset \lambda_0 U$. Portanto, A é limitado.

Definição 1.6.2. Um subconjunto B do evt L é chamado **totalmente limitado** se para toda vizinhança da origem U em L, existe um subconjunto finito B_0 de B com $B \subset B_0 + U$.

Proposição 1.6.1. Todo conjunto finito é limitado.

Demonstração. O $\emptyset$ é limitado, pois $\emptyset \subset U$ para todo U subconjunto de L.

Seja $\{a\} \subset L$ e defina $f(\lambda) = \lambda \cdot a$. Então, f é contínua. Dada uma vizinhança U da origem, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda \cdot a = f(\lambda) \in U$, sempre que $|\lambda| \leq \delta$. Assim, se $|\mu| \geq \frac{1}{\delta}$ tem-se $a \in \mu U$ e, portanto $\{a\}$ é limitado.

Agora, Considere um conjunto finito $C = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Seja uma vizinhança V equilibrada da origem. Então, existem $\lambda_i \in K$ tais que $\{a_i\} \subset \lambda_i V$. Escolha $\lambda_0 \in K$ de forma que $|\lambda_0| = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Assim, $\{a_i\} \subset \lambda_0 V$, para todo i. Logo, $C \subset \lambda_0 V$. $\square$

Proposição 1.6.2. Seja um evt L sobre K. Se $A, B \subset L$ são limitados, então são também limitados em L:

(a) Todo subconjunto de A;

(b) $\overline{A}$;

(c) $A \cup B$, $A + B$ e λA, para todo $\lambda \in K$.

Além disso, todo conjunto totalmente limitado é limitado.

Demonstração. (a)

Sejam $C \subset A$ e uma vizinhança U da origem. Então, existe $\lambda_0 \in K$ com $A \subset \lambda_0 U$. Assim, $C \subset \lambda_0 U$.

(b)

Dada uma vizinhança V da origem em L, existe U vizinhança fechada e equilibrada da origem com $U \subset V$. Para U, existe λ_0 tal que $A \subset \lambda_0 U$. Daí,

$$\overline{A} \subset \overline{\lambda_0 U} = \lambda_0 \overline{U} = \lambda_0 U \subset \lambda_0 V.$$

Portanto, $\overline{A}$ é limitado.

(c)

Vamos mostrar que $A \cup B$ é limitado. Dada uma vizinhança equilibrada V da origem em L, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ de modo que

$$A \subset \lambda_1 V \text{ e } B \subset \lambda_2 V.$$

Escolha $\lambda_0 \in K$ tal que $|\lambda_0| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Assim,

$$A \cup B \subset (\lambda_1 V) \cup (\lambda_2 V) \subset (\lambda_0 V) \cup (\lambda_0 V) \subset \lambda_0 V.$$

Vamos mostrar que $A + B$ é limitado. Dada uma vizinhança V da origem em L, existe U vizinhança equilibrada da origem com $U + U \subset V$. Então, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ tais que

$$A \subset \lambda_1 U \text{ e } B \subset \lambda_2 U.$$

Escolha $\lambda_0 \in K$, tal que $|\lambda_0| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. Assim,

$$A + B \subset \lambda_1 U + \lambda_2 U \subset \lambda_0 U + \lambda_0 U \subset \lambda_0 V.$$

Vamos mostrar que λA é limitado, para todo $\lambda \in K$. Seja uma vizinhança V da origem em L. Então, existe $\lambda_1 \in K$ com $A \subset \lambda_1 V$. Fazendo $\lambda_0 = \lambda \cdot \lambda_1$, temos

$$A \subset \lambda_1 V \Rightarrow \lambda A \subset \lambda \cdot \lambda_1 V = \lambda_0 V.$$

Finalmente, vamos concluir a proposição. Dada uma vizinhança V da origem em

L, existe U vizinhança equilibrada da origem com $U + U \subset V$. Para U existe $A_0 \subset A$ finito com $A \subset A_0 + U$. Como A_0 é finito, existe $\lambda_0 \in K$ com $|\lambda_0| \geq 1$ tal que $A_0 \subset \lambda_0 U$. Sendo U é equilibrado, segue que

$$A \subset \lambda_0 U + U \Rightarrow A \subset \lambda_0(U + U) \subset \lambda_0 V.$$

Portanto, A é limitado.

$\square$

Proposição 1.6.3. Seja L um evt Hausdorff sobre K. Se A, B são subconjuntos de L compactos, então $A \cup B$, $A + B$ e λA, para todo $\lambda \in K$ são compactos.

Demonstração. Dada uma coleção de abertos $\mathcal{A}$ tais que $A \cup B \subset \cup_{V \in \mathcal{A}} V$, temos

$$A \subset \cup_{V \in \mathcal{A}} V \text{ e } B \subset \cup_{V \in \mathcal{A}} V.$$

Como A e B são compactos, existem $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ finitos com

$$A \subset \bigcup_{V \in \mathcal{A}_0} V \text{ e } B \subset \bigcup_{V \in \mathcal{A}_1} V \Rightarrow A \cup B \subset \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$$

onde $\mathcal{B} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$. Então, $\mathcal{B}$ é finito e cobre $A \cup B$.

Como $A \times B$ é compacto e $\oplus(A \times B) = A + B$, segue que $A + B$ é compacto. Para $\lambda \in K$ fixo, tem-se que $\{\lambda\}$ é compacto. Assim, $\{\lambda\} \times A$ é compacto, e como $\odot(\{\lambda\} \times A) = \lambda A$, segue que λA é compacto. $\square$

Teorema 1.6.4. *Um subconjunto A de um evt L é limitado se, e somente se, para toda sequência $(\lambda_n) \subset K$ com $\lambda_n \to 0$ e toda sequência $(x_n) \subset A$ tem-se $\lambda_n \cdot x_n \to 0$ em L.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que A é limitado. Dada uma vizinhança U equilibrada da origem, existe $\mu \neq 0$ com $A \subset \mu U$, isto é, $\mu^{-1} A \subset U$. Sejam $(\lambda_n) \subset K$ tal que $\lambda_n \to 0$ e $(x_n) \subset A$. Como $\lambda_n \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < |\mu^{-1}|$, se $n > n_0$. Assim, $|\lambda_n \cdot \mu| < 1$, se $n > n_0$. Como $x_n \in A$, segue que $\mu^{-1} \cdot x_n \in U$, ou seja, existe $u_n \in U$ de modo que $\mu^{-1} \cdot x_n = u_n$. Assim,

$$\lambda_n \cdot x_n = (\lambda_n \cdot \mu)(\mu^{-1} \cdot x_n) = (\lambda.\mu) u_n \in U$$

para $n > n_0$. Portanto $\lambda_n \cdot x_n \to 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $A \subset L$ é tal que toda sequência $(\lambda_n) \subset K$ com $\lambda_n \to 0$ e toda sequência $(x_n) \subset A$ satisfazem $\lambda_n \cdot x_n \to 0$. Por absurdo, vamos supor que A não é limitado. Então, existe U vizinhança da origem em L tal que para todo

$\lambda \in K$ tem-se $A \not\subset \lambda U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $\beta_n \in K$ tal que $|\beta_n| \geq n$ e existe $x_n \in A \backslash \beta_n U$. Note que $\beta_n^{-1} \cdot x_n \notin U$, para todo n. Caso existisse n_0 com $\beta_{n_0}^{-1} \cdot x_{n_0} \in U$, teríamos $x_{n_0} \in \beta_{n_0} U$, o que é absurdo, pois $x_{n_0} \notin \beta_{n_0} U$. Sendo $|\beta_n| \geq n$, segue que $|\beta_n^{-1}| \leq \frac{1}{n}$. Logo $\beta_n^{-1} \to 0$. Por hipótese, existe n_1 tal que se $n > n_1$ tem-se $\beta_n^{-1} \cdot x_n \to 0$ em L, ou seja,

$$\beta_n^{-1} \cdot x_n \in U \Rightarrow x_n \in \beta_n U,$$

contradizendo o fato de que $x_n \notin \beta_n U$. Portanto, A é limitado. $\square$

Proposição 1.6.5. Sejam $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ uma família de evt e $L = \prod_\alpha L_\alpha$. Um subconjunto B de L é limitado se, e somente se, $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$, onde B_α são limitados em L_α.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que B é limitado em L. Como a projeção $P_\alpha : L \mapsto L_\alpha$ é contínua, então $P_\alpha(B)$ é limitado em L_α. Chame $B_\alpha = P_\alpha(B)$ e mostraremos que $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$. De fato,

$$(b_\alpha) \in B \Rightarrow b_\alpha \in P_\alpha(B) \Rightarrow b_\alpha \in B_\alpha.$$

Logo,

$$(b_\alpha) \in \prod_\alpha B_\alpha \Rightarrow B \subset \prod_\alpha B_\alpha.$$

Reciprocamente, suponhamos que $B \subset \prod_\alpha B_\alpha$, onde B_α são limitados em L_α. Seja V uma vizinhança básica e equilibrada da origem em L. Então, $V = \prod_\alpha U_\alpha$, onde $U_\alpha \neq L_\alpha$ se $\alpha \in \beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Assim, para cada β_i, existe λ_i com $B_{\beta_i} \subset \lambda_i U_{\beta_i}$. Escolha $\lambda \in K$ com $|\lambda| \geq \max\{1, |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$ e, como $|\lambda| \geq |\lambda_i|$, segue que $B_{\beta_i} \subset \lambda U_{\beta_i}$. Sendo $|\lambda| \geq 1$, tem-se que $B_\alpha \subset \lambda U_\alpha$ para $\alpha \notin \beta$. Logo,

$$B \subset \prod_\alpha B_\alpha \Rightarrow B \subset \prod_\alpha \lambda U_\alpha = \lambda \prod_\alpha U_\alpha = \lambda V.$$

$\square$

1.7 Variedades Lineares e Hiperplanos

Se L é um espaço vetorial. Uma **variedade linear**, (ou **subespaço afim**), em L é um subconjunto que é a translação de um subespaço M de L, isto é, um conjunto F da forma $x_0 + M$, para algum $x_0 \in L$.

Afirmação 1.7.1. Sejam $x+M$ e $y+N$ duas variedades lineares. Então $x+M = y+N$ se, e somente se, $M = N$ e $y - x \in M$.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $x+M = y+N$. Então $y = y+0 \in y+N$ e, portanto $y \in x+M$, ou seja, $y - x \in M$. Verifiquemos que $N = M$. De fato, se $z \in N$, então

$$y + z \in x + M \Rightarrow z \in -(y - x) + M \subset M + M \subset M.$$

Logo $N \subset M$. De maneira análoga, vemos que $M \subset N$.

Reciprocamente, se $M = N$ e $y - x \in M$, segue que

$$(y - x) + N = M \Rightarrow y + N = x + M.$$

□

Duas variedades lineares $x_0 + M, x_1 + N$ são ditas **paralelas** se $M \subset N$ ou $N \subset M$. A **dimensão de uma variedade linear** é a dimensão do subespaço que foi transladado. Um **hiperplano** em L é um subespaço afim, próprio e maximal de L.

Proposição 1.7.1. Se $x_0 + M$ é um hiperplano, então a codimensão de M é 1.

Demonstração. Como $x_0 + M$ é um hiperplano, segue que para toda variedade linear F com $x_0 + M \subset F$, tem-se

$$x_0 + M = F \text{ ou } F = L.$$

De $x_0 + M \neq L$, temos $M \neq L$, ou seja, existe $v \in L$ e $v \notin M$. Defina $N = [M, v]$. Assim,

$$x_0 + M \subset x_0 + N.$$

Como $M \neq N$, segue que $x_0+N = L$ e, consequentemente $N = L$. Agora, dado $w \in L$, existem $u \in M$ e $a \in K$ tais que $w = u + a \cdot v$. Logo,

$$\widehat{w} = \widehat{u + a \cdot v} = \widehat{u} + a \cdot \widehat{v} = a \cdot \widehat{v}.$$

Portanto, $L/M = [\widehat{v}]$. □

Sejam $x_0 + M, x_1 + N$ hiperplanos. Então, $x_0 + M, x_1 + N$ paralelos se, e somente se, $M = N$. De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que $M \subset N$. Então, $x_0 + M \subset x_0 + N$. Como $x_0 + M$ é hiperplano, segue que

$$x_0 + M = x_0 + N \text{ ou } x_0 + N = L$$

Assim,

$$M = N \text{ ou } N = L. \tag{1.4}$$

Como $x_1 + N$ é hiperplano, $x_1 + N \neq L$, tem-se

$$N \neq L. \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5), segue que $M = N$.

Agora, suponhamos que $M = N$. Então, $M \subset N$, e portanto $x_0 + M, x_1 + N$ são paralelos.

Definição 1.7.1. Seja L um espaço vetorial sobre K. Dizemos que $f : L \mapsto K$ é um **funcional linear à direita**, se

(f1) $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in L$;

(f2) $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x), \forall \lambda \in K$ e $\forall x \in L$.

Denotaremos o dual algébrico de L, por L^*, isto é, o conjunto de todos funcionais lineares à direita de L.

Proposição 1.7.2. Um subconjunto H de L é um hiperplano se, e somente se, $H = \{x \in L : f(x) = \alpha\}$ para algum $\alpha \in K$ e algum $f \in L^*$ não nulo. Além disso, f e α são determinados, por H com um fator comum $\beta \in K$ tal que $\beta \neq 0$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que

$$H = \{x \in L : f(x) = \alpha\}$$

com $f \in L^* \backslash \{0\}$, é um hiperplano. Como f é não nulo, existe x_0 tal que $f(x_0) = \alpha$. Além disso, $f^{-1}(0) \neq L$, pois $x_0 \notin f^{-1}(0)$. Considere $M = f^{-1}(0)$ e perceba que $M \neq \emptyset$, pois

$$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0.$$

Vejamos que M é um subespaço de L. Com efeito, dados $x, y \in M$ e $\lambda \in K$, temos

$$f(x + \lambda \cdot y) = f(x) + f(\lambda \cdot y) = f(x) + \lambda \cdot f(y) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, $x + \lambda \cdot y \in M$.

Agora, mostraremos que $H = x_0 + M$. De fato, se $y \in H$, então

$$\begin{aligned} y \in H &\Leftrightarrow f(y) = \alpha \\ &\Leftrightarrow f(y) = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow f(y) - f(x_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(y - x_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow y - x_0 \in M \\ &\Leftrightarrow y \in x_0 + M. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos verificar que H é Maximal. Seja $y + N$ uma variedade linear com $H \subset y+N$ e $H \neq y+N$. Então, $x_0 \in y+N$, e portanto $x_0 - y \in N$. Note que $M \subset N$, pois se $v \in M$, então

$$x_0 + v \in x_0 + M \Rightarrow x_0 + v \in y + N.$$

Assim, para algum $n \in N$, temos

$$x_0 + v = y + n \Rightarrow v = -(x_0 - y) + n \in N.$$

Portanto, $M \subset N$, e como $H \neq y + N$, segue que $M \neq N$. Dessa forma, existe $v \in N$ e $f(v) \neq 0$. Dado $u \in L$, defina $w = u - (f(u) \cdot f(v)^{-1}) \cdot v$. Assim,

$$f(w) = f(u - (f(u) \cdot f(v)^{-1}) \cdot v) = f(u) - f(u) \cdot (f(v)^{-1} \cdot f(v)) = f(u) - f(u) = 0.$$

Logo, $w \in M$. Como $M \subset N$, segue que $w \in N$. Consequentemente,

$$u = w + (f(u) \cdot f(v)^{-1}) \cdot v \in N.$$

Portanto, $N = L$, e assim $y + N = L$.

Reciprocamente, suponhamos que H é um hiperplano, isto é, existem $x \in L$ e M subespaço de L tais que $H = x + M$ e $x + M \neq L$. Como $x + M$ é hiperplano, segue que a dimensão de L/M é 1, e portanto existe $g : L/M \mapsto K_0$ isomorfismo algébrico. Defina $f = g \circ \Phi$, onde Φ é a aplicação natural. Logo, f é um funcional linear à direita. Note que f é não nula, pois existe $v \in L$ tal que $\Phi(v) \neq \widehat{0}$. Então,

$$g(\Phi(v)) \neq 0.$$

Chame $\alpha = f(x)$ e vejamos que $H = H_1$, onde $H_1 = \{u \in L : f(u) = \alpha\}$. Assim,

$$\begin{aligned} u \in H &\Leftrightarrow u = x + m, \text{ com } m \in M \\ &\Leftrightarrow f(u) = f(x) + f(m) \\ &\Leftrightarrow f(u) = f(x) + g(\Phi(m)) \\ &\Leftrightarrow f(u) = f(x) \\ &\Leftrightarrow x + m \in H_1 \\ &\Leftrightarrow u \in H_1. \end{aligned}$$

Portanto, $H = \{u \in L : f(u) = \alpha\}$.

Se $\{x : f_1(x) = \alpha_1\}$ é outra representação de H, então $M = f_1^{-1}(0)$ e $f_1 = g_1 \circ \Phi$, onde $g_1 : L/M \mapsto K_0$ é um isomorfismo algébrico. Seja $\widehat{u} \in L/M$ não nulo e definamos $\widehat{v} = g(\widehat{u})^{-1} \cdot \widehat{u}$. Então, $g(\widehat{v}) = 1$. Chame $\beta = g_1(\widehat{v})$ e, dado $x \in L$, temos

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g_1(\Phi(x)) \\ &= g_1(c \cdot \widehat{v}) \\ &= c \cdot \beta \\ &= c \cdot 1 \cdot \beta \\ &= c \cdot g(\widehat{v}) \cdot \beta \\ &= g(c \cdot \widehat{v}) \cdot \beta \\ &= g(\Phi(x)) \cdot \beta \\ &= f(x) \cdot \beta. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.7.3. Um hiperplano H em um evt L é fechado ou denso em L.

Demonstração. Para verificar que H é fechado ou denso em L. Basta mostrar que $\overline{H}$ é uma variedade linear. Como H é variedade linear, existem $x \in L$ e M subespaço de L com $H = x + M$. Sendo $\overline{M}$ é fechado em L, segue $x + \overline{M}$ é fechado em L e $x + M \subset x + \overline{M}$. Assim, $x + \overline{M} \subset \overline{x + M} = \overline{H}$. Se $y \in \overline{x + M}$, então $y \in F$, para todo F fechado em L com $x + M \subset F$. Seja G fechado em L com $M \subset G$. Então, $x + G$ é fechado em L e $x + M \subset x + G$. Logo, $y \in x + G$, isto é, $y - x \in G$. Pela definição de fecho, tem-se $y - x \in \overline{M}$ e, consequentemente, $y \in x + \overline{M}$. Portanto, $\overline{H} = x + \overline{M}$ é variedade linear. Como $H \subset \overline{H}$, segue que $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = L$. □

Proposição 1.7.4. Seja $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ um hiperplano em um evt L. Então H é fechado se, e somente se, f é contínua.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que f é contínua. Como $H = f^{-1}(\alpha)$, segue que H é fechado em L. Agora, suponhamos que $\overline{H} = H$ e escrevendo $H = x_0 + M$ com $M = f^{-1}(0)$ e $f(x_0) = \alpha$, temos

$$\overline{x_0 + M} = x_0 + M \Rightarrow x_0 + \overline{M} = x_0 + M \Rightarrow \overline{M} = M \Rightarrow \overline{f^{-1}(0)} = f^{-1}(0).$$

Logo, $L/M = L/f^{-1}(0)$ é um evt Hausdorff. Como H é hiperplano, segue a codimensão de M é 1, ou seja, a dimensão de L/M é 1. Dessa forma, existe $\Psi : L/M \mapsto K_0$ isomorfismo topológico, e consequentemente $\Psi \circ \Phi = f \cdot \beta$. Assim, $f(v) = [(\Psi \circ \Phi) \cdot \beta^{-1}](v) = \odot(\Psi(\Phi(v)), \beta^{-1})$ é contínua. $\square$

Capítulo 2

Espaços Localmente Convexos

Este capítulo é dedicado ao estudo dos espaços vetoriais topológicos localmente convexos. Estudaremos alguns resultados importantes como o Teorema de Hahn-Banach e o Teorema de Banach-Alaoglu.

Para as próximas seções vamos considerar que o corpo seja $\mathbb{R}$.

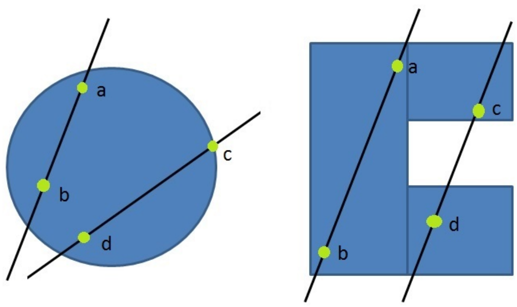
2.1 Convexidade

Seja L um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e dados $a, b \in L$ defina

$$(a, b) = \{ta + (1-t)b : t \in (0, 1)\}$$
$$[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0, 1]\}.$$

Definição 2.1.1. Seja L um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que $A \subset L$ é **convexo** se para todos $a, b \in A$ temos $(a, b) \subset A$.

O exemplo abaixo mostra dois conjuntos em que o primeiro é convexo e o segundo não é.



Note que, em certo sentindo, a Definição 2.1.1 é equivalente a

$$\forall a, b \in A \Rightarrow [a, b] \subset A. \tag{2.1}$$

De fato, pela Definição 2.1.1, dados $a, b \in A$, temos $(a, b) \subset A$. Assim, $[a, b] \subset A$. Agora, suponhamos (2.1). Como $(a, b) \subset [a, b]$, segue que $(a, b) \subset A$.

Além disso, a Definição 2.1.1 é equivalente a

$$tA + (1-t)A \subset A, \forall t \in [0, 1]. \tag{2.2}$$

De fato, consideremos a Definição 2.1.1, dados $a, b \in A$ e $t \in [0, 1]$, temos $ta + (1-t)b \in [a, b]$, e segue que

$$ta + (1-t)b \in A \to tA + (1-t)A \subset A.$$

Agora, suponhamos (2.2). Se $a, b \in A$, então $v \in [a, b]$ é da forma

$$ta + (1-t)b, \text{ para algum } t \in [0, 1]$$

e segue que $v \in tA + (1-t)A \subset A$. Logo, A é convexo.

Proposição 2.1.1. Sejam L um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $A \subset L$. Então A é convexo se, e somente se, $x + A$ é convexo, para qualquer $x \in L$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que A é convexo e vejamos que para $x \in L$ fixado, $x + A$ é convexo. De fato, dados $a, b \in A$, temos

$$t(x+a) + (1-t)(x+b) = tx + ta + x - tx + (1-t)b = x + ta + (1-t)b.$$

Para $t \in [0, 1]$, segue que $ta + (1-t)b \in A$. Logo, $[x + a, x + b] \subset x + A$.

Reciprocamente, suponhamos que $x + A$ é convexo, para qualquer $x \in L$. Em particular, para $x = 0$. Assim,

$$A = 0 + A$$

e como $0 + A$ é convexo, segue que A é convexo. □

Proposição 2.1.2. Sejam L um evt e $A \subset L$ convexo. Se $x \in int(A)$ e $y \in \overline{A}$, então $(x, y) \subset int(A)$.

Demonstração. Fixe $t \in (0, 1)$ e mostraremos que $tx + (1-t)y \in int(A)$. Perceba que as seguintes situações podem ocorrer:

(a) $tx + (1-t)y = 0$;

(b) $tx + (1-t)y \neq 0$.

Suponhamos que ocorra (a). Então, $y = \frac{-t}{1-t}x$ e chamemos $\alpha = \frac{-t}{1-t} < 0$. Defina o homeomorfismo

$$\begin{aligned} T: \ L &\rightarrow \ L \\ z &\rightarrow \alpha z. \end{aligned}$$

Sendo $y \in \overline{A}$, $x \in int(A)$ e $y = \alpha x$, segue que $T(int(A))$ é aberto e $y \in T(int(A))$. Assim, $T(int(A)) \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $u \in T(int(A)) \cap A$, e portanto $u = \alpha v$, para algum $v \in int(A)$ e $u \in A$. Defina $\mu = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, e note que $0 < \mu < 1$, pois

$$\mu v + (1-\alpha\mu)v = \frac{\alpha}{\alpha-1}v + (1 - \frac{\alpha}{\alpha-1})v = \frac{\alpha}{\alpha-1}v - \frac{\alpha}{\alpha-1}v = 0.$$

Por outro lado, $\mu v + (1-\alpha\mu)v = tx + (1-t)y$. Defina

$$U = \{\mu w + (1-\alpha\mu)w : w \in int(A)\}.$$

Como $\varphi(w) = \mu w + (1-\alpha\mu)w$ é um homeomorfismo, segue que $\varphi(int(A)) = U$, e portanto U é aberto em L.

Perceba que $U \subset A$. Com efeito, se $w \in int(A)$, então $w \in A$, e como $0 < \mu < 1$, segue que $\mu w + (1-\alpha\mu)w \in A$. Uma vez que $v \in int(A)$, temos $tx + (1-t)y = \mu v + (1-\alpha\mu)v \in U$ e, consequentemente, $(x, y) \subset int(A)$.

Agora, suponhamos que (b) ocorra. Chame $a = tx + (1-t)y$ e como

$$t(x-a) + (1-t)(y-a) = -a + tx + (1-t)y = 0,$$

faça o procedimento anterior para $v_1 = x - a$ e $v_2 = y - a$, concluindo que

$$(x, y) - a \subset int(A) - a \Rightarrow (x, y) \subset int(A).$$

□

Proposição 2.1.3. Sejam L um evt e $A, B \subset L$ convexos. Então, são convexos

(a) $int(A)$;

(b) $\overline{A}$;

(c) $A + B$;

(d) αA, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (a)

Sejam $a, b \in int(A)$. Então, $b \in \overline{A}$, e pela Proposição 2.1.2, segue que $(a, b) \subset int(A)$.

(b)

Se $0 \leq t \leq 1$, então

$$tA + (1-t)A \subset A \Rightarrow \overline{tA + (1-t)A} \subset \overline{A}.$$

Como $\overline{tA + (1-t)A} = t\overline{A} + (1-t)\overline{A}$, segue que $t\overline{A} + (1-t)\overline{A} \subset \overline{A}$, para todo $t \in [0,1]$.

(c)

Sejam $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ e $t \in (0,1)$. Então,

$$t(a_1+b_1)+(1-t)(a_2+b_2) = ta_1+tb_1+(1-t)a_2+(1-t)b_2 = (ta_1+(1-t)a_2)+(tb_1+(1-t)b_2)$$

e como A, B são convexos, segue que $t(a_1 + b_1) + (1-t)(a_2 + b_2) \in A + B$. Portanto, $A + B$ é convexo.

(d)

Fixe $\alpha \in \mathbb{R}$, e dados $a, b \in A$ e $t \in (0,1)$, temos

$$t\alpha a + (1-t)\alpha b = \alpha(ta + (1-t)b)$$

e como A é convexo, segue αA é convexo. □

Proposição 2.1.4. Sejam L um evt e $A \subset L$ convexo com $int(A) \neq \emptyset$. Então, $\overline{A} = \overline{int(A)}$ e $int(A) = int(\overline{A})$.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que $\overline{int(A)} = \overline{A}$. Como $int(A) \subset A$, segue que $\overline{int(A)} \subset \overline{A}$. Dados $y \in \overline{A}$ e $x \in int(A)$, temos

$$(x,y) \subset int(A) \Rightarrow y \in \overline{(x,y)} \subset \overline{int(A)}.$$

Verifiquemos que $int(A) = int(\overline{A})$. Como $A \subset \overline{A}$, segue que $int(A) \subset int(\overline{A})$. Vejamos que $int(\overline{A}) \subset int(A)$. Com efeito, Se $0 \in int(\overline{A})$, então pelo Teorema 1.3.2 existe V vizinhança equilibrada de 0 com $V \subset \overline{A}$. Uma vez que $\overline{A} = \overline{int(A)}$, temos $0 \in \overline{int(A)}$ e, assim $V \cap int(A) \neq \emptyset$, ou seja, existe $x \in V \cap int(A)$. Sendo $V \subset \overline{A}$ e V equilibrada, segue que $-x \in \overline{A}$. Pela Proposição 2.1.2, $(x, -x) \subset int(A)$. Note que $0 \in (x, -x)$, pois $0 = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}y$, e portanto $0 \in int(A)$. Dado $y \in int(\overline{A})$, temos

$$0 \in int(\overline{A - y}) \Rightarrow 0 \in int(A - y) \Rightarrow y \in int(A).$$

□

Proposição 2.1.5. Sejam L um espaço vetorial e $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos convexos em L. Então,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

é convexo.

Demonstração. Se $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset$, nada temos a fazer. Agora, suponhamos que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

Dados $x, y \in \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, temos

$$x, y \in A_\lambda,\ \forall\lambda.$$

Para $t \in (0,1)$, temos $tx + (1-t)y \in A_\lambda$ para todo λ, e portanto

$$tx + (1-t)y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

□

Definição 2.1.2. Sejam L um espaço vetorial e $A \subset L$. Chamemos de **envoltória convexa** de A a interseção de todos os conjuntos convexos contendo A. Denotamos por $conv(A)$.

Proposição 2.1.6. Suponha que L é um espaço vetorial e $A \subset L$. Então,

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : x_1, \ldots, x_n \in A, t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \text{ com } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstração. Para $n = 1$, temos $t_1 = 1$, e assim $t_1 x_1 = x_1 \in A$. Logo, $t_1 x_1 \in conv(A)$. Suponhamos por indução que dados $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ e $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ com $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ tem-se $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \in conv(A)$.

Sejam $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ e $t_1, \ldots, t_{n+1} \in [0,1]$ com $\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. Se $t_{n+1} = 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \Rightarrow t_1 = \ldots = t_n = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t_{n+1} x_{n+1} = x_{n+1} \in conv(A).$$

Se $t_{n+1} = 0$, então

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in conv(A),$$

por hipótese de indução. Agora, se $t_{n+1} \in (0,1)$, então

$$1 = \sum_{i=1}^{n+1} t_i = t_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} t_i,$$

e consequentemente

$$1 - t_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} t_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{1 - t_{n+1}} = 1.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t_{n+1}x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i = t_{n+1}x_{n+1} + (1 - t_{n+1}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{1 - t_{n+1}} x_i.$$

Por hipótese de indução, temos $\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{1 - t_{n+1}} x_i \in conv(A)$, e chamemos $y = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{1 - t_{n+1}} x_i$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t_{n+1}x_{n+1} + (1 - t_{n+1})y \in conv(A).$$

Para mostrar que $conv(A) \subset B$, onde

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i : x_1, \ldots, x_n \in A, t_1, \ldots, t_n \in [0,1] \text{ com } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\},$$

basta mostrar que B é convexo e contém A. Para isso, note que $A \subset B$, pois dado $x \in A$, temos

$$x = 1 \cdot x \in B.$$

Verifiquemos que B é convexo. De fato, sejam $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in A$, $t_1, \ldots, t_n, r_1, \ldots, r_m \in [0,1]$ com $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ e $\sum_{i=1}^{m} r_i = 1$. Fixe $s \in (0,1)$. Então,

$$s \cdot (\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) + (1 - s)(\sum_{i=1}^{m} r_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} (s \cdot t_i) x_i + \sum_{i=1}^{m} (1 - s) r_i y_i.$$

Defina,

$$\alpha_i = \begin{cases} s \cdot t_i, & \text{se} \quad i \in [1,n] \\ (1-s) r_{i-n}, & \text{se} \quad i \in [n+1, n+m], \end{cases} \qquad z_i = \begin{cases} x_i, & \text{se} \quad i \in [1,n] \\ y_i, & \text{se} \quad i \in [n+1, n+m]. \end{cases}$$

Dessa forma,

$$s \cdot (\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) + (1 - s)(\sum_{i=1}^{m} r_i y_i) = \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i z_i.$$

Note que $z_i \in A$, $\alpha_i \in [0,1]$ e

$$\sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} st_i + \sum_{i=1}^{m} (1-s)r_i$$
$$= s \cdot (\sum_{i=1}^{n} t_i) + (1-s) \cdot (\sum_{i=1}^{m} r_i) = s \cdot 1 + (1-s) \cdot 1 = 1.$$

Portanto, $s \cdot (\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) + (1-s)(\sum_{i=1}^{m} r_i y_i) \in B$. □

Proposição 2.1.7. Suponha que L e N são espaços vetoriais e $T : L \to N$ é uma transformação linear. Então,

(a) Se B é um convexo de L, então $T(B)$ é convexo em N;

(b) Se B é equilibrado em L, então $T(B)$ é equilibrado em N;

(c) Se C é convexo em N, então $T^{-1}(C)$ é convexo em L;

(d) Se C é equilibrado em N, então $T^{-1}(C)$ é equilibrado em L;

(e) Se C é absorvente em N, então $T^{-1}(C)$ é absorvente em L.

Demonstração. (a)

Sejam $x, y \in B$ e $t \in (0,1)$. Então,

$$tT(x) + (1-t)T(y) = T(tx) + T((1-t)y) = T(tx + (1-t)y),$$

e como B é convexo, segue que $tT(x) + (1-t)T(y) = T(tx + (1-t)y) \in T(B)$.

(b)

Sejam $|t| \leq 1$ e $x \in C$. Então,

$$tT(x) = T(tx)$$

e, como C é equilibrado, segue que $tT(x) = T(tx) \in T(C)$.

(c)

Sejam $x, y \in T^{-1}(C)$ e $t \in (0,1)$. Então,

$$T(tx + (1-t)y) = T(tx) + T((1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y) \in C,$$

pois C é convexo. Portanto, $tx + (1-t)y \in T^{-1}(C)$.

(d)

Sejam $x \in T^{-1}(C)$ e $|t| \leq 1$. Então,

$$T(tx) = tT(x) \in C,$$

pois C é equilibrado. Logo, $tx \in T^{-1}(C)$.

(e)

Seja $x \in L$. Então, $T(x) \in N$. Como C é absorvente em N, existe $\delta > 0$ tal que $T(x) \in tC$, sempre que $|t| \geq \delta$. Assim, quando $|t| \geq \delta$, temos

$$x \in T^{-1}(tC) \Rightarrow x \in tT^{-1}(C).$$

□

Observação 2.1.1. Se $C \subset L$ é absorvente e T é a transformação nula, então $T(C) = \{0\}$ e, como $\{0\}$ não é absorvente, $T(C)$ não é absorvente. Portanto, nem toda transformação linear leva conjuntos absorventes em conjuntos absorventes.

Proposição 2.1.8. Suponha que L e N são espaços vetoriais topológicos, e $T : L \to N$ é uma transformação linear contínua. Se $B \subset L$ é limitado, então $T(B) \subset N$ é limitado.

Demonstração. Seja V vizinhança da origem em N. Então, $T^{-1}(V)$ é vizinhança da origem em L. Sendo B é limitado em L, existe $t \in \mathbb{R}$ com

$$B \subset tT^{-1}(V) \Rightarrow T(B) \subset T(tT^{-1}(V)) \Rightarrow T(B) \subset tV.$$

□

Definição 2.1.3. Sejam L e N espaços vetoriais topológicos. Dizemos que transformação linear $T : L \to N$ é **limitada** se $T(B)$ é limitado em N quando B é limitado em L.

Definição 2.1.4. Um espaço vetorial topológico é **localmente convexo** se todo ponto possui uma base de vizinhanças consistindo de conjuntos convexos. Tais espaços são chamados de **espaços localmente convexo**, ou simplesmente elc.

Proposição 2.1.9. Suponha que L é um espaço localmente convexo. Então, L possui uma base de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos convexos e equilibrados.

Demonstração. Sendo L localmente convexo, existe $\mathcal{B}_0$ base de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos convexos. Dada uma vizinhança U da origem, existe $C \in \mathcal{B}_0$ com $C \subset U$. Pelo Teorema 1.3.2, existe W vizinhança equilibrada da origem com $W \subset C$, e chamemos $V = conv(W)$. Então,

(a) $W \subset V$;

(b) $V \subset C$, pois C é convexo e $W \subset C$.

De (a), segue que V é vizinhança da origem. Vejamos que V é equilibrado. De fato, sejam $y \in V$ e $|t| \leq 1$. Então, existem $x_1, \ldots, x_n \in W$ e $r_1, \ldots, r_n \in [0,1]$ tais que $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ e $y = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$. Logo,

$$ty = t \cdot (\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i(tx_i).$$

Como W é equilibrado, segue que $tx_i = v_i \in W$. Em seguida,

$$ty = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \in V.$$

Defina

$$\mathcal{U} = \{V : V \text{ é vizinhança equilibrada e convexa da origem}\}.$$

Assim, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ e $\emptyset \in \mathcal{U}$. Logo, se $U, V \in \mathcal{U}$, então $U \cap V$ é vizinhança da origem, e portanto existe $C \in \mathcal{B}_0$ com $C \subset U \cap V$, e por (b) existe Z vizinhança equilibrada e convexa da origem satisfazendo $Z \subset U \cap V$. Logo, $\mathcal{U}$ é base de vizinhanças da origem. $\square$

2.2 Funcionais Sublineares e Seminormas

Definição 2.2.1. Seja L um espaço vetorial e $C \subset L$ com $0 \in C$. Dizemos que 0 é **ponto interno** de C se para todo $x \in L \backslash \{0\}$, existe $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subset \varphi_x^{-1}(C)$, onde $\varphi_x : \mathbb{R} \to L$ é dada por $\varphi_x(t) = tx$.

Afirmação 2.2.1. Suponha que L é um espaço vetorial e C é um subconjunto de L com $0 \in C$. Então C é convexo e 0 é ponto interno de C se, e somente se, C é absorvente, convexo.

Demonstração. De fato, suponha que vale a Definição 2.2.1. Então, dado $x \in L \backslash \{0\}$, existe $\delta > 0$ com $(-\delta, \delta) \subset \varphi_x^{-1}(C)$. Fazendo $|t| \leq \frac{\delta}{2}$, segue que $\varphi_x(t) \in C$. Assim, $tx \in C$. Portanto, $x \in rC$, quando $|r| \geq \frac{2}{\delta}$.

Reciprocamente, suponha que C é absorvente e $0 \in C$. Dado $x \neq 0$, existe $\delta > 0$ com $x \in tC$, quando $|t| \geq \delta$. Escolha $\varepsilon \in (0, \frac{1}{\delta})$. Se $|t| < \varepsilon$, então $\delta < \frac{1}{|t|}$. Daí,

$$x \in \frac{1}{t} C \Rightarrow tx \in C.$$

Portanto, $\varphi_x(t) \in C$, quando $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. $\square$

Proposição 2.2.1. Suponha que L é um espaço vetorial e $C \subset L$ é um conjunto convexo com $0 \in C$. Então,

(a) Se $0 < s < t$, então $sC \subset tC$;

(b) Se $s, t > 0$, então $sC + tC = (s+t)C$;

(c) Se 0 é um ponto interno de C, então $I_x = \{t > 0 : x \in tC\}$ é um intervalo da forma $[a, \infty)$ ou (a, ∞), para todo $x \in L$.

Demonstração. (a)

Sejam $x \in C$ e $0 < s < t$. Então,

$$sx = t \cdot \frac{s}{t}x = t \cdot \frac{s}{t}x + t \cdot (1 - \frac{s}{t})0 = t(\frac{s}{t}x + (1 - \frac{s}{t})0)$$

e, como C é convexo, segue que $sx \in tC$.

(b)

Dado $x \in C$, temos

$$(s+t)x = sx + tx \in sC + tC.$$

Sejam $x, y \in C$. Então,

$$sx + ty = (s+t)(\frac{s}{s+t}x + \frac{t}{s+t}y)$$

e, como $\frac{t}{s+t} = 1 - \frac{s}{s+t}$, segue que

$$sx + ty = (s+t)(\frac{s}{s+t}x + (1 - \frac{s}{s+t})y).$$

Portanto, $sx + ty \in (s+t)C$.

(c)

Se $x \in L\backslash\{0\}$, existe $\delta > 0$ com $(-\delta, \delta) \subset \varphi_x^{-1}(C)$. Assim, $\varphi_x(\frac{\delta}{2}) \in C$, ou seja, $\frac{\delta}{2}x \in C$. Logo, $x \in \frac{2}{\delta}C$. Portanto, $I_x \neq \emptyset$. Como I_x é limitado inferiormente por 0, existe $a = \inf I_x$. Então, $a \in I_x$ ou $a \notin I_x$. Sendo $I_x \neq \emptyset$, existe $s \in I_x$ e dado $t > s$, concluímos, por (a), que $sC \subset tC$. Logo, $t \in I_x$, para qualquer $t > s$. Além disso, se $s > a$, então $s \in I_x$. Caso contrário, s seria cota inferior de I_x. Absurdo, e portanto $s \in I_x$. Concluímos que $I_x = [a, \infty)$ ou $I_x = (a, \infty)$. $\square$

Corolário 2.2.2. Suponha que L é um espaço vetorial e $C \subset L$ é convexo com $0 \in C$. Se 0 é ponto interno de C, então

(a) Se $x \in L$ e $s > 0$, então $I_{sx} = sI_x$;

(b) Se $x, y \in L$, então $I_x + I_y \subset I_{x+y}$.

Demonstração. (a) Note que

$$\begin{aligned} t \in I_{sx} &\Leftrightarrow sx \in tC \\ &\Leftrightarrow x \in s^{-1}tC \\ &\Leftrightarrow s^{-1}t \in I_x \\ &\Leftrightarrow t \in sI_x. \end{aligned}$$

(b)

Dados $s \in I_x$ e $t \in I_y$, temos

$$x \in sC \text{ e } y \in tC.$$

Pela Proposição 2.2.1(b), segue que $sC + tC = (s+t)C$. Logo, $x + y \in (s+t)C$. Daí, $s + t \in I_{x+y}$. Portanto, $I_x + I_y \subset I_{x+y}$. □

Agora, sejam L um espaço vetorial e $C \subset L$ convexo com $0 \in C$. Suponha que 0 é ponto interno de C. Com a mesma notação da Proposição 2.2.1, chamaremos o ponto extremal à esquerda do intervalo I_x de $p_C(x)$. Chamando a_{sx} o ponto extremal à esquerda do intervalo I_{sx}, pelo Corolário 2.2.2(a), segue que $a_{sx} = sa_x$. Logo, $p_C(sx) = sp_C(x)$. Chamando a_{x+y},a_x e a_y os pontos extremais à esquerda dos intervalos I_{x+y}, I_x e I_y, respectivamente, por 2.11.(b), temos $I_x + I_y \subset I_{x+y}$. Daí, $a_{x+y} \leq a_x + a_y$. Portanto, $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$. Como $0 \in tC$ para todo $t > 0$, segue que $I_0 = (0, \infty)$, e portanto $p_C(0) = 0$. A função $p_C : L \to \mathbb{R}$ é chamada de **funcional de Minkowski**.

Definição 2.2.2. Seja L um espaço vetorial. Um **funcional sublinear** é uma função $p : L \to \mathbb{R}$, satisfazendo as condições abaixo:

(g1) $p(tx) = tp(x)$, para todo $t \geq 0$ e todo $x \in L$;

(g2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para quaisquer $x, y \in L$.

Um funcional sublinear é chamado **seminorma** se p é não negativa e $p(cx) = |c|p(x)$, para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo $x \in L$. Uma seminorma p é uma **norma**, se $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Proposição 2.2.3. Sejam L um espaço vetorial topológico e $p : L \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. As afirmações abaixo são equivalentes.

(i) p é contínua;

(ii) p é contínua no 0;

(iii) 0 é interior a $\{x \in L : p(x) \leq 1\}$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) É imediata.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sabemos que $0 \in (-\infty, 1)$ e $p(0) = 0$. Logo,

$$0 \in p^{-1}((-\infty, 1)) \subset \{x \in L : p(x) \leq 1\}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Note que, para quaisquer $x, x_0 \in L$, tem-se

$$p(x) = p(x - x_0 + x_0) \leq p(x - x_0) + p(x_0) \tag{2.3}$$

e

$$p(x_0) = p(x_0 - x + x) \leq p(x_0 - x) + p(x). \tag{2.4}$$

Por (2.3) e (2.4), segue que

$$-p(x_0 - x) \leq p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0).$$

Seja $V = int\{x \in L : p(x) \leq 1\}$. Se $x \in x_0 + \delta(V \cap (-V))$, com $\delta > 0$, então

$$\begin{aligned} x - x_0 \in \delta(V \cap (-V)) &\Rightarrow x - x_0 \in \delta V \\ &\Rightarrow \text{ existe } u \in V, \text{ com } x - x_0 = \delta u. \end{aligned} \tag{2.5}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} x - x_0 \in -\delta V &\Rightarrow x_0 - x \in \delta V \\ &\Rightarrow \text{ existe } v \in V, \text{ com } x_0 - x = \delta v. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6), vemos que

$$\begin{aligned} p(x - x_0) = p(\delta u) = \delta p(u) \leq \delta \\ p(x_0 - x) = p(\delta v) = \delta p(v) \leq \delta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\delta \leq -p(x_0 - x) \leq p(x) - p(x_0) \leq p(x - x_0) \leq \delta \\ \Rightarrow -\delta \leq p(x) - p(x_0) \leq \delta. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.4. *Sejam L um espaço vetorial e $C \subset L$ é convexo com $0 \in C$. Suponha que 0 é ponto interno de C. Então, o funcional de Minkoswski é um funcional sublinear,* *e*

$$\{x \in L : p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in L : p_C(x) \leq 1\}.$$

Também, p_C é uma seminorma se C é equilibrado. Finalmente, Se L é um espaço vetorial topológico, então $0 \in int(C)$ se, e somente se, p_C é contínua.

Demonstração. Já mostramos que p_C é um funcional sublinear. Verifiquemos que

$$\{x \in L : p_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in L : p_C(x) \leq 1\}.$$

De fato, se $y \in \{x \in L : p_C(x) < 1\}$, então $p_C(y) < 1$, ou seja, $1 \in I_y$. Logo, $y \in 1 \cdot C = C$. Por isso, $\{x \in L : p_C(x) < 1\} \subset C$. Agora, se $x \in C$, então $1 \in I_x$. Logo, $p_C(x) \leq 1$.

Suponhamos que C é equilibrado. Como I_x é limitado inferiormente por 0, segue que $p_C(x) \geq 0$. Então basta mostrar que $p_C(cx) = |c|p_C(x)$, para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo $x \in L$. Assim, se $|t| = 1$, então $tC \subset C$. Como $|t^{-1}| = 1$ e C é equilibrado, segue que $t^{-1}C \subset C$. Daí,

$$C = t^{-1}(tC) \subset t^{-1}C.$$

Logo, $C = t^{-1}C$. Como 0 é ponto interno de C, segue que C é absorvente, e portanto dado $x \in L$, existe $s \in \mathbb{R}$ com $x \in sC$, ou seja, existe $c_1 \in C$ tal que $x = sc_1$. Então,

$$\begin{aligned} x = sc_1 \quad &\Leftrightarrow \quad x = st^{-1}c_2, \text{ para algum } c_2 \in C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in st^{-1}C \\ &\Leftrightarrow \quad tx \in sC. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} r \in I_x \quad &\Leftrightarrow \quad x \in rC \\ &\Leftrightarrow \quad tx \in rC \\ &\Leftrightarrow \quad r \in I_{tx}. \end{aligned}$$

Logo, $p_C(tx) = p_C(x)$. Agora, se $c \in \mathbb{R}$, escolha $t \in \mathbb{R}$ com $|t| = 1$ de modo que $c = |c| \cdot t$. Como p_C é gauge, segue que

$$p_C(cx) = p_C(|c| \cdot sx) = |c|p_C(sx) = |c|p_C(x).$$

Finalmente, vamos considerar que L é um evt. Se p_C contínua, então $\{x \in L :$

$p_C(x) < 1\} = p_C^{-1}((-\infty, 1))$ é aberto em L. Como $p_C(0) = 0$, segue que

$$0 \in \{x \in L : p_C(x) < 1\} \subset C$$

e portanto, $0 \in int(C)$. Reciprocamente, suponha que $0 \in int(C)$. Como $C \subset \{x \in L : p_C(x) \leq 1\}$, segue que $int(C) \subset int\{x \in L : p_C(x) \leq 1\}$. Logo, $0 \in int\{x \in L : p_C(x) \leq 1\}$. Pela Proposição 2.2.3, segue que p_C é contínua. □

Proposição 2.2.5. Suponha que L é um espaço vetorial, $C \subset L$ é convexo, absorvente com $0 \in C$ e p_C é o funcional de Minkoswski associado a C. Se $f : L \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, então $f(x) \leq p_C(x)$, para todo $x \in L$ se, e somente se, $f(y) \leq 1$, para todo $y \in C$.

Demonstração. Inicialmente, suponha que $f(x) \leq p_C(x)$, para todo $x \in L$. Dado $y \in C$, temos

$$y \in 1 \cdot C \Rightarrow 1 \in I_y \Rightarrow p_C(y) \leq 1.$$

Daí, $f(y) \leq p_C(y) \leq 1$. Agora, suponha que $f(y) \leq 1$, para todo $y \in C$. Sejam $x \in L$ e $t \in I_x$. Então, $t > 0$ e

$$x \in tC \Rightarrow t^{-1}x \in C \Rightarrow f(t^{-1}x) \leq 1.$$

Como $f(t^{-1}x) = t^{-1}f(x)$, segue que

$$t^{-1}f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq t, \text{ para todo } t \in I_x.$$

Logo, $f(x) \leq p_C(x)$. □

2.3 Teorema de Hahn-Banach

A essência do Teorema de Hahn-Banach é que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço N de um espaço L podem ser estendidos a todo espaço L preservando linearidade e continuidade.

Definição 2.3.1. Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $C \subset X$ é uma **cadeia** se para quaisquer $x, y \in C$, tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Teorema 2.3.1 (Hahn-Banach)**.** *Sejam L um espaço vetorial, N um subespaço de L e $p : L \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Se $f : N \to \mathbb{R}$ é um funcional linear satisfazendo $f(y) \leq p(y)$, para todo $y \in N$, então f possui uma extensão linear $F : L \to \mathbb{R}$ com $F(x) \leq p(x)$, para todo $x \in L$. Finalmente, se L é um evt e p é contínua, então F é contínua.*

Demonstração. Considere

$$\mathcal{P} = \left\{ (g, Z) \quad : \quad \begin{array}{c} Z \text{ é subespaço de } L, \text{ com } N \subset Z, \\ g : Z \to \mathbb{R} \text{ é um funcional linear que estende } f, \\ g(z) \leq p(z), \forall z \in L. \end{array} \right\}$$

Note que $\mathcal{P} \neq \emptyset$, pois $(f, N) \in \mathcal{P}$. Dizemos que $(g_1, Z_1) \leq (g_2, Z_2)$ quando $Z_1 \subset Z_2$ e $g_2|_{Z_1} \equiv g_1$. Logo,

$$(g_1, Z_1) \leq (g_1, Z_1).$$

Se $(g_1, Z_1) \leq (g_2, Z_2)$ e $(g_2, Z_2) \leq (g_3, Z_3)$, então

$$Z_1 \subset Z_3 \text{ e } g_3|_{Z_1} \equiv g_1.$$

Assim, $\leq$ é uma ordem parcial. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia não vazia em $\mathcal{P}$. Defina

$$Z_0 = \bigcup_{(g,Z) \in \mathcal{C}} Z.$$

Dado $x \in Z_0$, existe $(g, Z) \in \mathcal{C}$ com $x \in Z$. Defina $g_0 : Z \to \mathbb{R}$, por $g_0(x) = g(x)$. Verifiquemos que

(a) Z_0 é um subespaço de L com $N \subset Z_0$;

(b) g_0 é um funcional linear que estende f e $g_0(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Z_0$.

De fato,

(a)

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in Z_0$. Então existem $(g_1, Z_1), (g_2, Z_2) \in \mathcal{C}$ tais que $x \in Z_1$ e $y \in Z_2$. Sendo $\mathcal{C}$ uma cadeia, segue que $Z_1 \subset Z_2$ ou $Z_2 \subset Z_1$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $Z_1 \subset Z_2$. Assim, $x, y \in Z_2$. Logo, $x + \alpha y \in Z_2$. Portanto, Z_0 é um subespaço vetorial de L. Como $(g, Z) \in \mathcal{P}$, segue que $N \subset Z$. Daí, $N \subset Z_0$.

(b)

Note que g_0 está bem definida. Se $x \in Z_1$ e $x \in Z_2$ com $(g_1, Z_1), (g_2, Z_2) \in \mathcal{C}$, então $g_1|_{Z_2} \equiv g_2$ ou $g_2|_{Z_1} \equiv g_1$. Daí, $g_1(x) = g_2(x)$. Vejamos que g_0 é um funcional linear. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x, y \in Z_0$. Então, existem $(g_1, Z_1), (g_2, Z_2) \in \mathcal{C}$ tais que $x \in Z_1$ e $y \in Z_2$. Podemos supor que $(g_1, Z_1) \leq (g_2, Z_2)$. Assim,

$$g_0(x + \alpha y) = g_2(x + \alpha y) = g_2(x) + \alpha g_2(y) = g_0(x) + \alpha g_0(y).$$

Mostramos em (a) que $N \subset Z_0$, ou seja, dado $y \in N$, existe $(g, Z) \in \mathcal{C}$ com $y \in Z$.

Logo,

$$g_0(y) = g(y) = f(y).$$

Para finalizar, provaremos que $g_0(z) \leq p(z)$, para todo $z \in Z_0$. Dado $z \in Z_0$, existe $(g, Z) \in \mathcal{C}$ com $z \in Z$. Assim,

$$g_0(z) = g(z) \leq p(z).$$

Portanto, $(g_0, Z_0) \in \mathcal{P}$ é cota superior de $\mathcal{C}$. Pelo Lema de Zorn, existe $(F, Y) \in \mathcal{P}$ elemento maximal.

Agora, verifiquemos que $Y = L$. Com efeito, suponhamos por absurdo que $Y \subsetneq L$, isto é, existe $y_0 \in L \backslash Y$. Defina $Z = Y + \mathbb{R}y_0$ e $g : Z \to \mathbb{R}$, por $g(y + ty_0) = F(y) + c_0 t$ para uma constante c_0 que ainda será determinada satisfazendo $g(x) \leq p(x)$. para todo $x = y + ty_0 \in Z$. Quando $t = 0$, temos

$$g(x) = g(y + 0 \cdot y_0) = F(y) \leq p(y) = p(y + 0 \cdot y_0) = p(x).$$

Quando $t > 0$, temos

$$t(F(t^{-1}y + c_0)) = F(y) + tc_0 = g(y + ty_0) \leq p(y + ty_0) = t(p(t^{-1}y + y_0)).$$

Chame $y' = t^{-1}y$. Então,

$$t(F(y') + c_0) \leq t(p(y' + y_0)) \Rightarrow c_0 \leq p(y' + y_0) - F(y')$$

para todo $y' \in Y$. Agora, quando $t < 0$, temos

$$(-t)(F((-t^{-1}y)) - c_0) = F(y) + tc_0 = g(y + ty_0) \leq p(y + ty_0) = (-t)(p((-t)^{-1}y - y_0)).$$

Chame $y'' = (-t)^{-1}y$. Então,

$$(-t)(F(y'') - c_0) \leq (-t)p(y'' - y_0) \Rightarrow F(y'') - p(y'' - y_0) \leq c_0$$

para todo $y'' \in Y$. Daí,

$$F(y'') - p(y'' - y_0) \leq c_0 \leq p(y' + y_0) - F(y').$$

Escolha c_0 tal que

$$\sup_{y'' \in Y} \{F(y'') - p(y'' - y_0)\} \leq c_0 \leq \inf_{y' \in Y} \{p(y' + y_0) - F(y')\}.$$

Logo, $(g, Z) \in \mathcal{P}$ e $(F, Y) \leq (g, Z)$. Absurdo, pois (F, Y) é elemento maximal de $\mathcal{P}$. Portanto, $Y = L$.

Finalmente, suponha que L é um evt e p é contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existe V vizinhança aberta da origem com $p(x) < \varepsilon$, para qualquer $x \in V$. Se $x \in L$ e $y - x \in V \cap (-V)$, então

$$y - x \in V \text{ e } y - x \in -V \Rightarrow y - x \in V \text{ e } x - y \in V.$$

Assim,

$$F(x) - F(y) = F(x - y) \leq p(x - y) < \varepsilon$$
$$F(y) - F(x) = F(y - x) \leq p(y - x) < \varepsilon.$$

Logo, $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$, para $y \in x + (V \cap (-V))$. □

Lema 2.3.2. Sejam L um espaço localmente convexo e $C \subset L$ convexo e fechado com $0 \in int(C)$. Se $x_0 \notin C$, então existe um funcional linear contínuo $F : L \to \mathbb{R}$ tal que $F(C) \subset (-\infty, 1]$ e $F(x_0) > 1$

Demonstração. Seja p_C o funcional de Minkowski associado ao conjunto C. Pelo Teorema 2.13, segue que p_C é contínuo. Se $p_C(x) < 1$, então $x \in C$. Logo, $p_C(x_0) \geq 1$. Vejamos que $p_C(x_0) \neq 1$. De fato, se $p_C(x_0) = 1$, então $p_C((1 - \frac{1}{n} x_0)) = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Por isso, $(1 - \frac{1}{n})x_0 \in C$. Como C é fechado e $1 - \frac{1}{n} \to 1$, temos $(1 - \frac{1}{n})x_0 \to x_0 \in C$. Portanto, $p_C(x_0) > 1$.

Agora, considere $Y = \mathbb{R}x_0$ subespaço de L e $f(tx_0) = tp_C(x_0)$. Quando $t \geq 0$, temos

$$f(tx_0) = tp_C(x_0) = p_C(tx_0).$$

Quando $t < 0$, temos

$$f(tx_0) = tp_C(x_0) < 0 \leq p_C(tx_0).$$

Portanto, $f(y) \leq p_C(y)$, para todo $y \in Y$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $F : L \to \mathbb{R}$ contínuo, com $F(x) \leq p_C(x)$ para todo $x \in L$ e $F|_Y \equiv f$. Assim, se $x \in C$, então

$$F(x) \leq p_C(x) \leq 1 \Rightarrow F(C) \subset (-\infty, 1]$$

e $F(x_0) = f(x_0) = p_C(x_0) > 1$.

□

Corolário 2.3.3. Sejam L um elc e $C \subset L$ convexo e fechado com $0 \in C$. Se $x_0 \notin C$, então existe $F : L \to \mathbb{R}$ funcional linear contínuo com $F(C) \subset (-\infty, 1]$ e $F(x_0) > 1$.

Demonstração. Pela Proposição 2.1.9, existe $\mathcal{B}_0$ base de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos convexos e equilibrados. Sendo C fechado, segue que

$$x_0 \notin C = \bigcap_{W \in \mathcal{B}_0} (C + W).$$

Logo, existe $W \in \mathcal{B}_0$ com $x_0 \notin C + W$. Defina

$$C' = \overline{C + \frac{1}{2}W}.$$

Assim,

$$C' = \bigcap_{U \in \mathcal{B}_0} (C + \frac{1}{2}W + U).$$

Para $\frac{1}{2}W$, existe $V \in \mathcal{B}_0$ de modo que

$$V \subset \frac{1}{2}W \Rightarrow C + \frac{1}{2}W + V \subset C + \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W.$$

Daí,

$$C' \subset C + \frac{1}{2}W + V \subset C + \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W \subset C + W.$$

Como $0 \in \frac{1}{2}W \subset C'$, segue que $0 \in int(C')$. Note que

$$C = \bigcap_{W \in \mathcal{B}_0} (C + W) \subset C + V \subset C + \frac{1}{2}W \subset C'.$$

Além disso, C' é convexo e fechado. Mais ainda, $x_0 \notin C$, pois $C' \subset C + W$. Então, existe $F : L \to \mathbb{R}$ funcional linear contínuo com $F(C') \subset (-\infty, 1]$ e $F(x_0) > 1$. Portanto, $F(C) \subset (-\infty, 1]$ e $F(x_0) > 1$. □

Proposição 2.3.4. Sejam L um elc e $C_1, C_2 \subset L$ convexos e disjuntos tais que C_1 é fechado e C_2 é compacto. Então, existe um número real r_0 e um funcional linear contínuo $F : L \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) < r_0$ para todo $x \in C_1$, e $F(x) > r_0$ para todo $x \in C_2$.

Demonstração. Note que $C_1 - C_2$ é fechado e convexo. Verifiquemos que $C_1 - C_2$ é fechado. É claro que $-C_2$ é compacto. Então, todo filtro em $-C_2$ possui um ponto de acumulação. Logo, por 1.6.(c) vemos que $C_1 - C_2$ é fechado. Agora, mostraremos que $C_1 - C_2$ é convexo. Como $C_1 - C_2 = C_1 + (-C_2)$, por 2.3.(c) e 2.3.(d), segue que $C_1 - C_2$ é convexo. Escolha $y_0 \in C_1 - C_2$ e, então $0 \in C_1 - C_2 - y_0$. Perceba que $0 \notin C_1 - C_2$, pois $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Caso contrário existiriam $x \in C_1$ e $y \in C_2$ tais que $0 = x - y$, assim $x = y$, teríamos $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Portanto, $-y_0 \notin C_1 - C_2 - y_0$. Chame

$x_0 = -y_0$ e escolha um funcional linear contínuo $F : L \to \mathbb{R}$ satisfazendo $F(x_0) > 1$ e $F(C_1 - C_2 - y_0) \subset (-\infty, 1]$.

Dados $x \in C_1$ e $y \in C_2$, então

$$\begin{aligned} 1 \geq F(x - y - y_0) = F(x) - F(y) + F(x_0) &\Rightarrow 1 - F(x_0) \geq F(x) - F(y) \\ &\Rightarrow F(y) - \frac{1}{2}(F(x_0) - 1) \geq \frac{1}{2}(F(x_0) - 1) + F(x). \end{aligned}$$

Como C_2 é compacto, existe $r_0 = \min_{y \in C_2} F(y) - \dfrac{1}{2}(F(x_0) - 1)$. Seja $\delta = \frac{1}{2}(F(x_0) - 1) > 0$. Logo,

$$F(y) - \delta \geq r_0 \Rightarrow F(y) \geq r_0 + \delta$$

e

$$r_0 \geq \delta + F(x) \Rightarrow r_0 - \delta \geq F(x).$$

Portanto, $F(y) \geq r_0 + \delta$, para todo $y \in C_2$ e $r_0 - \delta \geq F(x)$, para todo $x \in C_1$. □

Definição 2.3.2. Seja L um elc sobre $\mathbb{R}$. O espaço **dual** de L, denotado por L', é o espaço dos funcionais lineares contínuos $f : L \to \mathbb{R}$.

Proposição 2.3.5. Sejam L um elc e N um subespaço de L. Então qualquer $f \in N'$ pode ser estendida para $F \in L'$.

Demonstração. Note que $0 \in f^{-1}((-\infty, 1)) = \{x \in N : f(x) < 1\}$ é vizinhança da origem, pois $f \in N'$. Como L é elc, existe C vizinhança equilibrada e convexa da origem em L tal que $C \cap N \subset \{x \in N : f(x) < 1\}$. Considere p_C o funcional de Minkowski. Se $x \in C \cap N$, então $f(x) \leq 1$. Pela Proposição 2.2.5, segue que $f(x) \leq p_C(x)$, para todo $x \in N$. Como $0 \in int(C)$, p_C é contínua. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $F \in L'$ tal que $F(x) \leq p_C(x)$, para todo $x \in L$ e $F|_N \equiv f$. □

Corolário 2.3.6. Suponha que L é um elc Hausdorff. Então L' **separa pontos** de L, ou seja, se $x \neq y$, então existe $f \in L'$ com $f(x) \neq f(y)$.

Demonstração. Faça $N = span\{x, y\}$ e seja $g \in N' \backslash \{0\}$. Pela proposição anterior, existe $f \in L'$ tal que $f|_N \equiv g$. Agora, falta mostrar que $f(x) \neq f(y)$. Sendo f contínua, existe U vizinhança de x em L tal que $f(U) \subset (f(x) - 1, f(x) + 1)$. Sendo L Hausdorff, existem V_1, V_2 vizinhanças de x, y em L, respectivamente, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Assim, $Z = U \cap V_1$ é vizinhança de x em L. Além disso

(a) $y \notin Z$;

(b) $f(Z) \subset F(U) \subset (f(x) - 1, f(x) + 1)$.

Portanto, $f(y) \notin (f(x) - 1, f(x) + 1)$. Logo, $f(x) \neq f(y)$. □

2.4 Polar

Definição 2.4.1. Seja L um elc. Se $B \subset L$, então o **polar** de B, denotado por B°, é o conjunto

$$\{f \in L' : |f(x)| \leq 1, \forall x \in B\}.$$

Se $A \subset L'$, então o **polar** de A em X, denotado por $A_\circ$, é o conjunto

$$\{x \in L : |f(x)| \leq 1, \forall f \in A\}.$$

Proposição 2.4.1. Sejam L um elc, $A, B \subset L$ e $D, E \subset L'$. Então:

(a1) $A \subset (A^\circ)_\circ$;

(a2) $D \subset (D_\circ)^\circ$;

(b1) $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$;

(b2) $D \subset E \Rightarrow E_\circ \subset D_\circ$;

(c1) $(A \cup B)^\circ = (A)^\circ \cap (B)^\circ$;

(c2) $(D \cup E)_\circ = (D)_\circ \cap (E)_\circ$;

(d1) Se $c \neq 0$, então $(cA)^\circ = c^{-1}(A)^\circ$;

(d2) Se $c \neq 0$, então $(cD)_\circ = c^{-1}(D)_\circ$;

(e) $A \subset D_\circ \Rightarrow D \subset A^\circ$;

(f) $D_\circ$ é fechado, convexo, equilibrado e não vazio.

Demonstração. (a1)

Sejam $x \in A$ e $f \in A^\circ$. Então, $|f(x)| \leq 1$. Logo, $x \in (A^\circ)_\circ$.

(a2)

Sejam $f \in D$ e $x \in D_\circ$. Então, $|f(x)| \leq 1$. Logo, $f \in (D_\circ)^\circ$.

(b1)

Seja $f \in B^\circ$. Então, $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in B$. Em particular, para $x \in A$. Logo, $f \in A^\circ$.

(b2)

Seja $x \in E_\circ$. Então, $|f(x)| \leq 1$, para todo $f \in E$. Em particular, para $f \in D$. Logo, $x \in D_\circ$.

(c1)

Se $f \in (A \cup B)^\circ$, então $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in A \cup B$. Como $A, B \subset A \cup B$, segue que

(s1) $|f(x)| \leq 1, \forall x \in A$;

(s2) $|f(x)| \leq 1, \forall x \in B$.

Por (s1) e (s2), vemos que $f \in A^\circ \cap B^\circ$. Agora, se $f \in A^\circ \cap B^\circ$, então $f \in A^\circ$ e $f \in B^\circ$. Assim, (s3) $|f(x)| \leq 1, \forall x \in A$;

(s4) $|f(x)| \leq 1, \forall x \in B$.

Logo, $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in A \cup B$. Portanto, $f \in (A \cup B)^{\circ}$.

(c2)

$$\begin{aligned} x \in (D \cup E)_{\circ} &\Leftrightarrow |f(x)| \leq 1, \forall f \in D \cup E \\ &\Leftrightarrow |f(x)| \leq 1, \forall f \in D \text{ ou } f \in E \\ &\Leftrightarrow x \in D_{\circ} \cap E_{\circ}. \end{aligned}$$

(d1)

$$\begin{aligned} f \in (cA)^{\circ} &\Leftrightarrow |f(cx)| \leq 1, \forall x \in A \\ &\Leftrightarrow |cf(x)| \leq 1, \forall x \in A \\ &\Leftrightarrow cf \in A^{\circ} \\ &\Leftrightarrow f \in c^{-1}A^{\circ}. \end{aligned}$$

(d2)

$$\begin{aligned} x \in (cD)_{\circ} &\Leftrightarrow |cf(x)| \leq 1, \forall f \in D \\ &\Leftrightarrow |f(cx)| \leq 1, \forall f \in D \\ &\Leftrightarrow cx \in D_{\circ} \\ &\Leftrightarrow x \in c^{-1}D_{\circ}. \end{aligned}$$

(e)

Seja $f \in D$. Como $A \subset D_{\circ}$, segue que $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in A$. Assim, $f \in A^{\circ}$.

(f)

Note que

$$D_{\circ} = \bigcap_{f \in D} \{x \in L : |f(x)| \leq 1\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} x \in D_{\circ} &\Leftrightarrow |f(x)| \leq 1, \forall f \in D \\ &\Leftrightarrow x \in \{y \in L : |f(y)| \leq 1\}, \forall f \in D \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{f \in D} \{y \in L : |f(y)| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Sendo $f \in L'$, segue que $\{x \in L : |f(x)| \leq 1\}$ é fechado. Logo, $D_{\circ}$ é fechado. Vejamos que $D_\circ$ é convexo. Dados $x, y \in D_\circ$ e $t \in (0,1)$, então

$$|f(tx + (1-t)y)| \leq t|f(x)| + (1-t)|f(y)| \leq t + (1-t) = 1$$

quando $f \in D$. Portanto, $(x, y) \subset D_\circ$. Finalmente, mostraremos que $D_\circ$ é equilibrado. Sejam $x \in D_\circ$ e $|t| \leq 1$. Então,

$$|f(tx)| = |tf(x)| = |t| \cdot |f(x)| \leq 1$$

para todo $f \in D$. Como $f(0) = 0$, para todo $f \in L'$, segue que $0 \in D_\circ$. $\square$

Definição 2.4.2. Seja L um espaço vetorial. Se $A, B \subset L$ com B não vazio e equilibrado. Dizemos que B absorve A se $A \subset cB$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4.2 (Bipolar)**.** *Sejam L um elc, $A, B \subset L$ e $D \subset L'$. Suponha que B é fechado, convexo, equilibrado e não vazio. Então:*

(a) $(B^\circ)_\circ = B$;

(b) $(A^\circ)_\circ$ é o menor fechado, convexo, equilibrado e não vazio contendo A;

(c) B absorve A se, e somente se, B absorve $(A^\circ)_\circ$;

(d) Se A é limitado, então $(A^\circ)_\circ$ é limitado;

(e) $D_\circ$ absorve A se, e somente se, A° absorve D;

(f) B absorve A se, e somente se, A° absorve B°;

(g) $((A^\circ)_\circ)^\circ = A^\circ$ e $((D_\circ)^\circ)_\circ = D_\circ$.

Demonstração. (a)

Se $x_0 \notin B$, existe $f \in L'$ com $f(B) \subset (-\infty, 1]$ e $f(x_0) > 1$. Como $f(-B) = -f(B)$, segue que $f(-B) \subset -(-\infty, 1] = [-1, \infty)$. Sendo B equilibrado, vemos que $-B \subset B$. Além disso,

$$B = -(-B) \subset -B.$$

Logo, $B = -B$. Daí, $f(B) \subset [-1, \infty) \cap (-\infty, 1] = [-1, 1]$. Assim, $f \in B^\circ$ e $x_0 \notin (B^\circ)_\circ$. Portanto, $(B^\circ)_\circ \subset B$. Pela Proposição 2.4.1 item (a1), segue que $B \subset (B^\circ)_\circ$.

(b)

Se C é fechado, convexo, equilibrado e não vazio contendo A, então $C^\circ \subset A^\circ$. Daí, $(A^\circ)_\circ \subset (C^\circ)_\circ = C$.

(c)

Suponha que B absorve A, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $A \subset cB$. Assim, $(cB)^\circ \subset A^\circ$. Daí, $c^{-1}(B)^\circ \subset A^\circ$. Logo, $(A^\circ)_\circ \subset (c^{-1}(B^\circ))_\circ = c(B^\circ)_\circ = cB$. Agora, se B absorve $(A^\circ)_\circ$, isto é, existe $d \in \mathbb{R}$ com $(A^\circ)_\circ \subset dB$, pelo item (a), segue que $A \subset dB$.

(d)

Dada uma vizinhança U da origem em L, existe V vizinhança equilibrada, convexa e fechada da origem em L com $V \subset U$. Para V existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $A \subset cV$. Daí, $(cV)^\circ \subset A^\circ$. Assim, $(A^\circ)_\circ \subset ((cV)^\circ)_\circ$. Como cV é fechado, convexo, equilibrado e não vazio, segue que $(A^\circ)_\circ \subset cV \subset cU$.

(e)

Suponha que $D_\circ$ absorve A, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ com $A \subset cD_\circ$. Assim,

$$c^{-1}(D_\circ)^\circ = (cD_\circ)^\circ \subset A^\circ \Rightarrow c^{-1}D \subset A^\circ \Rightarrow D \subset c(A)^\circ.$$

Reciprocamente, suponha que A° absorve D, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $D \subset c(A)^\circ$. Daí,

$$c^{-1}(A^\circ)_\circ = (cA^\circ)_\circ \subset D_\circ \Rightarrow c^{-1}A \subset D_\circ \Rightarrow A \subset c(D)_\circ.$$

(f)

Se B absorve A, então existe $c \in \mathbb{R}$ com $A \subset cB$. Daí,

$$c^{-1}(B)^\circ = (cB)^\circ \subset A^\circ \Rightarrow B^\circ \subset c(A)^\circ.$$

Se A° absorve B°, então existe $d \in \mathbb{R}$ com $B^\circ \subset d(A)^\circ$. Daí,

$$d^{-1}(A^\circ)_\circ \subset (B^\circ)_\circ \Rightarrow (A^\circ)_\circ \subset d(B^\circ)_\circ$$

Pela Proposição 2.4.1(a1) e por (a), temos

$$A \subset dB.$$

(g)

Sendo $A \subset (A^\circ)_\circ$, segue que $((A^\circ)_\circ)^\circ \subset A^\circ$. Chame $D = A^\circ$. Assim, $D \subset (D_\circ)^\circ$, e portanto $A^\circ \subset ((A^\circ)_\circ)^\circ$.

Sendo $D \subset (D_\circ)^\circ$, segue que $((D_\circ)^\circ)_\circ \subset D_\circ$. Chame $A = D_\circ$. Assim, $A \subset (A^\circ)_\circ$, e consequentemente $D_\circ \subset ((D_\circ)^\circ)_\circ$.

$\square$

Lema 2.4.3. Suponha que L é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e C, D são subconjuntos convexos de L. Então

$$E = \{tx + (1-t)y : x \in C, y \in D, t \in [0,1]\}$$

é convexo.

Demonstração. Sejam $t, t' \in [0,1]$, $x, x' \in C$, $y, y' \in D$. Fixe $s \in (0,1)$. Se $st + (1 -$

$s)t' = 0$, então $t' = -\frac{s}{1-s}t$. Como $t, t' \geq 0$, segue que $t = t' = 0$ e

$$s(tx+(1-t)y)+(1-s)(t'x'+(1-t')y') = sy+(1-s)y' = 0x+(1-0)(sy+(1-s)y') \in E.$$

Se $s(1-t)+(1-s)(1-t') = 0$, então $1 = t = t'$ e

$$s(tx+(1-t)y)+(1-s)(t'x'+(1-t')y') = sx+(1-s)x' = 1\cdot(sx+(1-s)x')+(1-1)y' \in E.$$

Se $st+(1-s)t' > 0$ e $s(1-t)+(1-s)(1-t') > 0$, então

$$\begin{aligned} & s(tx+(1-t)y)+(1-s)(t'x'+(1-t')y') \\ =& stx+(1-s)t'x'+s(1-t)y+(1-s)(1-t')y' \\ =& (st+(1-s)t')(\frac{st}{st+(1-s)t'}x+\frac{(1-s)t'}{st+(1-s)t'}x') \\ & + (s(1-t)+(1-s)t')(\frac{s(1-t)}{s(1-t)+(1-s)t'}y+\frac{(1-s)(1-t')}{s(1-t)+(1-s)t'}y'). \end{aligned}$$

Como $x'' = \frac{st}{st+(1-s)t'}x + \frac{(1-s)t'}{st+(1-s)t'}x' \in C$ e $y'' = \frac{s(1-t)}{s(1-t)+(1-s)t'}y + \frac{(1-s)(1-t')}{s(1-t)+(1-s)t'}y' \in D$, segue que

$$s(tx+(1-t)y)+(1-s)(t'x'+(1-t')y') = (st+(1-s)t')x''+(s(1-t)+(1-s)(1-t')y'' \in E,$$

pois $st+(1-s)t'+s(1-t)+(1-s)(1-t') = s(t+1-t)+(1-s)(t'+1-t') = s+(1-s) = 1$. □

Proposição 2.4.4. Sejam L um elc Hausdorff e K um subconjunto compacto e convexo de L. Então, $(K^\circ)_\circ$ é compacto.

Demonstração. Se $K = \emptyset$, então $(K^\circ)_\circ = \{0\}$. De fato, $\{0\}$ é o menor fechado, convexo, equilibrado e não vazio contendo $\emptyset$. Agora suponha que $K \neq \emptyset$. Considere

$$E = \{tx+(1-t)y : x \in K, y \in -K, t \in [0,1]\}.$$

Defina $\phi : L \times L \times [0,1] \to L$, por $\phi(u,v,r) = ru+(1-r)v = \oplus(\odot(r,u), \odot((1-r),v))$. Assim, ϕ é contínua. Como $K \times (-K) \times [0,1]$ é compacto e $\phi(k \times (-K) \times [0,1]) = E$, segue que E é compacto. Sendo L Hausdorff, segue que E é fechado.

Pelo Lema 2.4.3, vemos que E é convexo. Note que $0 \in E$. Como K é não vazio, existe $x \in K$ e $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in E$. Verifiquemos que E é equilibrado. De fato, se $0 \leq s \leq 1$ e $z \in E$, então $sz = sz + (1-s)0 \in E$, pois E é convexo. Se $z \in E$, então $-z \in E$. Com efeito, z é da forma $tx + (1-t)y$. Daí, $-z = (1-t)(-y) + t(-x)$. Chame $r = 1-t$ e por isso $-z = r(-y) + (1-r)(-x) \in E$. Agora, se $-1 \leq s \leq 0$ e

$z \in E$, então $sz = -s(-z) \in E$. Logo, E é fechado, convexo, equilibrado e não vazio contendo K. Pelo Teorema 2.4.2(b),

$$(K^{\circ})_{\circ} \subset E.$$

Por isso, $(K^{\circ})_{\circ}$ é compacto. □

2.5 Topologias Associadas

Sejam X um conjunto não vazio, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $(\varphi_i)_{i\in I}$ uma família de funções tais que para cada i, $\varphi_i : X \to Y_i$. Vamos construir uma topologia em X que torna cada φ_i uma função contínua.

Para cada aberto A_i em Y_i, considere o conjunto

$$\varphi_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : \varphi_i(x) \in A_i\}.$$

Chame $\mathcal{B}$ a coleção dos subconjuntos de X que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos da forma $\varphi_i^{-1}(A_i)$. Afirmamos que $\mathcal{B}$ é base para uma topologia. De fato, dado $x \in X$ e como Y_i é aberto, segue que $x \in \varphi_i^{-1}(Y_i) \in \mathcal{B}$. Se $\bigcap_{i\in I_1} \varphi_i^{-1}(A_i), \bigcap_{i\in I_2} \varphi_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}$, então

$$(\bigcap_{i\in I_1} \varphi_i^{-1}(A_i)) \cap (\bigcap_{i\in I_2} \varphi_i^{-1}(B_i)) = \bigcap_{i\in I_3} \varphi_i^{-1}(C_i) \in \mathcal{B}$$

onde $C_i = A_i$, se $i \in I_1$, $C_i = B_i$, se $i \in I_2$ e $I_3 = I_1 \cup I_2$. Logo,

$$\tau = \{U \subset X : \text{ para cada } x \in U, \text{ existe } V \in \mathcal{B} \text{ com } x \in V \subset U\}$$

é uma topologia, chamada **topologia gerada pela família de funções** $(\varphi_i)_{i\in I}$.

Vejamos que cada φ_i é contínua. Dado A_i aberto em Y_i, então $\varphi_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}$. Logo, $\varphi_i^{-1}(A_i) \in \tau$.

Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \to (X, \tau)$. Então f é contínua se, e somente se, $\varphi_i \circ f$ é contínua, para todo $i \in I$. Suponha inicialmente que f é contínua. Como cada φ_i é contínua, segue que $\varphi_i \circ f$ é contínua.

Reciprocamente, suponhamos que cada $\varphi_i \circ f$ é contínua. Dado A aberto em X, segue que $A = \cup_{x\in A} V_x$, onde $V_x \in \mathcal{B}$. Assim, $f^{-1}(A) = \cup_{x\in A} f^{-1}(V_x)$. Como cada $V_x \in \mathcal{B}$, segue que $V_x = \cap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(B_i)$. Logo,

$$f^{-1}(A) = \cup_{x\in A} \cap_{i=1}^{n} f^{-1}(\varphi_i^{-1}(B_i)) = \cup_{x\in A} \cap_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ f)^{-1}(B_i)$$

é aberto em Z. Portanto, f é contínua.

Proposição 2.5.1. Suponha que X é um conjunto não vazio, $(Y_i)_{i\in I}$ é uma família de espaços topológicos e $(\varphi_i)_{i\in I}$ é uma família de funções de X em Y_i. Então

(a) Existe τ uma topologia em X, que torna cada φ_i contínua;

(b) Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \to (X, \tau)$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $\varphi_i \circ f$ é contínua, para cada i.

Suponhamos que L é um elc e $A \subset L$. Afirmamos que A° é convexo. De fato, dados $f, g \in A^\circ$, se $x \in A$ e $t \in (0,1)$, então

$$|tf(x) + (1-t)g(x)| \leq |tf(x)| + (1-t)|g(x)| \leq t + (1-t) = 1.$$

Verifiquemos que A° é equilibrado. De fato, dados $|t| \leq 1$ e $f \in A^\circ$. Se $x \in A$, então

$$|tf(x)| = |t| \cdot |f(x)| \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Agora, suponhamos que A é limitado em L. Se $f \in L'$, então $f(A)$ é limitado. Com efeito, para $[-1,1]$, existe $c > 0$ com $f(x) \in c[-1,1]$, para todo $x \in A$, ou seja, $|f(x)| \leq c$, para todo $x \in A$. Se $|t| \geq c$, então

$$|f(x)| \leq |t| \Rightarrow |t^{-1}f(x)| \leq 1$$

quando $x \in A$. Daí,

$$t^{-1}f \in A^\circ \Rightarrow f \in t(A)^\circ$$

sempre que $|t| \geq c$. Portanto, A° é absorvente.

Lema 2.5.2. Suponha que L é um evt. Se L possui uma base de vizinhanças convexas da origem, então L é um elc.

Demonstração. Chame de $\mathcal{B}_0$ a base de vizinhanças convexas da origem. Para cada $x \in L$, $\{x + V : v \in \mathcal{B}_0\}$ é base de vizinhanças de x. Ademais, como V é convexo, segue $x + V$ é convexo. □

Considere

$$\mathcal{B}_S = \{A^\circ : A \text{ é limitado em } L\}.$$

Vejamos que $\mathcal{B}_S$ é base de filtro. Como $\{0\}$ é limitado em L, temos $\{0\}^\circ \in \mathcal{B}_S$. Além disso, $|0(x)| = 0 < 1$, para todo $x \in L$. Portanto $0 \in A^\circ$, para todo $A \subset L$. Se $A^\circ, B^\circ \in \mathcal{B}_S$, então

$$A^\circ \cap B^\circ = (A \cup B)^\circ \in \mathcal{B}_S.$$

Verifiquemos que $\frac{1}{2}A^\circ \in \mathcal{B}_S$, quando A é limitado. De fato, $\frac{1}{2}A^\circ = (2A)^\circ$. Sendo A limitado, segue que $2A$ é limitado. Logo, $\frac{1}{2}A^\circ \in \mathcal{B}_S$. Agora, mostraremos que $\frac{1}{2}A^\circ + \frac{1}{2}A^\circ \subset A^\circ$. Com efeito, dados $f, g \in A^\circ$, temos

$$|\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|g(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

quando $x \in A$. Já foi provado que A° é absorvente e equilibrado. Portanto, existe τ_S uma topologia em L' que o torna evt. Chamaremos τ_S de **topologia forte** e $\mathcal{B}_S$ é a base de vizinhanças da origem. Como A° é convexo, pelo lema anterior L' é um elc. Note que L' é Hausdorff. De fato, se $f \neq 0$, então $f(L) = \mathbb{R}$. Logo, $2 \in f(L)$, ou seja, existe $x \in L$ com $f(x) = 2$. Portanto, $f \notin \{x\}^\circ$. Por isso,

$$\bigcap_{A \text{ limitado em } L} (A)^\circ = \{0\}.$$

Definição 2.5.1. Seja L um elc. Chamaremos de **topologia fraca** em L, denotada por $\sigma(L, L')$, a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $f \in L'$.

Proposição 2.5.3. Seja L um elc. Então:

(a) Os funcionais lineares são fracamente contínuos, isto é, para todo $f \in L'$ segue que $f : (L, \sigma(L, L')) \to \mathbb{R}$ é contínua;

(b) O conjunto $\mathcal{B}_W = \{D_0 : D$ é um subconjunto finito de $L'\}$ é base de vizinhanças da origem para a topologia fraca;

(c) A topologia fraca $\sigma(L, L')$ é Hausdorff;

(d) $(L, \sigma(L, L'))$ é um elc.

Demonstração. (a)

Segue da construção feita acima.

(b)

Note que $0 \in int(D_0)$. De fato, como $(-1, 1)$ é aberto em $\mathbb{R}$, segue que $f(0) \in f^{-1}((-1, 1))$, para todo $f \in L'$. Logo, $0 \in \bigcap_{f \in D} f^{-1}((-1, 1)) \subset D_\circ$. Portanto, $0 \in int(D_\circ)$. Seja U vizinhança da origem em L. Então, existem um conjunto finito I_1, funcionais $f_j \in L'$ e abertos V_j em $\mathbb{R}$ contendo 0, para $j \in I_1$, tais que $\bigcap_{i \in I_1} f_i^{-1}(V_i) \subset U$. Para cada $j \in I_1$, existe $\delta_j > 0$ com

$$f_j^{-1}([-\delta_j, \delta_j]) \subset f_j^{-1}(V_j).$$

Faça $\delta = min_{j \in I_1}\{\delta_j\} > 0$. Então,

$$f_j^{-1}([-\delta, \delta]) \subset f_j^{-1}(V_j)$$

para todo $j \in I_1$. Considere $D = \{\delta^{-1} f_j : j \in I_1\}$, então

$$\begin{aligned} x \in D_\circ &\Leftrightarrow |\delta^{-1} f_j(x)| \leq 1, \forall j \in I_1 \\ &\Leftrightarrow |f_j(x)| \leq \delta, \forall j \in I_1 \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I_1} f_i^{-1}([-\delta, \delta]) \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I_1} f_i^{-1}(V_j). \end{aligned}$$

Portanto, $D_0 \subset U$. Se D, E são subconjuntos finitos de L', então

$$(D)_\circ \cap (E)_\circ = (D \cup E)_\circ \in \mathcal{B}_W.$$

(c)

Dados $x \neq y$, existe $f \in L'$ com $f(x) \neq f(y)$. Sem perda de generalidade, suponha que $f(x) < f(y)$. Chame $m = \frac{f(x)+f(y)}{2} > 0$. Daí, $x \in f^{-1}((-\infty, m))$ e $y \in f^{-1}((m, \infty))$. Se $z \in f^{-1}((-\infty, m)) \cap f^{-1}((m, \infty))$, então $f(z) < m$ e $m < f(z)$ e por isso, $m < m$. Portanto, $f^{-1}((-\infty, m)) \cap f^{-1}((m, \infty)) = \emptyset$.

(d)

Inicialmente, mostraremos que $(L, \sigma(L, L'))$ é um evt. Seja $T(x) = x + x_0$ uma translação em L. Verifiquemos que T é contínua. De fato, dado $f \in L'$, $f(T(x)) = f(x + x_0) = f(x) + f(x_0)$ é contínua. De maneira análoga, vemos que $T^{-1}(x) = x - x_0$ é contínua.

Seja D finito em L'. Então, $\frac{1}{2}D_\circ = (2D)_\circ$ e como $2D$ é finito em L', segue que $\frac{1}{2}D_\circ \in \mathcal{B}_W$, para todo D finito em L'. Vejamos que $\frac{1}{2}D_\circ + \frac{1}{2}D_\circ \subset D_\circ$. Com efeito, dados $x, y \in D_\circ$, se $f \in D$, então

$$|f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)| = |\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|f(y)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Supondo ainda que D é finito, vamos mostrar que $D_\circ$ é absorvente. Dado $x \in X$, chame $c = max_{f \in D}\{|f(x)|\} \geq 0$. Se $c = 0$, então $f \equiv 0$. Logo, $|0(x)| = 0 < 1$. Portanto, $x \in tD_\circ$, se $|t| \leq 1$. Agora, se $c > 0$ considere $|t| \geq c$, então

$$|f(x)| \leq |t| \Rightarrow |f(t^{-1}x)| = |t^{-1}f(x)| \leq 1.$$

Por isso, $t^{-1}x \in D_\circ$, donde, $x \in t(D)_\circ$, quando $|t| \geq c$. Na Proposição 2.4.1, mostramos que $D_\circ$ é equilibrado e convexo. Portanto, $(L, \sigma(L, L'))$ é um elc. $\square$

Vamos verificar que $(L, \sigma(L, L'))' \subset L'$. De fato, se $f \in (L, \sigma(L, L'))'$, então f é fracamente contínuo, ou seja, $f : (L, \sigma(L, L')) \to \mathbb{R}$ é contínuo. Como

$$D_\circ = \bigcap_{g \in D} g^{-1}([-1, 1]).$$

Se D for finito em L', então

$$D_\circ = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}([-1, 1]).$$

Logo, $D_\circ$ é vizinhança da topologia original de L. Portanto, **toda vizinhança fraca é vizinhança na topologia original**. Como f é contínua na topologia fraca, dado A vizinhança da origem em $\mathbb{R}$, temos que $f^{-1}(A)$ é vizinhança fraca e por isso é vizinhança na topologia original. Logo, $f \in L'$.

Vejamos que $L' \subset (L, \sigma(L, L'))'$. Dados $f \in L'$ e $\delta > 0$, $f^{-1}([-\delta, \delta])$ é vizinhança da origem em L. Como

$$f^{-1}([-\delta, \delta]) = \{x \in L : |f(x)| \leq \delta\} = \{x \in L : |\delta^{-1} f(x)| \leq 1\} = \{\delta^{-1} f\}_\circ \in \mathcal{B}_W,$$

segue que $f \in (L, \sigma(L, L'))'$.

Teorema 2.5.4. *Suponha que L é um elc e C é um subconjunto fechado e convexo de L. Então C é fracamente fechado.*

Demonstração. Se $x \notin C$, existem $r_0 > 0$ e $f \in L'$ tais que $f(x) < r_0$, para todo $x \in C$ e $f(x_0) > r_0$. Assim, $x_0 \in f^{-1}((r_0, \infty))$ e $C \cap f^{-1}((r_0, \infty)) = \emptyset$. Logo, $L \backslash C$ é fracamente aberto e por isso C é fracamente fechado. □

Definição 2.5.2. Seja L um elc. A **topologia fraca estrela** em L', denotada por $\sigma(L', L)$, é a topologia gerada pela coleção de funções $(\varphi_x)_{x \in L}$, onde $\varphi_x : L' \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_x(f) = f(x)$.

Proposição 2.5.5. Seja L um elc. Então

(a) Para cada $x \in L$, a função $\varphi_x : (L', \sigma(L', L)) \to \mathbb{R}$ é contínua;

(b) O conjunto $\mathcal{B}_{W^*} = \{A^\circ : A \text{ é finita em } L\}$ é base de vizinhanças da origem para a topologia fraca estrela;

(c) A topologia $\sigma(L', L)$ é Hausdorff;

(d) $(L', \sigma(L', L))$ é um elc.

Demonstração. (a) Resultado fornecido na construção da topologia.

(b) Note que $0 \in int(A^\circ)$. De fato, como $(-1, 1)$ é aberto em $\mathbb{R}$ e $\varphi_x(0) = 0(x) =$

$0 \in (-1,1)$, segue que $0 \in \varphi_x^{-1}((-1,1))$. Logo,

$$0 \in \bigcap_{x \in A} \varphi_x^{-1}((-1,1)) \subset A^0$$

para todo A finito em L.

Sejam A, B finitos em L. Então $A \cup B$ é finito em L. Assim,

$$(A)^\circ \cap (B)^\circ = (A \cup B)^\circ \in \mathcal{B}_{W^*}.$$

Seja U vizinhança da origem $(L', \sigma(L', L))$. Então existem $x_1, \ldots, x_n \in L$, $\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_n}$ e abertos $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ com

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^{-1}(A_i) \subset U.$$

Para cada i, existe $\delta_i > 0$ tal que $[-\delta_i, \delta_i] \subset A_i$. Faça $\delta = min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Assim,

$$\varphi_{x_i}^{-1}([-\delta, \delta]) \subset \varphi_{x_i}^{-1}(A_i)$$

para todo i. Considere $A = \{\delta^{-1}x_1, \ldots, \delta^{-1}x_n\}$. Assim,

$$\begin{aligned} f \in A^\circ &\Leftrightarrow |f(\delta^{-1}x_i)| \leq 1, \forall i \\ &\Leftrightarrow |\varphi_{x_i}^{-1}(f)| = |f(x_i)| \leq \delta, \forall i \\ &\Leftrightarrow f \in \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^{-1}([-\delta, \delta]) \\ &\Rightarrow f \in \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

Portanto, $A^\circ \subset U$.

(c)

Se $f \neq 0$, então $f(L) = \mathbb{R}$. Assim, $2 \in f(L)$, ou seja, existe $x \in L$ com $f(x) = 2$. Logo, $f \notin \{x\}^\circ$. Portanto,

$$\bigcap_{A \text{ finito em } L} A^\circ = \{0\}.$$

(d)

Se A é finito em L, então $2A$ é finito. Assim,

$$\frac{1}{2}A^\circ = (2A)^\circ \in \mathcal{B}_{W^*}.$$

Vejamos que

$$\frac{1}{2}A^\circ + \frac{1}{2}A^\circ \subset A^\circ.$$

De fato, dados $f, g \in A^\circ$, temos

$$|\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|g(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

quando $x \in A$. Se A é finito, então A é limitado. Logo, A° é absorvente. Já provamos que A° é convexo e equilibrado. Agora, mostraremos que $T : L' \to L'$ definido por $T(f) = f + f_0$ é contínuo em $\sigma(L', L)$. Com efeito,

$$\varphi_x(T(f)) = \varphi_x(f + f_0) = (f + f_0)(x)$$

e como $f + f_0 \in L'$, segue que $\varphi_x(T(f))$ é contínua. De maneira análoga, vemos que $T^{-1}(f) = f - f_0$ é contínua em $\sigma(L', L)$. Portanto, $(L', \sigma(L', L))$ é um elc. $\square$

Suponhamos que L é um elc. Defina

$$Y = \prod_{x \in L} \mathbb{R}$$

e a aplicação projeção $P_x : Y \to \mathbb{R}$ por $P_x(w) = w_x$, onde $w = (w_x)_{x \in L}$. Munindo Y com a topologia produto, P_x é contínua. Vejamos que

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & (L', \sigma(L', L)) & \longrightarrow & Y \\ & f & \longmapsto & (f(x))_{x \in L} \end{array}$$

é um isomorfismo topológico sobre a sua imagem. Para verificar que Ψ é continua, vemos que

$$P_x(\Psi(f)) = P_x((f(x))_{x \in L}) = f(x) = \varphi_x(f)$$

é contínua. Dados $f, g \in L'$ e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\Psi(f + cg) = (f(x) + cg(x))_{x \in L} = (f(x))_{x \in L} + c(g(x))_{x \in L} = \Psi(f) + c\Psi(g)$$

é linear. Suponha que $\Psi(f) = \Psi(g)$. Assim,

$$(f(x))_{x \in L} = (g(x))_{x \in L} \Rightarrow f(x) = g(x), \forall x \in L.$$

Logo, Ψ é injetiva, e portanto $\Psi : (L', \sigma(L', L)) \to \Psi(L')$ é bijeção. Vejamos que Ψ^{-1} é contínua. Dado $w \in \Psi(L')$, existe $f \in L'$ com $w = (f(x))_{x \in L}$. Assim,

$$\varphi_x(\Psi^{-1}(w)) = \varphi_x(\Psi^{-1}((f(x))_{x \in L})) = \varphi_x(f)$$

é contínua. Portanto Ψ é um isomorfismo topológico sobre a sua imagem.

Teorema 2.5.6 (Banach-Alaoglu). *Suponha que L é um elc e U é vizinhança da origem em L. Então U° é compacto na topologia fraca estrela.*

Demonstração. Seja C uma vizinhança fechada, convexa e equilibrada da origem contida em U. Considere p_C o funcional de Minkowski. Como $0 \in int(C)$ e C é equilibrado, segue que p_C é uma seminorma contínua. Note que, para todo $x \in L$ e todo $\varepsilon > 0$, temos

$$p_C(x) + \varepsilon \in I_x \Rightarrow x \in (p_C(x) + \varepsilon)C \subset (p_C(x) + \varepsilon)U \Rightarrow \frac{1}{p_C(x) + \varepsilon} x \in U.$$

Agora, se $g \in U^\circ$, então

$$|g(\frac{1}{p_C(x) + \varepsilon} x)| \leq 1 \Rightarrow |g(x)| \leq p_C(x) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, segue que

$$|g(x)| \leq p_C(x), \forall g \in U^\circ.$$

Note que

$$\begin{aligned} f \in U^\circ &\Leftrightarrow |f(x)| \leq 1, \forall x \in U \\ &\Leftrightarrow |\varphi_x(f)| \leq 1, \forall x \in U \\ &\Leftrightarrow f \in \varphi_x^{-1}([-1,1]), \forall x \in U \\ &\Leftrightarrow f \in \bigcap_{x \in U} \varphi_x^{-1}([-1,1]). \end{aligned}$$

Logo, U° é fechado na topologia fraca estrela. Sendo $\Psi : (L', \sigma(L', L)) \to \Psi(L')$ um homeomorfismo, $(U^\circ, \sigma(L', L))$ é homeomorfo a $\Psi(U^\circ)$ na topologia produto. Ademais, se $w \in \Psi(U^\circ)$, existe $f \in U^\circ$ com $w = (f(x))_{x \in L}$. Assim, para cada $x \in L$, temos

$$|P_x(w)| = |P_x((f(x))_{x \in L})| = |f(x)| \leq p_C(x).$$

Portanto, $\Psi(U^\circ) \subset \prod_{x \in L} \{c \in \mathbb{R} : |c| \leq p_C(x)\}$. Como $\prod_{x \in L} \{c \in \mathbb{R} : |c| \leq p_C(x)\}$ é compacto e $\Psi(U^\circ)$ é fechado, segue que $\Psi(U^\circ)$ é compacto na topologia produto. Logo, U° é compacto na topologia fraca estrela.

□

Suponha que L, M, são dois espaços localmente convexos. Denotamos o conjunto das transformações lineares contínuas de L em M, por $\mathcal{L}_c(L, M)$.

Sejam A limitado em L e U vizinhança convexa e equilibrada da origem em M.

Defina
$$N(A,U) = \{T \in \mathcal{L}_c(L,M) : T(A) \subset U\}.$$
Note que $0(A) = \{0\} \subset U$. Donde, $0 \in N(A,U)$. Sejam A, B limitados em L e U, V vizinhanças convexas e equilibradas da origem em M. Então

$$T \in N(A \cup B, U \cap V) \Rightarrow T(A \cup B) \subset U \cap V.$$

Assim,
$$T(A) \subset T(A \cup B) \subset U \cap V \subset U \Rightarrow T \in N(A,U).$$
De maneira análoga, vemos que $T \in N(B,V)$. Logo, $N(A \cup B, U \cap V) \subset N(A,U) \cap N(B,V)$.

Vejamos que $N(A,U)$ é absorvente. Dado $T \in \mathcal{L}_c(L,M)$, como A é limitado e U é vizinhança da origem em M, segue que existe $c > 0$ com $T(A) \subset cU$. Se $|t| \geq c$, então

$$T(A) \subset tU \Rightarrow t^{-1}T(A) \subset U \Rightarrow t^{-1}T \in N(A,U)$$

e, por isso $T \in tN(A,U)$, para todo $|t| \geq c$.

Verifiquemos que $N(A,U)$ é equilibrado. Se $|t| \leq 1$ e $T \in N(A,U)$, então

$$tT(A) \subset tU \subset U \Rightarrow tT \in N(A,U).$$

Note que $N(A,U)$ é convexo. De fato, dados $T, W \in N(A,U)$ e $t \in [0,1]$, temos

$$tT(A) + (1-t)W(A) \subset tU \subset (1-t)U \subset U.$$

Logo, $tT + (1-t)W \in N(A,U)$, quando $t \in [0,1]$.

Mostraremos que $\frac{1}{2}N(A,U) = N(2A,U)$. Dado $T \in N(A,U)$, temos

$$\frac{1}{2}T(2A) \subset \frac{1}{2}U \subset U \Rightarrow \frac{1}{2}T \in N(2A,U).$$

Se $T \in N(2A,U)$, então $T(2A) \subset U$. Defina $W(x) = 2T(x)$. Assim, $T(x) = \frac{1}{2}W(x)$ e

$$W(A) = 2T(A) = T(2A) \subset U.$$

Logo,
$$W \in N(A,U) \Rightarrow T \in \frac{1}{2}N(A,U).$$

Para U, existe V vizinhança convexa e equilibrada da origem em M com $V + V \subset U$.

Assim, se $T, W \in N(A, V)$, então

$$T(A) + W(A) \subset V + V \subset U \Rightarrow T + W \in N(A, U).$$

Portanto, $N(A, V) + N(A, V) \subset N(A, U)$.

Note que se A é finito em L obtemos o mesmo resultado. Agora, considere

$$\mathcal{B}_l = \{N(A, U) : A \text{ é ltdo em } L \text{ e } U \text{ é vizinhança convexa e equilibrada do 0 em } M\}.$$

Então, existe uma topologia τ_l gerada por $\mathcal{B}_l$ em $\mathcal{L}_c(L, M)$ que o torna elc. Chamaremos tal topologia de **topologia da convergência limitada**.

Defina

$$\mathcal{B}_p = \{N(A, U) : A \text{ é finito em } L \text{ e } U \text{ é vizinhança convexa e equilibrada do 0 em } M\}.$$

Da mesma forma, existe uma topologia τ_p gerada por $\mathcal{B}_p$ em $\mathcal{L}_c(L, M)$ que o torna elc. Chamaremos tal topologia de **Topologia da convergência pontual**.

Proposição 2.5.7. Suponha que L é um elc Hausdorff e D é um subconjunto de L não vazio, limitado, fechado, convexo e equilibrado. Seja o conjunto

$$L_D = \bigcup_{r>0} rD.$$

Então L_D é um subespaço de L e, (L_D, p_D) é um espaço normado com a bola unitária fechada D. A topologia da gerada pela norma em L_D é mais fina do que a topologia induzida por L. Finalmente, se D é semi-completo como subespaço do grupo topológico $(L, +)$, então (L_D, p_D) é um espaço de Banach.

Demonstração. Sendo D equilibrado, segue que $0 \in D$. Dados $x, y \in L_D$, existem $r, s > 0$ com $x \in rD$ e $y \in sD$. Assim,

$$x + y \in rD + sD \Rightarrow x + y \in (r + s)D.$$

Agora, se $c > 0$, então $cx \in (cr)D$. Quando $c = 0$, temos $0x \in D$ e para finalizar quando $c < 0$, temos $cx = (-c)(-x) \in (-c)rD$. Logo, L_D é um subespaço de L.

Vejamos que p_D é uma norma. Com efeito, sendo D equilibrado, segue que p_D é uma seminorma. Dado $x \in L_D \backslash \{0\}$, como L é Hausdorff, existe U vizinhança convexa e equilibrada da origem em L com $x \notin U$. Como D é limitado, existe $d > 0$ tal que

$$D \subset dU \Rightarrow d^{-1}D \subset U.$$

Como $x \notin U$, segue $x \notin d^{-1}D$. Então $p_D(x) \geq d^{-1} > 0$. Portanto, p_D é uma norma.

Vejamos que D é fechado em (L_D, p_D). Seja $y \in L_D$ com $p_D(y) \leq 1$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$p_D((1 - \frac{1}{n})y) \leq (1 - \frac{1}{n}) < 1.$$

Portanto, $(1 - \frac{1}{n})y \in D$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$y = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n})y \in \overline{D}$$

e como D é fechado, vemos que $y \in D$.

Mostraremos que a topologia gerada pela norma é mais fina do que a topologia induzida por L. Sejam $x \in L_D$ e V vizinhança de x em L. Então, $V - x$ é vizinhança da origem em L. Assim, existe $c > 0$ com $D \subset c(V - x)$. Daí,

$$c^{-1}D \subset V - x \Rightarrow x + c^{-1}D \subset V \Rightarrow x + c^{-1}D \subset V \cap L_D.$$

Dado $y \in V$, existe U_y vizinhança de y em L com $U_y \subset V$. Daí, existe $c_y > 0$ com

$$y + c_y^{-1}D \subset U_y \subset V.$$

Portanto,

$$V = \bigcup_{y \in V} (y + c_y^{-1}D).$$

Finalmente, suponha que D é semi-completo, ou seja, toda sequência de Cauchy é convergente. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em (L_D, p_D). Sendo D limitado em L e dada uma vizinhança U da origem em L, existe $r > 0$ com $D \subset rU$. Assim, $r^{-1}D \subset U$. Para r^{-1}, existe n_0 com $p_D(x_n - x_m) \leq r^{-1}$ quando $m, n \geq n_0$. Note que se $x \in L_D$ é tal que $p_D(rx) \leq 1$, então $rx \in D$. Logo, $rx \in rU$, donde, $x \in U$. Daí, $\{x_n - x_m : m, n \geq n_0\} \subset U$. Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em L. Como (x_n) é sequência de Cauchy em (L_D, p_D), segue que (x_n) é limitada, isto é, existe $s > 0$ tal que $x_n \in sD$ para todo n, ou seja, $s^{-1}x_n \in D$ para todo n. Vejamos que $(s^{-1}x_n)$ é sequência de Cauchy em L. Se V é vizinhança da origem em L, então sV é vizinhança da origem em L. Daí, existe n_0 com

$$\{x_n - x_m : m, n \geq n_0\} \subset sV \Rightarrow \{s^{-1}x_n - s^{-1}x_m : m, n \geq n_0\} \subset V.$$

Portanto, $(s^{-1}x_n)$ é uma sequência de Cauchy em L e, como $s^{-1}x_n \in D$, segue que o filtro elementar de $(s^{-1}x_n)$ converge para $y \in D$.

Afirmamos que $x_n \to sy$ em (L_D, p_D). Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 com $p_D(x_n - x_m) \leq \varepsilon$, quando $m, n \geq n_0$. Assim, $p_D(\varepsilon^{-1}(x_n - x_m)) \leq 1$ se $m, n \geq n_0$, ou seja,

$$\varepsilon^{-1}(x_n - x_m) \in D \Rightarrow x_n - x_m \in \varepsilon D$$

sempre que $m, n \geq n_0$. Fazendo $n \to \infty$, temos $x_n - x_m \to sy - x_m$ em L. Como D fechado em L, então εD é fechado em L e $sy - x_m \in \varepsilon D$, se $m \geq n_0$. Daí, $\varepsilon^{-1}(sy - x_m) \in D$, quando $m \geq n_0$. Assim,

$$p_D(\varepsilon^{-1}(sy - x_m)) \leq 1 \Rightarrow p_D(sy - x_m) \leq \varepsilon$$

sempre que $m \geq n_0$. Portanto, $x_n \to sy$ em (L_D, p_D). □

2.6 Seminormas e Espaços de Fréchet

Suponha que L é um espaço vetorial. Se p_1 e p_2 são seminormas em L, dizemos que $p_1 \leq p_2$ quando $p_1(x) \leq p_2(x)$ para todo $x \in L$. Note que $p_1 \leq p_1$, pois $p_1(x) = p_1(x)$, para todo x. Agora, se $p_1 \leq p_2$ e $p_2 \leq p_3$, então

$$p_1(x) \leq p_2(x) \leq p_3(x) \Rightarrow p_1 \leq p_3.$$

Uma família $\mathcal{F}$ de seminormas é **dirigida** se para quaisquer $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$, existe $p_3 \in \mathcal{F}$ tal que $p_1 \leq p_3$ e $p_2 \leq p_3$. Se $p \in \mathcal{F}$ e $r \in (0, \infty)$, definimos a **bola aberta** em L, por

$$B(p, r) = \{x \in L : p(x) < r\}.$$

Note que, se $p_1 \leq p_2$ e $0 < s \leq r$, então

$$B(p_2, s) \subset B(p_1, r). \tag{2.7}$$

De fato, dado $x \in B(p_2, s)$, temos

$$p_1(x) \leq p_2(x) < s \leq r.$$

Logo, $x \in B(p_1, r)$.

Considere

$$\mathcal{B}_0 = \{B(p, 2^{-n}) : p \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Se p é seminorma, então $p(0) = 0 < 2^{-n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $0 \in B(p, 2^{-n})$. Sejam $B(p_1, 2^{-n}), B(p_2, 2^{-m}) \in \mathcal{B}_0$. Então, existe $p_3 \in \mathcal{F}$, tal que $p_1 \leq p_3$ e $p_2 \leq p_3$.

Faça $l = \max\{n, m\}$. Daí, $2^{-l} \leq 2^{-n}$ e $2^{-l} \leq 2^{-m}$. Aplicando (2.11), temos

$$B(p_3, 2^{-l}) \subset B(p_1, 2^{-n}) \text{ e } B(p_3, 2^{-l}) \subset B(p_2, 2^{-m}).$$

Portanto, $B(p_3, 2^{-l}) \subset B(p_1, 2^{-n}) \cap B(p_2, s^{-m})$.

Verifiquemos que $B(p, 2^{-n})$ é absorvente. Sejam $x \in L$ e $|t| \leq \frac{2^{-(n+1)}}{p(x)+1}$. Assim,

$$p(tx) = |t|p(x) \leq 2^{-(n+1)} \cdot \frac{p(x)}{p(x)+1} < 2^{-n} \Rightarrow tx \in B(p, 2^{-n}).$$

Por isso, $x \in cB(p, 2^{-n})$ sempre que $|c| \geq \frac{p(x)+1}{2^{-(n+1)}}$. Agora, vamos mostrar que $B(p, 2^{-n})$ é equilibrado. Se $x \in B(p, 2^{-n})$ e $|t| \leq 1$, então

$$p(tx) = |t|p(x) \leq p(x) < 2^{-n}.$$

Vejamos que $\frac{1}{2}B(p, 2^{-n}) = B(p, 2^{-(n+1)})$. Com efeito, dado $x \in B(p, 2^{-n})$, temos

$$p(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}p(x) < \frac{1}{2} \cdot 2^{-n} = 2^{-(n+1)}.$$

Agora, seja $x \in B(p, 2^{-(n+1)})$ e defina $y = 2x$. Então, $x = \frac{1}{2}y$ e

$$p(y) = p(2x) = 2p(x) < 2 \cdot 2^{-(n+1)} = 2^{-n}.$$

Logo,

$$y \in B(p, 2^{-n}) \Rightarrow x \in \frac{1}{2}B(p, 2^{-n}).$$

Finalmente, $\frac{1}{2}B(p, 2^{-n}) + \frac{1}{2}B(p, 2^{-n}) \subset B(p, 2^{-n})$. Dados $x, y \in B(p, 2^{-n})$, temos

$$p(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(y) < \frac{1}{2} \cdot 2^{-n} + \frac{1}{2} \cdot 2^{-n} = 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-(n+1)} \cdot 2 = 2^{-n}$$

e por último mostraremos que $B(p, 2^{-n})$ é convexo. De fato, sejam $x, y \in B(p, 2^{-n})$ e $t \in (0, 1)$. Assim,

$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < 2^{-n}t + 2^{-n}(1-t) = 2^{-n}.$$

Portanto, existe uma topologia $\tau_{\mathcal{F}}$ em L que o torna elc. Chamaremos tal topologia de **topologia gerada** por $\mathcal{F}$.

Proposição 2.6.1. Sejam um espaço vetorial L e uma seminorma p em L. Se $x \in L$ e $r \in (0, \infty)$, então

$$x + B(p, r) = \tilde{B}^p(x, r)$$

onde $\tilde{B}^p(x,r) = \{y \in L : p(y-x) < r\}$.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que $\tilde{B}^p(x,r) \subset x + B(p,r)$. Dado $z \in \tilde{B}^p(x,r)$, temos $p(z-x) < r$, e portanto

$$z - x \in B(p,r) \Rightarrow z \in x + B(p,r).$$

Agora, vejamos que $x + B(p,r) \subset \tilde{B}^p(x,r)$. Dado $z \in x + B(p,r)$, existe $y \in B(p,r)$ tal que $z = x + y$. Assim,

$$z - x = y \Rightarrow p(z-y) = p(y) < r$$

e, portanto $z \in \tilde{B}^p(x,r)$. □

Proposição 2.6.2. Suponha que L é elc. Seja $\mathcal{B}_1$ base de vizinhanças da origem em L consistindo de conjuntos equilibrados e convexos. Considere

$$\mathcal{F} = \{p_V : V \in \mathcal{B}_1\}$$

onde p_V é funcional de Minkowski associado a V. Então $\mathcal{F}$ é uma família dirigida de seminormas em L, e a topologia gerada por $\mathcal{F}$ é a topologia original.

Demonstração. Sendo V equilibrado, segue que p_V é seminorma. Agora, vamos mostrar que $\mathcal{F}$ é uma família dirigida de seminormas em L. De fato, dados $U, V \in \mathcal{B}_1$, existe $W \in \mathcal{B}_1$ com $W \subset U \cap V$. Assim, $W \subset U$. Daí,

$$x \in tW \subset tU \Rightarrow \{t \geq 0 : x \in tW\} \subset \{t \geq 0 : x \in tU\},$$

ou seja, $p_U(x) \leq p_W(x)$, para todo $x \in L$. De maneira análoga, vemos que $p_V(x) \leq p_W(x)$. Na topologia original, p_V é contínua. Então, $B(p_V, r) = p_V^{-1}((-\infty, r))$. é aberto na topologia original. Dado $U \in \mathcal{B}_0$, existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \subset U$. Agora, se $W \in \mathcal{B}_1$, então $B(p_W, 1) \subset W$. Logo, dado $V \in \mathcal{B}_1$, existe $U \in \mathcal{B}_0$ tal que $U \subset V$. □

Definição 2.6.1. Um espaço localmente convexo é chamado **espaço de Fréchet** se é metrizável e completo.

Lema 2.6.3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a, b, c \geq 0$ e $c \leq a + b$. Então

$$\frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Demonstração.

$$c \leq a + b \Rightarrow c \leq a + b + 2ab + abc.$$

Assim,

$$(1+a+b+ab)c = c+bc+ac+abc \leq a+b+2ab+bc+ac+2abc = (1+c)(a+b+2ab).$$

Daí,

$$(1+a)(1+b)c \leq (1+c)((1+b)a+(1+a)b) \Rightarrow \frac{c}{1+c} \leq \frac{(1+b)a+(1+a)b}{(1+a)(1+b)}.$$

Logo,

$$\frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

□

Suponhamos que $\mathcal{F} = \{p_1, p_2, \ldots\}$ é uma família dirigida e enumerável de seminormas em L tais que $p_n \leq p_m$ se $m \geq n$, e $\tau_{\mathcal{F}}$ é Hausdorff. Então $(L, \tau_{\mathcal{F}})$ é um espaço localmente convexo. Agora, vamos definir em L uma métrica d. Dados $x, y \in L$, defina

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}$$

Se $x \in L\backslash\{0\}$, então existe $p \in \mathcal{F}$ tal que $p(x) > 0$. Além disso,

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(y-x)}{1+p_j(y-x)} = d(y,x)$$

e $p(x-y) \leq p(x-z) + p(z-y)$, para todo $z \in L$. Pelo lema anterior, segue que d é uma métrica em L.

Agora, vamos mostrar que $\tau_{\mathcal{F}} = \tau_d$, onde τ_d é a topologia gerada por d. Para isso, basta provarmos que uma bola $B \in \tau_d$ e cada $x \in B$, existe um aberto básico $V \in \tau_{\mathcal{F}}$ tal que $x \in V \subset B$, e para cada aberto básico $V \in \tau_{\mathcal{F}}$ e cada $x \in V$, existe $B \in \tau_d$ tal que $x \in B \subset V$.

Primeiramente, provaremos que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r > 0,\ \forall q \in L,\ \exists \varepsilon > 0 : B(q,\varepsilon) \subset \tilde{B}^{p_n}(q,r).$$

De fato, tomando $0 < \varepsilon < \min\{2^{-n}, \frac{r}{2^n(1+r)}\}$ então

$$\varepsilon < 2^{-n} \Rightarrow 2^n\varepsilon < 1 \Rightarrow 1 - 2^n\varepsilon > 0$$

e

$$2^n\varepsilon < \frac{r}{1+r} \Leftrightarrow 2^n\varepsilon + 2^n\varepsilon r < r \Leftrightarrow 2^n\varepsilon < r(1-2^n\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon} < r.$$

Se $x \in B(q,\varepsilon)$, então

$$\begin{aligned}
d(x,q) < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\frac{p_j(x-q)}{1+p_j(x-q)} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad 2^{-j}\frac{p_j(x-q)}{1+p_j(x-q)} < \varepsilon, \forall j \\
&\Rightarrow \quad \frac{p_j(x-q)}{1+p_j(x-q)} < 2^j\varepsilon, \forall j \\
&\Rightarrow \quad p_j(x-q) < 2^j\varepsilon + 2^j\varepsilon p_j(x-q) \\
&\Rightarrow \quad p_j(x-q)(1-2^j\varepsilon) < 2^j\varepsilon \\
&\Rightarrow \quad p_j(x-q) < \frac{2^j\varepsilon}{1-2^j\varepsilon} < r.
\end{aligned}$$

Portanto, $B(q,\varepsilon) \subset \tilde{B}^{p_j}(q,r)$, para todo j.

Agora, provaremos que

$$\forall r>0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall q \in L. \text{ Se } y \in \tilde{B}^{p_n}(q,r), \text{ então existe } r'>0 : \tilde{B}^{p_n}(y,r') \subset \tilde{B}^{p_n}(q,r).$$

De fato, tome $r' = r - p_n(q-y)$ e $x \in \tilde{B}^{p_n}(y,r')$ então

$$p_n(x-y) < r - p_n(q-y) \Rightarrow p_n(x-y) + p_n(q-y) < r \Rightarrow p_n(x-q) < r.$$

Portanto, $\tilde{B}^{p_n}(y,r') \subset \tilde{B}^{n}(q,r)$.

Finalmente, vamos provar que $\tau_{\mathcal{F}} = \tau_d$. Inicialmente, verifiquemos que $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau_d$. Com efeito, dado um aberto básico V em $\tau_{\mathcal{F}}$, tem-se que V é da forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \tilde{B}^{p_i}(q_i,r_i).$$

Se $x \in V$, então $x \in \tilde{B}^{p_i}(q_i,r_i)$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$. Para cada r_i, existem $r_i' > 0$ tais que $\tilde{B}^{p_i}(x,r_i') \subset \tilde{B}^{p_i}(q_i,r_i)$. Para cada r_i', existem $\varepsilon_i > 0$ tais que $B(x,\varepsilon_i) \subset \tilde{B}^{p_i}(x,r_i')$. Assim,

$$B(x,\varepsilon_i) \subset \tilde{B}^{p_i}(x,r_i') \subset \tilde{B}^{p_i}(q_i,r_i).$$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_n\} > 0$, então

$$B(x,\varepsilon) \subset \tilde{B}^{p_i}(q_i,r_i) \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset V.$$

Verifiquemos que $\tau_d \subset \tau_{\mathcal{F}}$. De fato, sejam B uma bola aberta em τ_d e $x \in B$, existe

$r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B$. Como

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$$

é convergente, existem $n \in \mathbb{N}$ e $c \in (0, 1)$ tais que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{r}{2}$$

e

$$c(\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}) < \frac{r}{2}.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{c}{1-c} > 0$, afirmamos que $\tilde{B}^{p_n}(x, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Dado $y \in \tilde{B}^{p_n}(x, \varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} p_n(y - x) < \frac{c}{1-c} \quad & \Rightarrow \quad p_m(y - x) < \frac{c}{1-c}, \ \forall m \leq n \\ & \Rightarrow \quad p_m(y - x) < c + c p_m(y - x), \ \forall m \leq n \\ & \Rightarrow \quad \frac{p_m(y - x)}{1 + p_m(y - x)} < c, \ \forall m \leq n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \frac{p_i(y - x)}{1 + p_i(y - x)} < c \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < \frac{r}{2}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} d(y - x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(y - x)}{1 + p_i(y - x)} &= \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \frac{p_i(y - x)}{1 + p_i(y - x)} \\ &+ \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(y - x)}{1 + p_i(y - x)} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{B}^{p_n}(x, \varepsilon) \subset B(x, r) \subset B$.

Exemplo 2.6.1. Considere $\mathbb{R}[[x]]$ o conjunto das séries formais. Dados $p, q \in \mathbb{R}[[x]]$ com $p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos

$$p + q = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \text{ e } \lambda \cdot p = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda a_i) x^i.$$

Com as operações definidas acima, segue que $\mathbb{R}[[x]]$ é um espaço vetorial. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $p_n(q) = \sum_{i=0}^{n} |b_i|$. Vejamos que p_n é uma seminorma. De fato, $p_n(0) =$

$\sum_{i=0}^{n} |0| = 0$. Além disso,

$$p_n(\lambda \cdot q) = \sum_{i=0}^{n} |\lambda \cdot b_i| = |\lambda| \cdot \sum_{i=0}^{n} |b_i| = |\lambda| \cdot p_n(q)$$

e

$$p_n(p+q) = \sum_{i=0}^{n} |a_i + b_i| \leq \sum_{i=0}^{n} (|a_i| + |b_i|) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| + \sum_{i=0}^{n} |b_i| = p_n(p) + p_n(q).$$

Logo, p_n é uma seminorma em $\mathbb{R}[[x]]$. Considere

$$\mathcal{F} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Verifiquemos que $\mathcal{F}$ é uma família dirigida de seminormas e que $p_m \leq p_n$, se $m \leq n$. Com efeito, dados $p_{n_1}, p_{n_2} \in \mathcal{F}$, tome $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, e portanto

$$p_{n_1}(q) = \sum_{i=0}^{n_1} |b_i| \leq \sum_{i=0}^{n_3} |b_i| = p_{n_3}(q)$$

e

$$p_{n_2}(q) = \sum_{i=0}^{n_2} |b_i| \leq \sum_{i=0}^{n_3} |b_i| = p_{n_3}(q).$$

Logo, $\mathbb{R}[[x]]$ é um elc com a topologia gerada por $\mathcal{F}$. Note que, se $m \leq n$, então

$$p_m(q) = \sum_{i=0}^{m} |b_i| \leq \sum_{i=0}^{m} |b_i| + \sum_{i=m+1}^{n} |b_i| = p_n(q).$$

Agora, vamos definir uma métrica em $\mathbb{R}[[x]]$. Defina

$$d(p,q) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \cdot \frac{p_i(p-q)}{1 + p_i(p-q)}.$$

Além disso, a topologia gerada por d é igual a topologia gerada pela família de seminormas.

Vejamos que $(\mathbb{R}[[x]], d)$ é completo. Dada uma sequência de Cauchy $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i)_{n=0}^{\infty}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ fixo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)}{1 + p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)} < \varepsilon$$

se $m, n > n_0$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_1$ tem-se

$$\frac{p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)}{1 + p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)} < \frac{1}{2} \Rightarrow p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j) < 1.$$

Note que

$$p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)) = (1 + p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)) \frac{p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)}{1 + p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)}$$

e, por isso $p_i(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(m)} x^j)) \to 0$ quando $m, n \to \infty$. Mais ainda,

$$\sum_{j=0}^{i} |a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| \to 0 \Rightarrow |a_j^{(m)} - a_j^{(n)}| \to 0$$

para cada $j \in \mathbb{N}$ fixo. Assim, $(a_j^{(n)})$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Logo, existe $b_j \in \mathbb{R}$ com $\lim_{n \to \infty} a_j^{(n)} = b_j$, para cada j. Verifiquemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i \to \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i.$$

Note que $p_j(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) \to 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ fixo. Assim,

$$2^{-j} \frac{p_j(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)}{1 + p_j(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)} \to 0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $s \geq 1$, temos

$$\sum_{j=0}^{s} 2^{-j} \frac{p_j(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)}{1 + p_j(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)} \to 0.$$

Fazendo $s \to \infty$, segue que

$$d(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)}{1 + p_j(\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i)} \to 0.$$

Capítulo 3

Os Teoremas Clássicos

Este capítulo está destinado a demonstrar o Teorema da Limitação Uniforme, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Para este fim, alguns resultados auxiliares serão demonstrados.

Novamente vamos considerar que o corpo seja $\mathbb{R}$.

3.1 Três Propriedades Especiais

Sejam L um espaço vetorial, A e B subconjuntos de L. Dizemos que A **absorve** B quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $B \subset cA$.

Definição 3.1.1. Suponha que L é um espaço de Hausdorff localmente convexo.

(a) Um **tonel** em L é um subconjunto fechado, equilibrado e absorvente;

(b) L é dito **tonelado**, se todo tonel em L é vizinhança da origem em L;

(c) L é dito **infratonelado**, se todo tonel em L que absorve qualquer conjunto limitado em L é vizinhança da origem em L;

(d) L é dito **bornológico**, se qualquer subconjunto convexo e equilibrado em L que absorve qualquer conjunto limitado em L é vizinhança da origem em L.

Da definição, segue que

$$\text{(tonelado)} \Rightarrow \text{(infratonelado)} \Leftarrow \text{(bornológico)}.$$

Proposição 3.1.1. Suponha que L é um espaço de Hausdorff localmente convexo e N é um subespaço de L fechado.

(a) Se L é tonelado, então L/N é tonelado;

(b) Se L é infratonelado, então L/N é infratonelado;

(c) Se L é bornológico, então L/N é bornológico.

Demonstração. Considere Φ a aplicação natural e B um subconjunto de L/N convexo e equilibrado. Então, $\Phi^{-1}(B)$ é convexo e equilibrado em L. Se B é absorvente, então $\Phi^{-1}(B)$ é absorvente em L. Finalmente, se B é fechado em L/N, então $\Phi^{-1}(B)$ é fechado em L.

Suponhamos que B absorve qualquer conjunto limitado em L/N. Se A for limitado em L e, como Φ é contínua, segue que $\Phi(A)$ é limitado em L/N. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(A) \subset cB \Rightarrow A \subset c\Phi^{-1}(B).$$

Dessa forma, $\Phi^{-1}(B)$ absorve qualquer conjunto limitado em L.

(a)

Seja B um tonel em L/N. Então, $\Phi^{-1}(B)$ é um tonel em L. Como L é tonelado, segue que $\Phi^{-1}(B)$ é vizinhança da origem em L e, por Φ ser uma aplicação aberta, segue que $B = \Phi(\Phi^{-1}(B))$ é vizinhança da origem em L/N.

(b)

Seja B um tonel em L/N que absorve qualquer conjunto limitado em L/N. Então, $\Phi^{-1}(B)$ é um tonel em L/N que absorve qualquer conjunto limitado em L. Logo, $\Phi^{-1}(B)$ é vizinhança da origem em L e, por Φ ser uma aplicação aberta, segue que $B = \Phi(\Phi^{-1}(B))$ é vizinhança da origem em L/N.

(c)

Se B é convexo e equilibrado em L/N, então $\Phi^{-1}(B)$ é convexo e equilibrado em L, e portanto $\Phi^{-1}(B)$ é vizinhança da origem em L. Logo, B é vizinhança da origem em L/N.

$\square$

Proposição 3.1.2. Suponha que L e N são espaços de Hausdorff localmente convexos.

(a) Se L e N são tonelados, então $L \times N$ é tonelado;

(b) Se L e N são infratonelados, então $L \times N$ é infratonelado;

(c) Se L e N são bornológicos, então $L \times N$ é bornológico.

Demonstração. Suponhamos que A é limitado em L. Então, dada uma vizinhança $U \times V$ da origem em $L \times N$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \subset cU \Rightarrow A \times \{0\} \subset cU \times cV = c(U \times V).$$

Logo, $U \times V$ absorve $A \times \{0\}$, e portanto, se A é limitado em N, então $U \times V$ absorve $\{0\} \times A$, para qualquer $U \times V$ vizinhança da origem em $L \times N$.

Seja B um subconjunto convexo e equilibrado em $L \times N$. Considere P_L, P_N as projeções sobre L e N, respectivamente, e definimos $B_L = P_L^{-1}(B \cap (L \times \{0\}))$ e

$B_N = P_N^{-1}((\{0\} \times N) \cap B)$. Assim, B_L e B_N são convexos e equilibrados e

$$B_L \times \{0\} = B \cap (L \times \{0\})$$

e

$$\{0\} \times B_N = B \cap (\{0\} \times N).$$

Se B é absorvente em $L \times N$, então dado $(x, 0) \in L \times \{0\}$, existe $c > 0$ tal que

$$(x, 0) \in tB, \text{ se } |t| \geq c$$

e assim $(x, 0) \in t(B \cap (L \times \{0\}))$, sempre que $|t| \geq c$. Logo, $B \cap (L \times \{0\})$ é absorvente em $L \times \{0\}$. Portanto, B_L é absorvente em L. De maneira análoga, vemos que B_N é absorvente em N. Agora, se B for fechado em $L \times N$, então B_L e B_N são fechados em L e N, respectivamente.

Suponhamos que B absorve qualquer conjunto limitado em $L \times N$. Então, dado A limitado em L, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \times \{0\} \subset c(B \cap (L \times \{0\})) \Rightarrow A \subset cB_L.$$

De forma similar, se A é limitado em N, então B_N absorve A.

(a)

Se B é um tonel em $L \times N$, então B_L e B_N são toneis em L e N, respectivamente. Assim, B_L e B_N são vizinhanças da origem em L e N, respectivamente. Note que, dados $x \in B_L$ e $y \in B_N$, temos

$$\frac{1}{2}(x, y) = \frac{1}{2}(x, 0) + \frac{1}{2}(0, y) \in B,$$

ou seja, $\frac{1}{2}(B_L \times B_N) \subset B$. Logo, B é vizinhança da origem em $L \times N$.

(b)

Se B é um tonel em $L \times N$ que absorve qualquer conjunto limitado em $L \times N$, então B_L e B_N são toneis que absorvem quaisquer conjuntos limitados em L e N, respectivamente. Assim, B_L e B_N são vizinhanças da origem em L e N, respectivamente. Note que, dados $x \in B_L$ e $y \in B_N$, temos

$$\frac{1}{2}(x, y) = \frac{1}{2}(x, 0) + \frac{1}{2}(0, y) \in B,$$

ou seja, $\frac{1}{2}(B_L \times B_N) \subset B$. Logo, B é vizinhança da origem em $L \times N$.

(c)

Se B é convexo e equilibrado em $L \times N$, então B_L e B_N são convexos e equilibrados em L e N, respectivamente. Assim, B_L e B_N são vizinhanças da origem em L e N, respectivamente. Note que, dados $x \in B_L$ e $y \in B_N$, temos

$$\frac{1}{2}(x,y) = \frac{1}{2}(x,0) + \frac{1}{2}(0,y) \in B,$$

ou seja, $\frac{1}{2}(B_L \times B_N) \subset B$. Logo, B é vizinhança da origem em $L \times N$. □

Definição 3.1.2. Um espaço topológico X é um **espaço de Baire**, se qualquer união enumerável de fechados de interior vazio possui interior vazio.

Exemplo 3.1.1. Todo espaço métrico completo é espaço de Baire.

Teorema 3.1.3. *Suponha que L é um espaço de Hausdorff e de Baire localmente convexo. Então, L é tonelado. Em particular, todo espaço de Fréchet é tonelado.*

Demonstração. Sejam B um tonel em L e $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $0 < r < s$. Então,

$$rB = s \cdot (\frac{r}{s}B) \subset sB,$$

pois B é equilibrado e $\frac{r}{s} < 1$. Note que,

$$L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB.$$

Com efeito, dado $x \in L$, existe $c > 0$ tal que $x \in tB$, sempre que $|t| > c$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > c$, então $x \in nB$. Sendo L espaço de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int(n_0 B) \neq \emptyset$. Como $int(n_0 B) = n_0 \cdot int(B)$, segue que $int(B) \neq \emptyset$, isto é, existe $y \in int(B)$ e por isso, $-y \in \overline{B}$. Daí, $0 \in (y, -y) \subset int(B)$. □

Definição 3.1.3. Suponha que L é um espaço vetorial. Dizemos que A **absorve todos os pontos** de B, se para cada $x \in B$, existe $c > 0$ tal que

$$x \in tA, \text{ sempre que } |t| \geq c.$$

Proposição 3.1.4 (Princípio da Absorção)**.** Suponha que L é um espaço de Hausdorff localmente convexo, A e B são subconjuntos de L fechados, equilibrados e convexos. Se A é limitado e semi-completo e B absorve todos os pontos de A, então B absorve A.

Demonstração. Se $A = \emptyset$, então $A \subset B$. Agora, suponhamos que $A \neq \emptyset$. Pela Proposição 2.5.7, (L_A, p_A) é um espaço normado e, como A é semi-completo, segue que (L_A, p_A) é um espaço de Banach. Verifiquemos que $B \cap L_A$ é um tonel em L_A.

Com efeito, como B e L_A são convexos e equilibrados, segue que $B \cap L_A$ é convexo e equilibrado.

Vejamos que $B \cap L_A$ é absorvente em L_A. De fato, dado $y \in L_A$, existe $s > 0$ tal que $y \in sA$, ou seja, existe $x \in A$ com $y = sx$. Para x, existe $r > 0$ tal que $x \in tB$, sempre que $r \leq |t|$. Se $|\beta| \geq sr$, então

$$|\beta^{-1}| \leq (sr)^{-1} \Rightarrow |s\beta^{-1}| \leq r^{-1} \Rightarrow s\beta^{-1}x \in B \Rightarrow \beta^{-1}y \in B.$$

Daí, $y \in \alpha B$, sempre que $|\alpha| \geq sr$. Portanto, $B \cap L_A$ é um tonel em L_A e por isso, $B \cap L_A$ é vizinhança da origem em L_A. Como A é limitado, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \subset c(B \cap L_A) \subset cB.$$

□

Corolário 3.1.5. Seja L um espaço de Hausdorff localmente convexo. Se L é infratonelado e semi-completo, então L é tonelado.

Demonstração. Sejam B um tonel em L e A um conjunto limitado. Então, $(A^\circ)_\circ$ é fechado, convexo, equilibrado e limitado. Dada (x_n) uma sequência de Cauchy em $(A^\circ)_\circ$, existe $x \in L$ tal que $x_n \to x$. Assim, $x \in (A^\circ)_\circ$, pois $(A^\circ)_\circ$ é fechado. Pelo Princípio da Absorção, segue que B absorve $(A^\circ)_\circ$. Como $A \subset (A^\circ)_\circ$, B absorve A. □

Definição 3.1.4. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **1 enumerável**, se cada ponto de X possui base de vizinhanças enumerável.

Lema 3.1.6. Suponha que L é um espaço vetorial topológico 1 enumerável e U é vizinhança aberta da origem em L. Então, existe $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ base de vizinhanças da origem tal que

(a) $B_1 \subset U$;

(b) $B_j = -B_j$;

(c) $B_{j+1} + B_{j+1} \subset B_j$.

Demonstração. Como L é 1 enumerável, existe $\mathcal{B}'$ base de vizinhanças da origem enumerável. Defina

$$\mathcal{B}'' = \{B \cap (-B) : B \in \mathcal{B}'\}.$$

Verifiquemos que $\mathcal{B}''$ é base de vizinhanças da origem. Seja V vizinhança da origem em L. Então, existe $B \in \mathcal{B}'$ tal que $B \subset V$. Assim, $B \cap (-B) \subset V$. Como todo elemento de $\mathcal{B}'$ é vizinhança da origem, segue que todo elemento de $\mathcal{B}''$ é vizinhança da origem.

Por último, dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$, existe $B_3 \in \mathcal{B}'$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Assim,

$$B_3 \cap (-B_3) \subset (B_1 \cap B_2) \cap ((-B_1) \cap (-B_2)) = (B_1 \cap (-B_1)) \cap (B_2 \cap (-B_2)).$$

Para obter uma base de vizinhanças abertas da origem, defina

$$\mathcal{B}''' = \{int(B) : B \in \mathcal{B}''\}.$$

Para obter uma base de vizinhanças fechada da origem, defina

$$\mathcal{B}''' = \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}''\}.$$

Como U é vizinhança da origem, existe $C \in \mathcal{B}'''$ tal que $C \subset U$. Chame $B(1) = C$ e como $\mathcal{B}'$ é enumerável, podemos enumerar $\mathcal{B}'''$ da seguinte forma

$$\mathcal{B}''' = \{B(1), B(2), B(3), \ldots\}.$$

Agora, construiremos $\mathcal{B}$ satisfazendo as condições do lema. Chame $B_1 = B(1)$ e vamos definir B_2 de modo que $B_2 + B_2 \subset B_1$. Assim, escolha $C^{(1)} \in \mathcal{B}'''$ tal que $C^{(1)} \subset B_1 \cap B(2)$ e como $C^{(1)}$ é vizinhança da origem, existem $C^{(2)}, C^{(3)} \in \mathcal{B}'''$ tais que

$$C^{(2)} + C^{(3)} \subset C^{(1)},$$

pois $\oplus$ é contínua. Escolha $B \in \mathcal{B}'''$ tal que $B \subset C^{(2)} \cap C^{(3)}$. Assim,

$$B + B \subset C^{(2)} + C^{(3)} \subset C^{(1)} \subset B_1.$$

Chame $B_2 = B$ e para cada $j \in \mathbb{N}$, escolha $C \in \mathcal{B}'''$ tal que $C \subset B_j \cap B(j+1)$. Como C é vizinhança da origem, existem $E, F \in \mathcal{B}'''$ de modo que

$$E + F \subset C.$$

Agora, escolha $B \in \mathcal{B}'''$ tal que $B \subset E \cap F$ e chame $B_{j+1} = B$. Assim,

$$B_{j+1} + B_{j+1} \subset E + F \subset C \subset B_j.$$

Seja V é vizinhança da origem. Então, existe $B(k) \in \mathcal{B}'''$ com $B(k) \subset V$. Pode ocorrer que $k = 1$ ou $k = j+1$, onde $j > 1$. Se $k = 1$, então $B_1 = B(1) \subset V$. Se $k = j+1$, então

$$B_{j+1} \subset B(j+1) \subset V.$$

$\square$

Do lema anterior, para qualquer $j \geq 2$, tem-se $B_{j+1} \subset B_{j+1} + B_{j+1} \subset B_j$ e $B_j + B_{j+1} \subset B_j + B_j \subset B_{j-1}$. Suponhamos, por indução, que para $n \in \mathbb{N}$ tem-se que

$$B_j + B_{j+1} + B_{j+2} + \ldots + B_{j+n} \subset B_{j-1}.$$

Assim,

$$B_j + B_{j+1} + B_{j+2} + \ldots + B_{j+(n+1)} = B_j + (B_{j+1} + B_{(j+1)+1} + \ldots + B_{(j+1)+n}) \subset B_j + B_j \subset B_{j-1}.$$

Ainda com as hipóteses do lema anterior, vamos supor que L é completo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in B_n$ e defina

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Se $m > n$, então

$$y_m - y_n = \sum_{j=n+1}^{m} x_j \in B_{n+1} + B_{(n+1)+1} + \ldots + B_{(n+1)+(m-(n+1))} \subset B_n$$

e

$$y_n - y_m = -(y_m - y_n) \in -B_n = B_n.$$

Dado U vizinhança da origem em L, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_{n_0} \subset U$. Se $m, n > n_0$, então

$$y_m - y_n \in B_{n_1} \subset B_{n_0} \subset U,$$

onde $n_1 = \min\{n, m\}$, ou seja, (y_n) é uma sequência de Cauchy em L. Logo, existe $x \in L$ tal que $y_n \to x$.

Proposição 3.1.7. Seja L um espaço vetorial topológico. Se $A \subset L$ é compacto, então A é limitado.

Demonstração. Seja V vizinhança da origem em L. Então, existe W vizinhança equilibrada da origem em L tal que $W \subset V$. Fixe $x \in A$, e assim, $\frac{1}{n}x \to 0$, pois $\{x\}$ é limitado. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}x \in W$, se $n \geq n_0$. Dessa forma, $x \in nW$, se $n \geq n_0$. Portanto,

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW.$$

Como A é compacto, existe n_1 de forma que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} iW.$$

Note que, se $1 \leq n \leq n_1$, então $\frac{n}{n_1} \leq 1$. Daí,

$$\frac{n}{n_1} W \subset W \Rightarrow nW \subset n_1 W.$$

Logo,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} iW \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} n_1 W = n_1 W \subset n_1 V.$$

□

Proposição 3.1.8. Suponha que L é um espaço de Hausdorff localmente convexo. Se L é 1 enumerável, então L é bornológico.

Demonstração. Sendo L 1 enumerável, existe $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$ base de vizinhanças da origem tal que $B_{j+1} + B_{j+1} \subset B_j$. Assim, $B_{j+1} \subset B_j$. Seja C um subconjunto convexo e equilibrado de L que absorve qualquer conjunto limitado.

Suponhamos, por absurdo, que C não é vizinhança da origem. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe B_n tal que $\frac{1}{n} B_n \not\subset C$. Daí, $B_n \not\subset nC$ e escolha $x_n \in B_n \backslash C$. Por construção, $x_n \to 0$. Considere

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

e vejamos que A é compacto. De fato, seja $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura A por abertos de L. Então, existe $\beta \in \Lambda$ tal que $0 \in U_\beta$, e daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $x_n \in U_\beta$, se $n > n_0$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$, escolha $\alpha_i \in \Lambda$ de modo que $x_i \in U_{\alpha_i}$. Logo,

$$A \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_{n_0}} \cup U_\beta.$$

Portanto, A é limitado e por hipótese, C absorve A, absurdo, pois A foi construído de tal maneira que C não absorve A. □

Corolário 3.1.9. Espaços normados e espaços de Fréchet são bornológicos.

Demonstração. Espaços normados e espaços de Fréchet são 1 enumeráveis. □

Teorema 3.1.10. *Sejam L e N espaços de Hausdorff localmente convexos e $T : L \to N$ uma transformação linear. Considere as afirmações abaixo:*

(i) T é contínua;

(ii) Se $x_n \to 0$ em L, então $T(x_n) \to 0$ em N;

(iii) T é limitada.

Então,

(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) sempre, e (iii) ⇒ (i) se L é bornológico.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$

Ocorre devido a continuidade sequencial.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sejam A limitado em L, $(T(x_n))$ uma sequência em $T(A)$ e (λ_n) uma sequência em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\lambda_n \to 0$. Então,

$$\lambda_n T(x_n) = T(\lambda_n x_n).$$

Como A é limitado, segue que $\lambda_n x_n \to 0$ e, por hipótese, $\lambda_n T(x_n) = T(\lambda_n x_n) \to 0$.

Agora, suponhamos que L é bornológico e vale (iii). Sejam V vizinhança equilibrada e convexa da origem em N e A limitado em L. Por hipótese, $T(A)$ é limitado em N. Dessa forma, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(A) \subset rV \Rightarrow A \subset rT^{-1}(V)$$

e, por isso $T^{-1}(V)$ é convexo, equilibrado e absorve qualquer conjunto limitado em L. Logo, $T^{-1}(V)$ é vizinhança da origem.

Sejam W aberto em N e $x \in T^{-1}(W)$. Então, $T(x) \in W$, e assim, $T^{-1}(W - T(x))$ é vizinhança da origem em L. Logo, $x + int(T^{-1}(W - T(x)))$ é vizinhança aberta de x em L, com

$$T(x+int(T^{-1}(W-T(x)))) = T(x)+T(int(T^{-1}(W-T(x)))) \subset T(x)+W-T(x) = W.$$

Portanto, $x + int(T^{-1}(W - T(x))) \subset T^{-1}(W)$. □

3.2 Limitação Uniforme

Sejam L e N espaços localmente convexos, A subconjunto de L e U subconjunto de N. Defina,

$$N(A, U) = \{T \in \mathcal{L}_c(L, N) : T(A) \subset U\}.$$

Lema 3.2.1. Suponha que L e N são espaços localmente convexos e c é um escalar não nulo. Então, para cada A subconjunto de L e U subconjunto de N, temos

$$cN(A, U) = N(A, cU) = N(c^{-1}A, U).$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} T \in N(A, cU) &\Leftrightarrow T(A) \subset cU \Leftrightarrow c^{-1}T(A) \subset U \\ &\Leftrightarrow T(c^{-1}A) \subset U \Leftrightarrow T \in N(c^{-1}A, U). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T \in N(A, cU) &\Leftrightarrow T(A) \subset cU \Leftrightarrow c^{-1}T(A) \subset U \\ &\Leftrightarrow c^{-1}T \in N(A, U) \Leftrightarrow T \in cN(A, U). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2.2. Sejam L e N espaços localmente convexos e $\mathcal{F}$ um subconjunto de $\mathcal{L}_c(L, N)$.

(a) $\mathcal{F}$ é limitado na topologia da convergência pontual se, e somente se, para cada $x \in L$ o conjunto

$$\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$$

é limitado em N.

(b) $\mathcal{F}$ é limitado na topologia da convergência limitada se, e somente se, para cada A subconjunto limitado em L o conjunto

$$\bigcup_{T \in \mathcal{F}} T(A)$$

é limitado em N.

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \subset cN(A, U) &\Leftrightarrow \mathcal{F} \subset N(A, cU) \\ &\Leftrightarrow T(A) \subset cU, \text{ para todo } T \in \mathcal{F} \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{T \in \mathcal{F}} T(A) \subset cU. \end{aligned}$$

(a)

$\mathcal{F}$ é limitado na topologia da convergência pontual se, e somente se, para qualquer A finito em L e U vizinhança equilibrada e convexa da origem em N, existe c tal que $\mathcal{F} \subset cN(A, U)$. Assim, para qualquer A finito em L e U vizinhança equilibrada e convexa da origem em N, existe c tal que

$$\bigcup_{T \in \mathcal{F}} T(A) \subset cU.$$

Por outro lado,

$$\bigcup_{T\in\mathcal{F}} T(A) = \{T(x) : T \in \mathcal{F}, x \in A\} = \bigcup_{x\in A}\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$$

é limitado em N se, e somente se, $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ é limitado em N, pois A é finito.

(b)

$\mathcal{F}$ é limitado na topologia da convergência limitada se, e somente se, para qualquer A limitado em L e U vizinhança equilibrada e convexa da origem em N, existe c tal que $\mathcal{F} \subset cN(A, U)$. Assim, para qualquer A limitado em L e U vizinhança equilibrada e convexa da origem em N, existe c tal que

$$\bigcup_{T\in\mathcal{F}} T(A) \subset cU.$$

□

Definição 3.2.1. Sejam L e N espaços localmente convexos e $\mathcal{F}$ um subconjunto de $\mathcal{L}_c(L, N)$.

(i) $\mathcal{F}$ é **equicontínuo**, se para qualquer V vizinhança da origem em N, existe U vizinhança da origem em L tal que $T(U) \subset V$, para todo $T \in \mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{F}$ é **limitado na convergência limitada**, se $\mathcal{F}$ é limitado na topologia da convergência limitada.

(iii) $\mathcal{F}$ é **limitado na convergência pontual**, se $\mathcal{F}$ é limitado na topologia da convergência pontual.

$\mathcal{F}$ é equicontínuo se, e somente se, para qualquer V vizinhança da origem em N, existe U vizinhança da origem em L tal que para todo $T \in \mathcal{F}$ tem-se

$$T(U) \subset V \Leftrightarrow U \subset T^{-1}(V) \Leftrightarrow U \subset \bigcap_{T\in\mathcal{F}} T^{-1}(V).$$

Teorema 3.2.3 (Banach-Steinhauss/Princípio da Limitação Uniforme)**.** *Sejam L e N espaços de Hausdorff localmente convexos e $\mathcal{F}$ um subconjunto de $\mathcal{L}_c(L, N)$. Considere as afirmações:*

(i) $\mathcal{F}$ é equicontínuo;

(ii) $\mathcal{F}$ é limitado na convergência limitada;

(iii) $\mathcal{F}$ é limitado na convergência pontual.

Então,

(a) $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sempre;

(b) Se L é infratonelado, então $(ii) \Rightarrow (i)$;

(c) Se L é sequencialmente completo, então $(iii) \Rightarrow (ii)$*;*

(d) Se L é tonelado, então $(iii) \Rightarrow (i)$*, ou seja, todas as afirmações são equivalentes.*

Demonstração. (a)

$(i) \Rightarrow (ii)$

Sejam A limitado em L e U vizinhança equilibrada e convexa da origem em N. Sendo $\mathcal{F}$ equicontínuo, existe V vizinhança da origem em L tal que $T(V) \subset U$, para todo $T \in \mathcal{F}$. Como A é limitado, existe $c \in \mathbb{R}$ de modo que $A \subset cV$. Assim, $c^{-1}A \subset V$, e daí, $T(c^{-1}A) \subset T(V) \subset U$, para todo $T \in \mathcal{F}$. Logo,

$$\mathcal{F} \subset N(c^{-1}A, U) = cN(A, U).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Se A é finito em L, então A é limitado em L. Assim,

$$\mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_l.$$

(b)

Suponhamos que L é infratonelado e vale (ii). Dada uma vizinhança U da origem em N, existe U tonel em N que é vizinhança da origem satisfazendo $U \subset V$. Defina

$$B = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1}(U).$$

Assim, B é fechado, equilibrado e convexo em L.

Verifiquemos que B é absorvente. Com efeito, dado $x \in L$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{F} \subset cN(x, U) = N(x, cU).$$

Dessa forma, $T(x) \in cU$, para todo $T \in \mathcal{F}$. Logo,

$$x \in \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1}(cU) = cB.$$

Resta mostrar que B absorve qualquer conjunto limitado em L. Se A é limitado em L, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{F} \subset cN(A, U) = N(c^{-1}A, U).$$

Assim, para todo $T \in \mathcal{F}$, tem-se

$$T(c^{-1}A) \subset U \Rightarrow c^{-1}A \subset T^{-1}(U).$$

Logo,

$$c^{-1}A \subset B \Rightarrow A \subset cB \subset cV.$$

(c)

Suponhamos que L é sequencialmente completo e vale (iii). Seja V vizinhança da origem em N. Então, existe U tonel em L que é vizinhança da origem satisfazendo $U \subset V$. Considere

$$B = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1}(U),$$

e portanto B é um tonel em L, demonstração na parte (b). Se A é limitado em L, então $(A^{\circ})_{\circ}$ é fechado, equilibrado, convexo e limitado e como B absorve todo os pontos de $(A^{\circ})_{\circ}$, pelo Princípio da Absorção, B absorve $(A^{\circ})_{\circ}$. Assim, B absorve A, pois $A \subset (A^{\circ})_{\circ}$, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \subset cB.$$

Logo, para todo $T \in \mathcal{F}$, tem-se

$$A \subset cT^{-1}(U) \Rightarrow c^{-1}A \subset T^{-1}(U) \Rightarrow T(c^{-1}A) \subset U.$$

Portanto,

$$\mathcal{F} \subset N(c^{-1}A, U) = cN(A, U).$$

(d)

Suponhamos que L é tonelado e vale (iii). Dada uma vizinhança V da origem em N, existe U tonel em N que é vizinhança da origem satisfazendo $U \subset V$. Considere

$$B = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1}(U),$$

e portanto B é um tonel em L e, como L é tonelado, segue que B é vizinhança da origem em L. □

3.3 O Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado

Definição 3.3.1. Suponha que X e Y são espaços topológicos, e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é **aproximadamente aberta**, se para todo aberto U em X tem-se

$$f(U) \subset int(\overline{f(U)}).$$

Exemplo 3.3.1. Sejam Y um espaço topológico e X um subespaço denso de Y. Considere $i : X \to Y$ a aplicação inclusão. Dado U aberto em X, existe V aberto em Y tal que $U = V \cap X$. Assim,

$$i(U) = U = V \cap X \subset V \subset \overline{V} = \overline{V \cap X} = \overline{U} = \overline{i(U)}.$$

Logo, $i(U) \subset int(\overline{i(U)})$.

Proposição 3.3.1. Suponha que X e Y são espaços topológicos e $f : X \to Y$ é uma função. Então as afirmações abaixo são equivalentes:

(i) f aproximadamente aberta;

(ii) Existe $\mathcal{B}$ base para a topologia de X (consistindo de conjuntos abertos) tal que $f(B) \subset int(\overline{f(B)})$, para todo $B \in \mathcal{B}$;

(iii) Para cada $x \in X$, existe $\mathcal{B}_x$ base de vizinhanças tal que $f(x) \in int(\overline{f(B)})$, para todo $B \in \mathcal{B}_x$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$

Note que a topologia de X é base e, por definição de aproximadamente aberta, segue que $f(B) \subset int(\overline{f(B)})$ para todo B é um aberto em X.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Por hipótese, existe $\mathcal{B}$ tal que $f(B) \subset int(\overline{f(B)})$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Defina

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}.$$

Vejamos que $\mathcal{B}_x$ é base de vizinhanças. Com efeito, dada uma vizinhança V de x, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset V$. Se $U, V \in \mathcal{B}_x$, então $U \cap V$ é vizinhança de x e como $U, V \in \mathcal{B}$, existe $C \in \mathcal{B}$ de modo que $x \in C \subset U \cap V$. Por último, se $B \in \mathcal{B}_x$, então $B \in \mathcal{B}$ e $x \in int(B)$. Assim,

$$f(x) \in int(B) \subset int(\overline{f(B)}).$$

$(iii) \Rightarrow (i)$

Sejam U aberto em X e $x \in U$. Então, existe $\mathcal{B}_x$ tal que $f(x) \in int(\overline{f(B)})$, para todo $B \in \mathcal{B}_x$. Escolha $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset U$, e assim,

$$f(B) \subset f(U) \Rightarrow \overline{f(B)} \subset \overline{f(U)}.$$

Logo,

$$f(x) \in int(\overline{f(U)}),$$

para todo $x \in U$. Portanto, $f(U) \subset int(\overline{f(U)})$. $\square$

Corolário 3.3.2. Suponha que L e N são espaços vetoriais topológicos e $T : L \to N$ é uma transformação linear. Denote por $\mathcal{B}_0$ uma base de vizinhanças da origem em L. Então, T é aproximadamente aberta se, e somente se, $\overline{T(B)}$ é vizinhança da origem em N, para qualquer $B \in \mathcal{B}_0$.

Demonstração. Suponhamos que $\overline{T(B)}$ é vizinhança da origem em N, para qualquer $B \in \mathcal{B}_0$. Dado $x \in L$, $\{x + B : B \in \mathcal{B}_0\}$ é base de vizinhanças de x em L. Note que, para todo $B \in \mathcal{B}_0$, tem-se

$$0 = T(0) \in int(\overline{T(B)}) \Rightarrow T(x) \in T(x) + int(\overline{T(B)}) = int(\overline{T(x + B)}).$$

Reciprocamente, suponhamos que T é aproximadamente aberta. Dado $B \in \mathcal{B}_0$, temos

$$0 \in int(B) \Rightarrow 0 \in T(int(B)) \subset int(\overline{T(int(B))}) \subset int(\overline{T(B)}).$$

$\square$

Corolário 3.3.3. Suponha que L e N são espaços de Hausdorff localmente convexos e N é tonelado. Se $T : L \to N$ é uma transformação linear sobrejetiva, então T é aproximadamente aberta.

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_0$ uma base de vizinhanças convexas e equilibradas da origem em L. Se $B \in \mathcal{B}_0$ e $x \in L$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \in cB \Rightarrow T(x) \in T(cB) = cT(B).$$

Assim, $T(B)$ é convexo, equilibrado e absorvente em N. Dessa forma, $\overline{T(B)}$ é um tonel em N. Logo, $\overline{T(B)}$ é vizinhança da origem em N. $\square$

Lema 3.3.4. Suponha que L e N são espaços vetoriais topológicos, $\mathcal{B}_0$ e $\tilde{\mathcal{B}}_0$ são bases de vizinhanças em L e N, respectivamente, e $f : L \to N$ é uma transformação linear. Então

(a) f é contínua se, e somente se, $0 \in int(f^{-1}(\tilde{B}))$ para todo $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_0$.

(b) f é aplicação aberta se, e somente se, $0 \in int(f(B))$ para todo $B \in \mathcal{B}_0$.

Demonstração. (a)

Inicialmente, vamos supor que f é contínua. Dado $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_0$, então $int(\tilde{B})$ é aberto em N. Assim, $f^{-1}(int(\tilde{B}))$ é aberto em L, com $f^{-1}(int(\tilde{B})) \subset f^{-1}(\tilde{B})$. Logo, $0 \in int(f^{-1}(\tilde{B}))$.

Reciprocamente, suponhamos que $0 \in int(f^{-1}(\tilde{B}))$ para todo $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_0$. Dados U

aberto em N e $g \in f^{-1}(U)$, existe $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}_0$ tal que $f(g) + \tilde{B} \subset U$. Daí,

$$f(g + f^{-1}(\tilde{B})) = f(g) + f(f^{-1}(\tilde{B})) \subset f(g) + B \subset U.$$

Logo, $g + int(f^{-1}(\tilde{B})) \subset f^{-1}(U)$.

(b)

Inicialmente, vamos supor que f é aplicação aberta. Dado $B \in \mathcal{B}_0$, tem-se $0 \in int(B)$. Assim, $f(int(B))$ é aberto em N e

$$0 \in f(int(B)) \subset int(f(B)).$$

Reciprocamente, suponhamos que $0 \in int(f(B))$ para todo $B \in \mathcal{B}_0$. Dados U aberto em L e $g \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_0$ tal que $g + B \subset U$. Assim,

$$f(g) + f(B) = f(g + B) \subset f(U).$$

Por hipótese $f(B)$ é vizinhança da origem em N. Então, $f(g) + f(B)$ é vizinhança de $f(g)$. Logo

$$f(g) \in int(f(g) + f(B)) \subset f(U).$$

□

Teorema 3.3.5 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** *Suponha que L e N são espaços de Hausdorff localmente convexos e $T : L \to N$ é uma transformação linear contínua. Então*

(a) Se T é sobrejetiva e N é tonelado, então T é aproximadamente aberta;

(b) Se T é aproximadamente aberta e L é espaço de Fréchet, então T é aplicação aberta e sobrejetiva.

Demonstração. (a)

Segue imediatamente do Corolário 3.3.3.

(b)

Sendo L espaço de Fréchet, segue que L é 1 enumerável. Dada uma vizinhança U da origem em L, existe

$$\mathcal{B}_0 = \{B_1, B_2, \ldots\}$$

de modo que $B_1 \subset U$, $B_j = -B_j$, $B_{j+1} + B_{j+1} \subset B_j$ e todos os B_j são fechados em L.

Afirmação 3.3.1. Se V é vizinhança da origem em L, então $\overline{T(B_n)} \subset T(B_n) + V$.

Demonstração da afirmação:

Seja $y \in \overline{T(B_n)}$. Então, $[y - V] \cap T(B_n) \neq \emptyset$, isto é, existem $x_n \in B_n$ e $v_{n+1} \in V$ tais que $T(x_n) = y - v_{n+1}$. Assim, $y = T(x_n) + v_{n+1}$ e, por isso $\overline{T(B_n)} \subset T(B_n) + V$.

Retornemos para a demonstração do teorema. Dado $y \in \overline{T(B_2)}$, como $\overline{T(B_3)}$ é vizinhança da origem em N, temos $\overline{T(B_2)} \subset T(B_2) + \overline{T(B_3)}$. Assim, existem $x_2 \in B_2$ e $y_3 \in \overline{T(B_3)}$ tais que

$$y = T(x_2) + y_3.$$

Como $y_3 \in \overline{T(B_3)}$ e $\overline{T(B_4)}$ é vizinhança da origem em N, segue que $\overline{T(B_3)} \subset T(B_3) + \overline{T(B_4)}$. Assim, existem $x_3 \in B_3$ e $y_4 \in \overline{T(B_4)}$ tais que

$$y_3 = T(x_3) + y_4.$$

Recursivamente, teremos $\overline{T(B_n)} \subset T(B_n) + \overline{T(B_{n+1})}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existem $x_n \in B_n$ e $y_{n+1} \in \overline{T(B_{n+1})}$ tais que

$$y_n = T(x_n) + y_{n+1}.$$

Logo,

$$y = T(x_2) + y_3 = T(x_2) + T(x_3) + y_4 = \ldots = T(\sum_{i=2}^{n} x_j) + y_{n+1}.$$

Daí,

$$y_{n+1} = y - T(\sum_{i=2}^{n} x_j).$$

Como L é completo, segue que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} x_j \to x$, para algum $x \in L$ e, por T ser contínua, temos

$$y_{n+1} = y - T(\sum_{i=2}^{n} x_j) \to y - T(x).$$

Note que $y_n \in \overline{T(B_n)}$ para todo n e, se $k \geq n$, então

$$B_k \subset B_n \Rightarrow \overline{T(B_k)} \subset \overline{T(B_n)},$$

consequentemente, $y_k \in \overline{T(B_n)}$ para todo n. Como cada $\overline{T(B_n)}$ é fechado, segue que $y - T(x) \in \overline{T(B_n)}$.

Seja V uma vizinhança fechada da origem em N. Então, existe $B_r \in \mathcal{B}_0$ tal que $B_r \subset T^{-1}(V)$, pois T é contínua. Assim, $T(B_r) \subset V$ e, como V é fechado, segue que $\overline{T(B_r)} \subset V$. Sendo N Hausdorff, temos

$$y - T(x) = 0 \Rightarrow y = T(x).$$

Note que $B_2 + B_3 + \ldots + B_n \subset B_1$ para todo n, e portanto

$$\sum_{j=2}^{n} x_j \in B_1$$

para todo n. Como B_1 é fechado, segue que $x \in B_1$ e, consequentemente

$$y = T(x) \in T(B_1) \subset T(U) \Rightarrow \overline{T(B_2)} \subset T(U).$$

Portanto, $T(U)$ é vizinhança da origem.

Finalmente, vamos mostrar que T é sobrejetiva. Como T é aplicação aberta e L é aberto, segue que $T(L)$ é vizinhança aberta da origem em N. Dado $y \in N$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$y \in cT(L) = T(cL) \subset T(L).$$

□

Definição 3.3.2. Sejam X, Y conjuntos não vazios e $f : X \to Y$ uma função. Chamamos o gráfico de f, o conjunto

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}.$$

Teorema 3.3.6 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Suponha que L e N são espaços de Hausdorff localmente convexos, L é tonelado e N é Fréchet. Se $T : L \to N$ é uma transformação linear com o gráfico fechado em $L \times N$, então T é contínua.*

Demonstração. Seja uma vizinhança U equilibrada e convexa da origem em N. Como N é espaço de Fréchet, existe

$$\mathcal{B}_0 = \{B_1, B_2, \ldots\}$$

base de vizinhanças da origem em N, satisfazendo $B_1 \subset U$, $B_j = -B_j$, $B_{j+1} + B_{j+1} \subset B_j$ e cada B_j é fechado em N. Para cada B_j, existe W vizinhança equilibrada e convexa da origem em N tal que $W \subset B_j$.

Verifiquemos que $T^{-1}(W)$ é absorvente em L. Com efeito, dado $x \in L$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $T(x) \in cW$. Se $|t| > |c| \geq 0$, então

$$T(x) \in cW \subset |c|W \subset tW.$$

Assim,

$$x \in T^{-1}(tW) = tT^{-1}(W),$$

quando $|t| \geq \delta > |c|$. Logo $\overline{T^{-1}(W)}$ é um tonel em L e, por isso $\overline{T^{-1}(W)}$ é vizinhança da origem em L. Note que

$$W \subset B_j \Rightarrow \overline{T^{-1}(W)} \subset \overline{T^{-1}(B_j)}.$$

Portanto $\overline{T^{-1}(B_j)}$ é vizinhança da origem em L.

Da Afirmação 3.3.1, segue que $\overline{T^{-1}(B_2)} \subset T^{-1}(B_2) + \overline{T^{-1}(B_3)}$. Dado $x \in \overline{T^{-1}(B_2)}$, existem $x_2 \in T^{-1}(B_2)$ e $x_3' \in \overline{T^{-1}(B_3)}$ tais que

$$x = x_2 + x_3'.$$

Como $x_3' \in \overline{T^{-1}(B_3)}$ e $\overline{T^{-1}(B_4)}$ é vizinhança da origem em L, segue que $\overline{T^{-1}(B_3)} \subset T^{-1}(B_3) + \overline{T^{-1}(B_4)}$. Assim, existem $x_3 \in T^{-1}(B_3)$ e $x_4' \in \overline{T^{-1}(B_4)}$ tais que

$$x_3' = x_3 + x_4'.$$

Recursivamente, teremos $\overline{T^{-1}(B_n)} \subset T^{-1}(B_n) + \overline{T^{-1}(B_{n+1})}$. Assim, existem $x_n \in T^{-1}(B_n)$ e $x_{n+1}' \in \overline{T^{-1}(B_{n+1})}$ tais que

$$x_n' = x_n + x_{n+1}'.$$

Logo,

$$x = x_2 + x_3' = x_2 + x_3 + x_4' = \ldots = \sum_{j=2}^{n} x_j + x_{n+1}'.$$

Consequentemente,

$$x_{n+1}' = x - \sum_{j=2}^{n} x_j \in \overline{T^{-1}(B_{n+1})}.$$

Como $T(x_j) \in B_j$ para todo j e N é completo, existe $y \in N$ tal que $\sum_{j=2}^{n} T(x_j) \to y$. Uma vez que $B_2 + B_3 + \ldots + B_n \subset B_1$ para todo n, temos

$$\sum_{j=2}^{n} T(x_j) \in B_1$$

e, como B_1 é fechado, $y \in B_1$.

Sejam uma vizinhança V equilibrada e convexa da origem em L e $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\overline{T^{-1}(B_{n+1})} \subset T^{-1}(B_{n+1}) + V.$$

Assim, $x - \sum_{j=2}^{n} x_j \in T^{-1}(B_{n+1}) + V$, ou seja, existem $v \in V$ e $x_{n+1}'' \in T^{-1}(B_{n+1})$ tais

que
$$x - \sum_{j=2}^{n} x_j = x''_{n+1} + v \Rightarrow x''_{n+1} - \sum_{j=2}^{n} x_j = x - v \in x + V.$$
Note que
$$y = \sum_{j=2}^{\infty} T(x_j) = \sum_{j=2}^{n} T(x_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} T(x_j).$$
Defina $\tilde{y}_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{\infty} T(x_j)$ e, por isso
$$y = \tilde{y}_n + T(\sum_{j=2}^{n} x_j).$$
Como $B_{n+1} + B_{n+2} + B_{n+3} + \ldots + B_N \subset B_n$ para todo $N > n$, segue que
$$\sum_{j=n+1}^{N} T(x_j) \in B_n$$
e, como B_n é fechado, $\tilde{y}_n \in B_n$. Agora,
$$T(x''_{n+1}) - \tilde{y}_n \in B_{n+1} + B_n \subset B_{n-1}.$$
Por outro lado,
$$T(x''_{n+1} + \sum_{j=2}^{n} x_j) = T(x''_{n+1}) + \sum_{j=2}^{n} T(x_j) = y + T(x''_{n+1}) - \tilde{y}_n \in y + B_{n-1}.$$

Finalmente,
$$\begin{aligned}(x, y) + (-v, T(x''_{n+1}) - \tilde{y}_n) &= (x - v, y + T(x''_{n+1}) - \tilde{y}_n) \\ &= (x''_{n+1} + \sum_{j=2}^{n} x_j, T(x''_{n+1} + \sum_{j=2}^{n} x_j)).\end{aligned}$$
Portanto, $[(x, y) + V \times B_{n-1}] \cap Graf(T) \neq \emptyset$. Dessa forma, $(x, y) \in Graf(T)$, pois $Graf(T)$ é fechado em $L \times N$. Mais ainda, $y = T(x)$ e
$$T(x) = y \in B_1 \subset U \Rightarrow x \in T^{-1}(U) \Rightarrow \overline{T^{-1}(B_2)} \subset T^{-1}(U).$$
Logo, $T^{-1}(U)$ é vizinhança da origem em L. $\square$

Apêndice A

Resultados Básicos

A.1 Álgebra

Definição A.1.1. Um **Anel comutativo** $(A, +, \cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por $+$, chamada adição, e de uma operação denotada por $\cdot$, chamada multiplicação que satisfazem as condições seguintes:

(a1) A adição é associativa, isto é,

$$\forall x, y, z \in A, (x + y) + z = x + (y + z);$$

(a2) Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,

$$\exists 0 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, 0 + x = x \text{ e } x + 0 = x;$$

(a3) Todo elemento de A possui inverso com respeito à adição, isto é,

$$\forall x \in A, \exists z \in A : z + x = x + z = 0;$$

(a4) A adição é comutativa, isto é,

$$\forall x, y \in A, x + y = y + x;$$

(m1) A multiplicação é associativa, isto é,

$$\forall x, y, z \in A, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

(m2) Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, isto é,

$$\exists 1 \in A : \forall x \in A, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x;$$

(m3) A multiplicação é comutativa, isto é,

$$\forall x, y \in A : x \cdot y = y \cdot x;$$

(am) A adição é distributiva relativamente à adição, isto é,

$$\forall x, y, z \in A : x \cdot (y + z) x \cdot y + x \cdot z;$$

Se todas as condições são satisfeitas exceto m3, então $(A, +, \cdot)$ é chamado **Anel não comutativo**.

Um anel $(A, +, \cdot)$ é chamado um **corpo** se todo elemento diferente de zero possui um inverso multiplicativo, isto é,

$$\forall x \in A \backslash \{0\}, \exists z \in K : x \cdot z = z \cdot x = 1.$$

Exemplo A.1.1. $(\mathbb{R}, +, *)$ é um corpo comutativo com a soma e produto usuais e $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é um corpo valorado.

Exemplo A.1.2. Defina

$$Quat = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

e dados $p, q \in Quat$ da forma $p = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $q = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$, definimos

$$p + q = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

e

$$\begin{aligned} p * q =& (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - c_2 d_1)i \\ &+ (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)k. \end{aligned}$$

Além disso, se $p \neq 0$, então

$$r = \frac{a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}$$

é tal que $p * r = r * p = 1$. Note que

$$i * j = 0 + 0i + 0j + k = k$$

e

$$j * i = 0 + 0i + 0j - k = -k.$$

O conjunto $Quat$ com as operações definidas acima é um corpo não comutativo, e é chamado de **Quaternios**. Agora, vamos definir um valor absoluto em $Quat$, da seguinte forma

$$|p| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}.$$

Assim, $|p| \geq 0$, para todo $p \in Quat$ e $|p| = 0$ se, e somente se, $p = 0$. Ademais,

$$|p * q| = |p| \cdot |q|$$

e

$$|p + q| \leq |p| + |q|.$$

Definição A.1.2. Um corpo K é **ordenado**, se existe $P \subset K$ satisfazendo as condições:

(O1) Se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $x * y \in P$;

(O2) Para todo $x \in K$, tem-se $x \in P$ ou $-x \in P$ ou $x = 0$.

Definição A.1.3. Sejam (K, P) um corpo ordenado e $x, y \in K$. Definimos

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

Definição A.1.4. Sejam K um corpo ordenado e $A \subset K$. Dizemos que A é **limitado superiormente**, se existe $c \in K$, tal que $x < c$, para todo $x \in A$. Chamamos c de cota superior de A.

Se K é um corpo infinito e ordenado, então identificamos o conjuntos dos números naturais da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \to K \\ &n \to n * 1_K. \end{aligned}$$

Definição A.1.5. Um corpo K ordenado e infinito é dito **Arquimediano** se $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em K.

A.2 Topologia

Definição A.2.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço de Hausdorff** se para quaisquer $x, y \in X$, existem U, V vizinhanças de x, y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.

Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto e $f : X \to Y$ uma função sobrejetiva. Considere o conjunto

$$\tau = \{S \subset Y : f^{-1}(S) \text{ é aberto em } X\}$$

e verifiquemos que τ é uma topologia em Y. De fato, $f^{-1}(Y) = X$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Seja $(S_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de τ. Assim,

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} S_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(S_i)$$

é aberto em X. Se $(S_i)_{i\in J}$ é uma família finita de elementos de τ, então

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in J} S_i) = \bigcap_{i\in J} f^{-1}(S_i)$$

é um aberto de X. Chamaremos τ de **topologia quociente**.

Definição A.2.2. Um subconjunto K do espaço topológico X é **compacto**, se para toda coleção $(A_i)_{i\in I}$ de abertos em X tal que $K \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \ldots, i_n \in I$ tais que $K \subset (A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n})$.

Teorema A.2.1 (Teorema de Tychonoff)**.** *Seja $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma família de espaços topológicos. Então o produto cartesiano generalizado $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ é compacto na topologia produto se, e somente se, X_α é compacto para todo $\alpha \in I$.*

Referências Bibliográficas

[1] Botelho, G. M. A.; Pellegrino, D. M.; Texeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 423 p.

[2] Lima, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 297 p.

[3] Schaefer, H. H. *Topological Vector Spaces*. Springer Verlag, 1970. 294 p.

[4] Osborne, M. S. *Locally Convex Spaces*. Springer. 213 p.

[5] Willard, S. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970. 369 p.