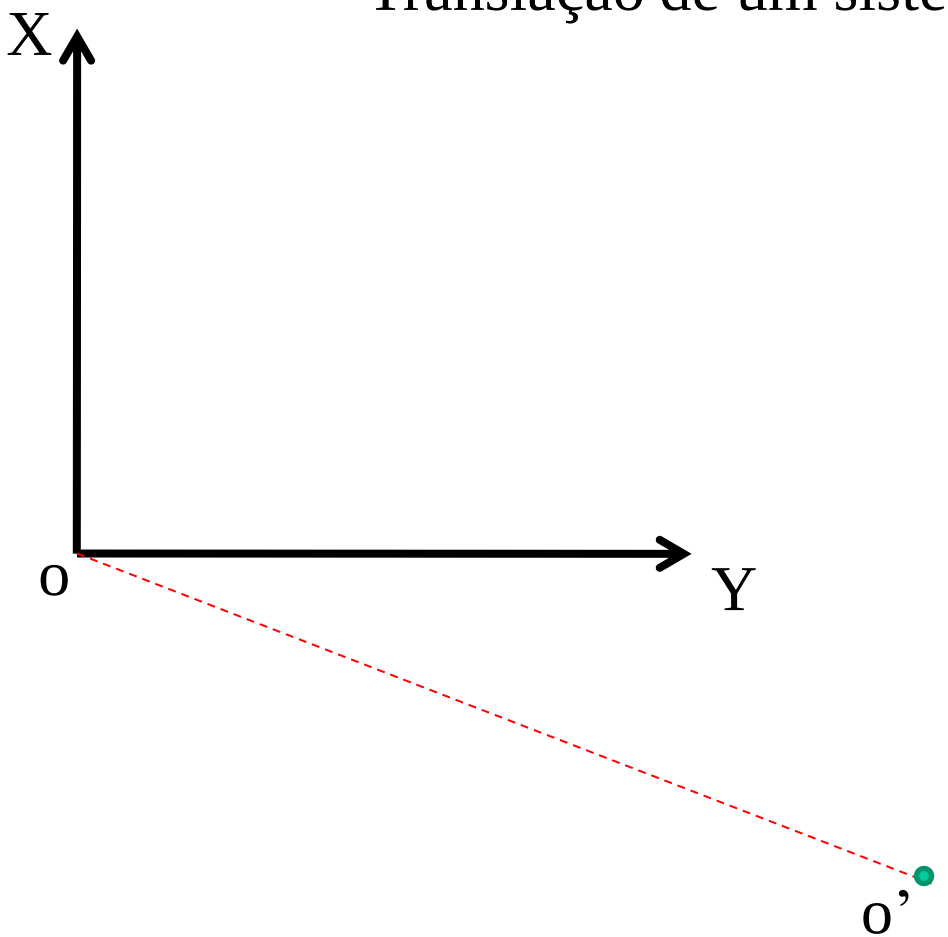
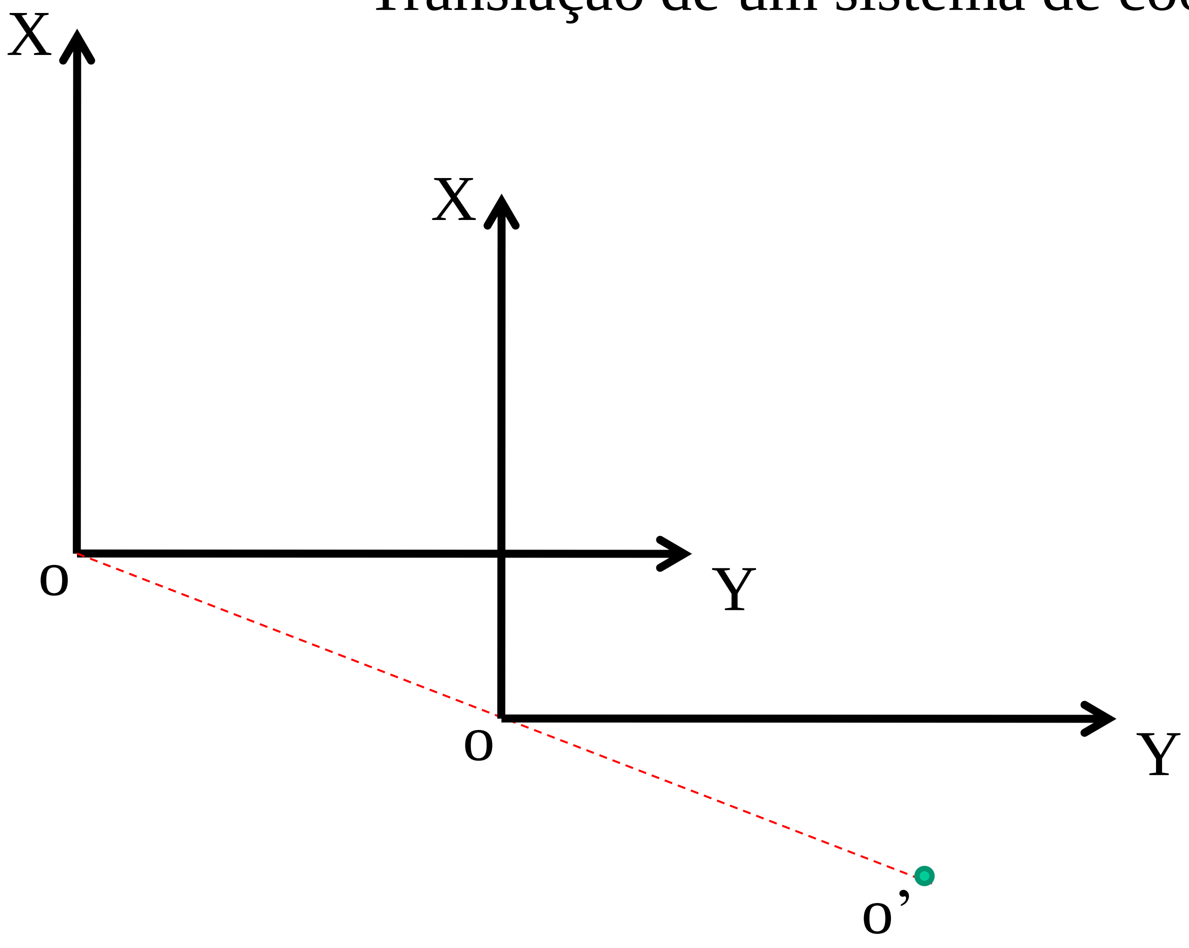
Sistemas de coordenadas tridimensionais
Translação e rotação de sistemas

- Prof. Dr. Carlos Aurélio Nadal

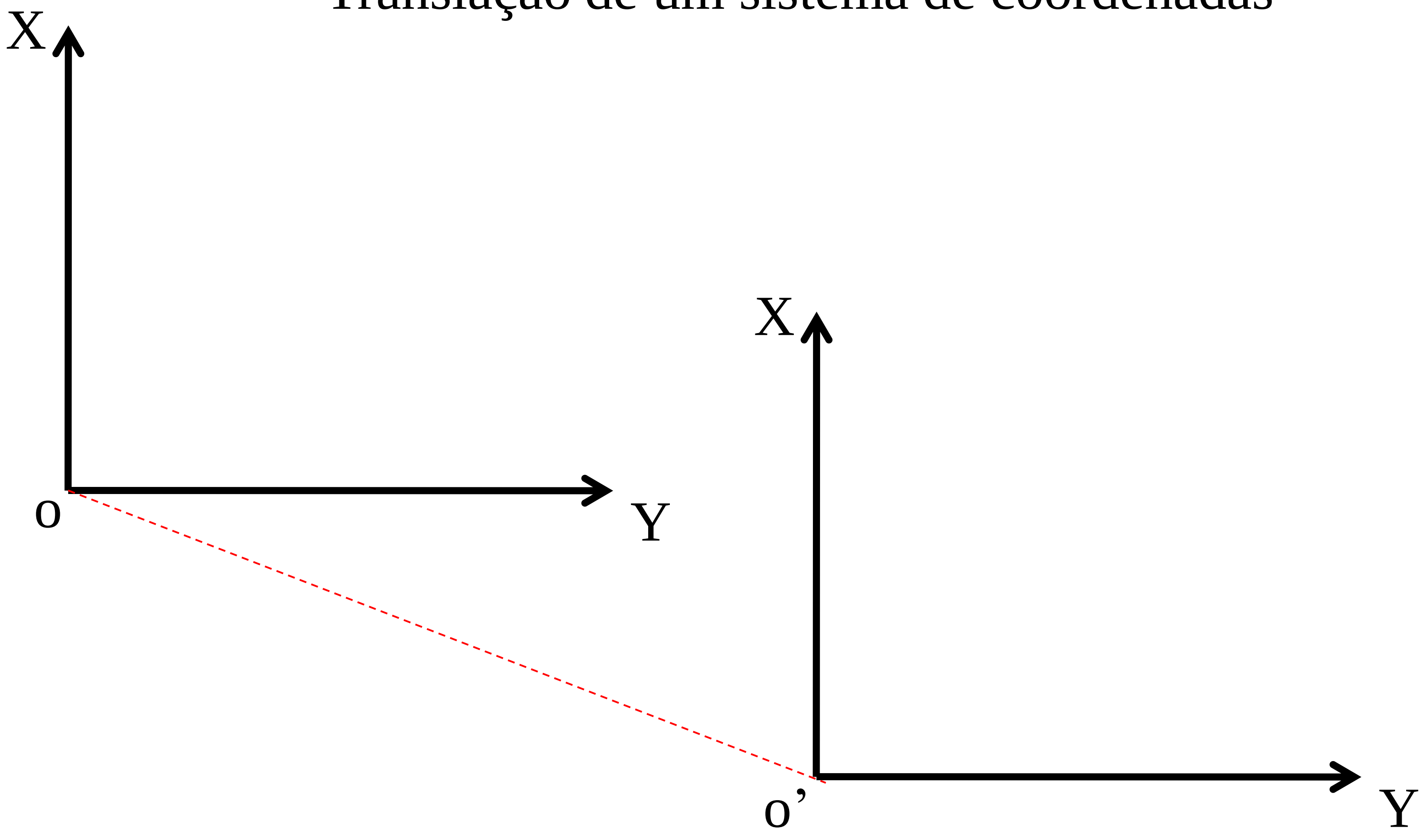
Translação de um sistema de coordenadas



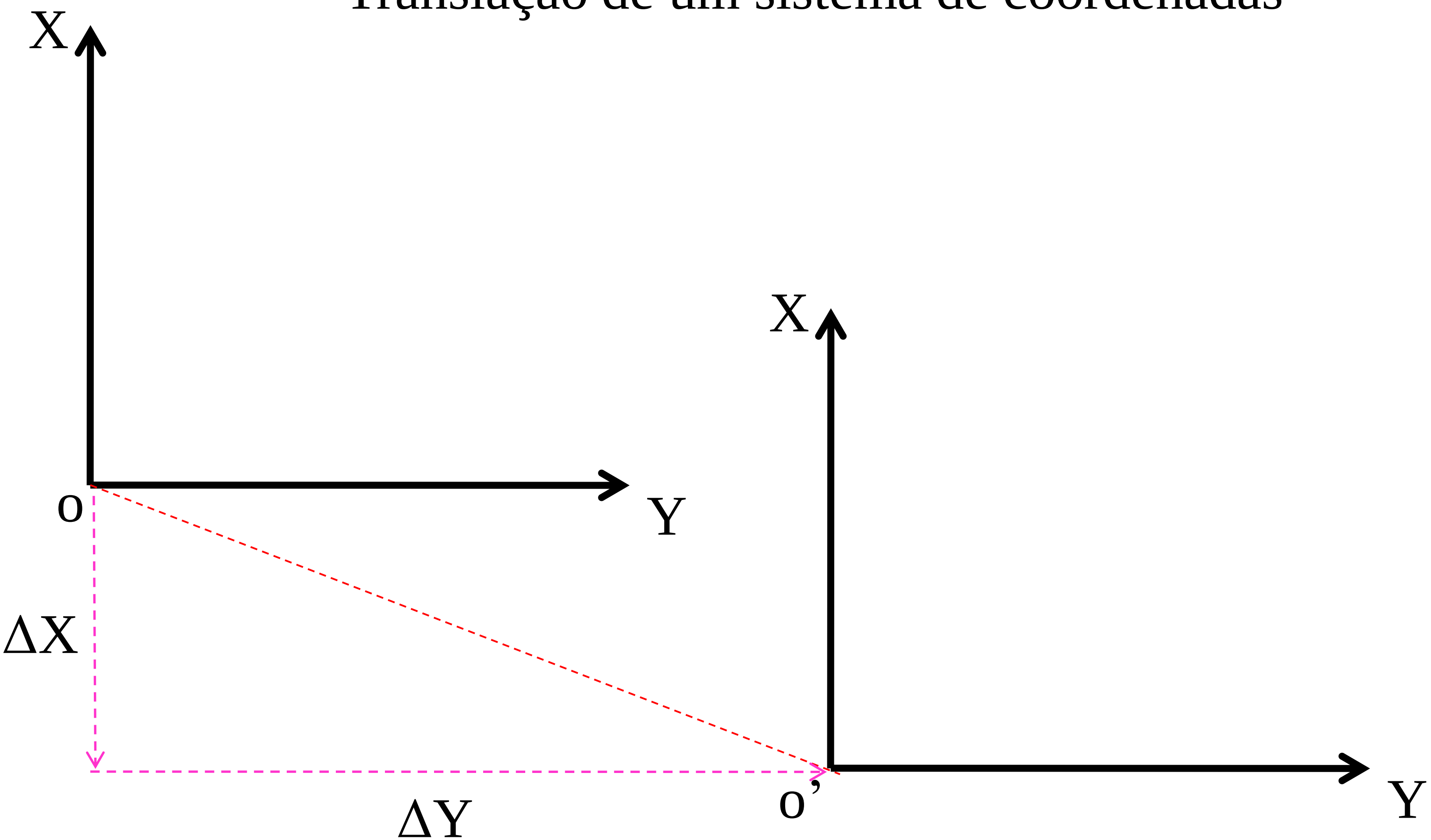
Translação de um sistema de coordenadas



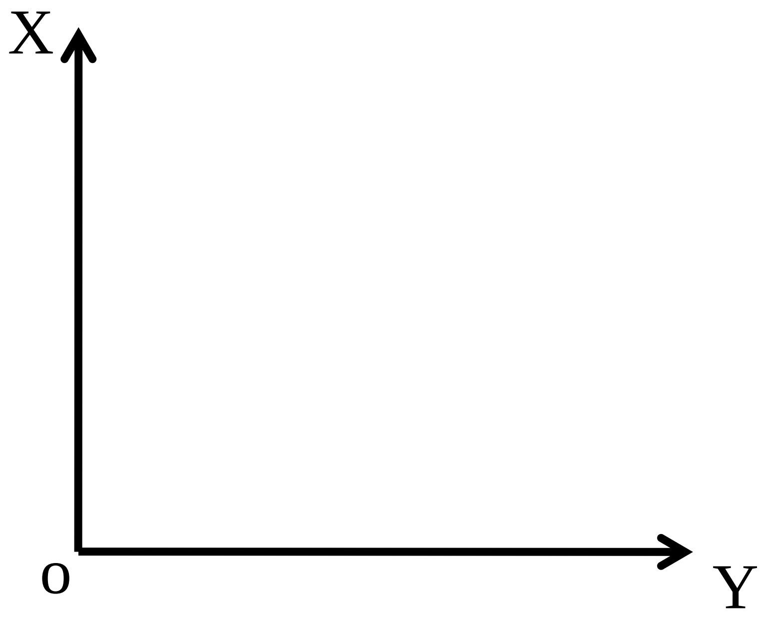
Translação de um sistema de coordenadas



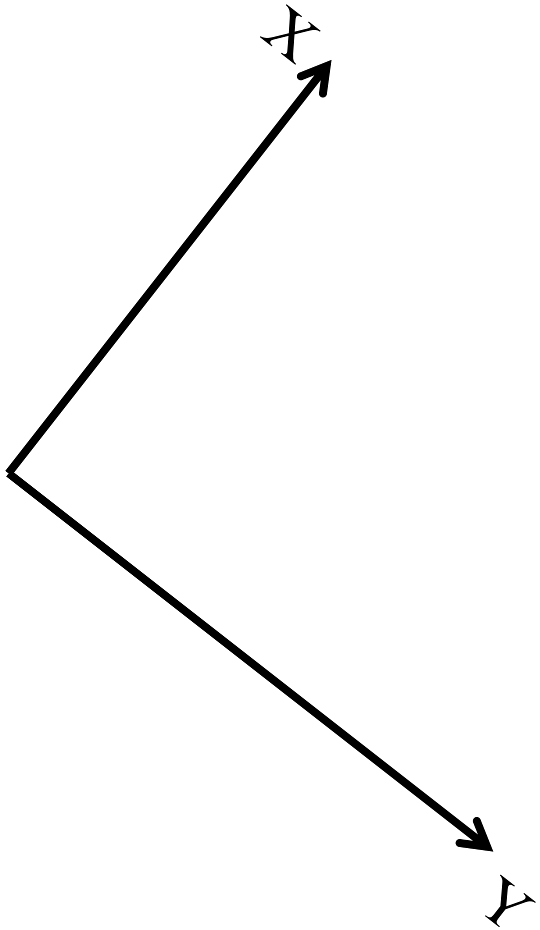
Translação de um sistema de coordenadas



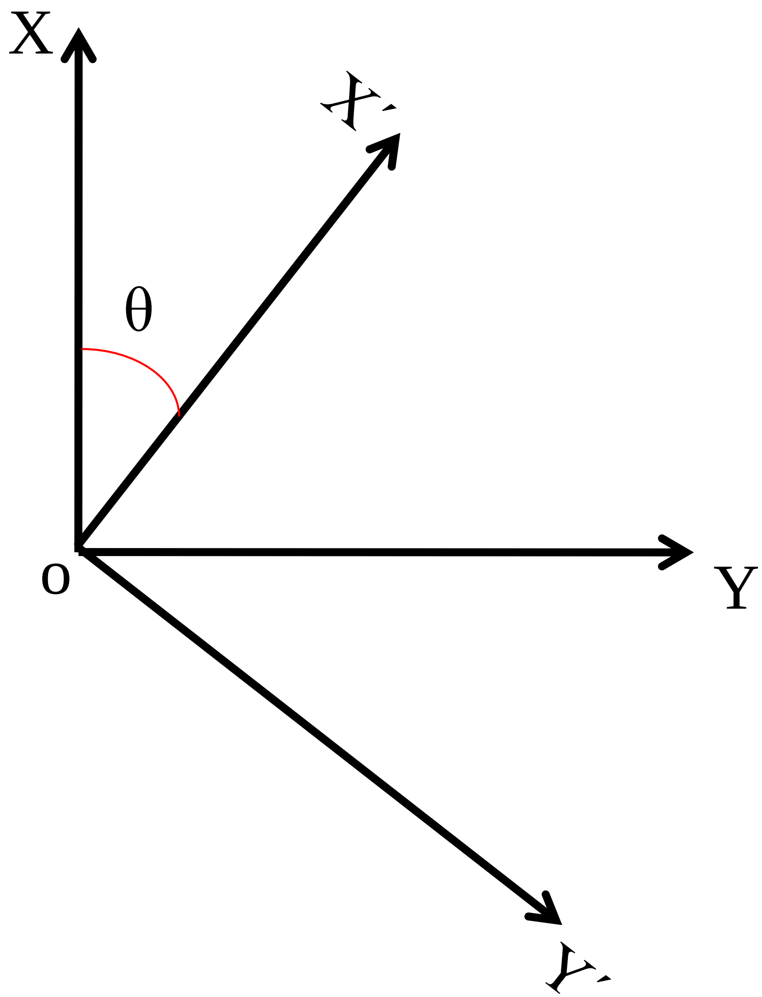
Rotação de um sistema de coordenadas



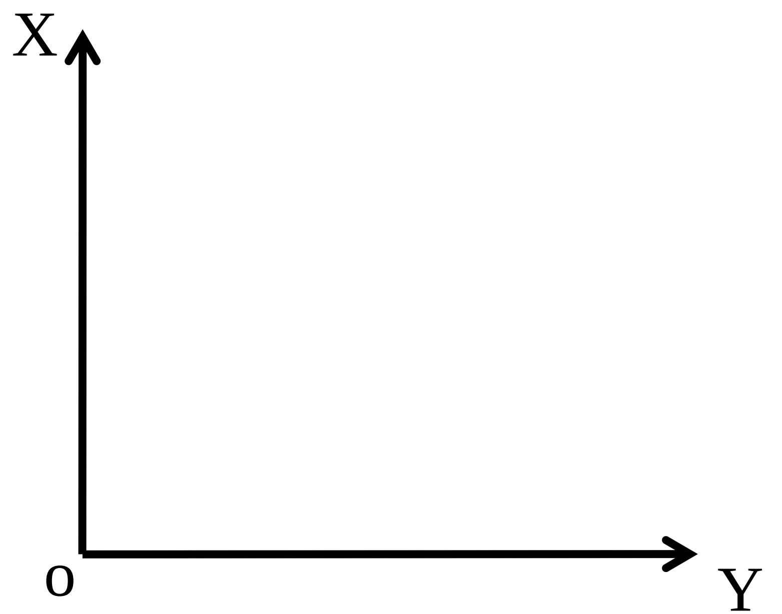
Rotação de um sistema de coordenadas



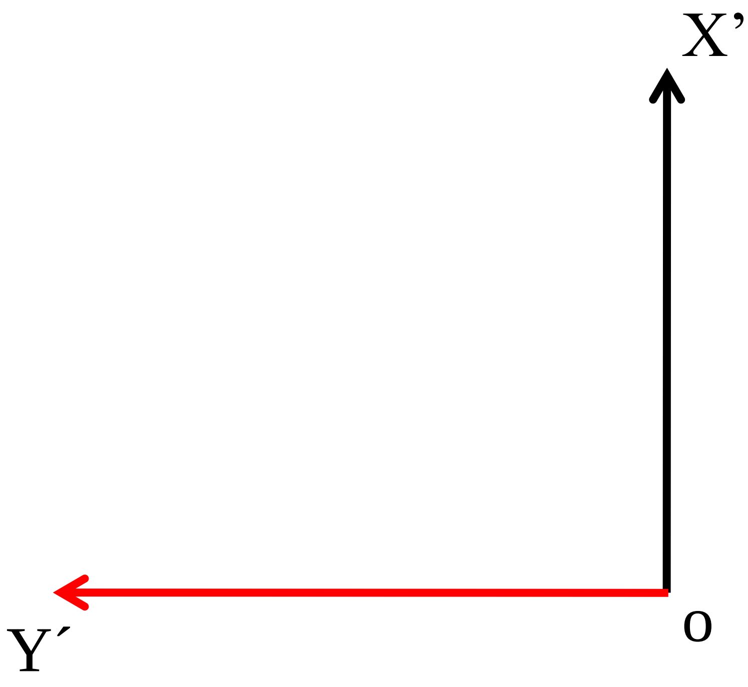
Rotação de um sistema de coordenadas



Reflexão de um sistema de coordenadas



Reflexão de um sistema de coordenadas



TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

ESCALAÇÃO, OU TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA:

é obtida pela multiplicação de todas as coordenadas que definem a entidade, por fatores de escala não nulos.

- fator de escala horizontal: $\mathbf{E_x}$
- fator de escala vertical: $\mathbf{E_y}$

Escalação de um ponto $\mathbf{P_1\ (x, y)}$, para $\mathbf{P_1\ (x', y')}$,

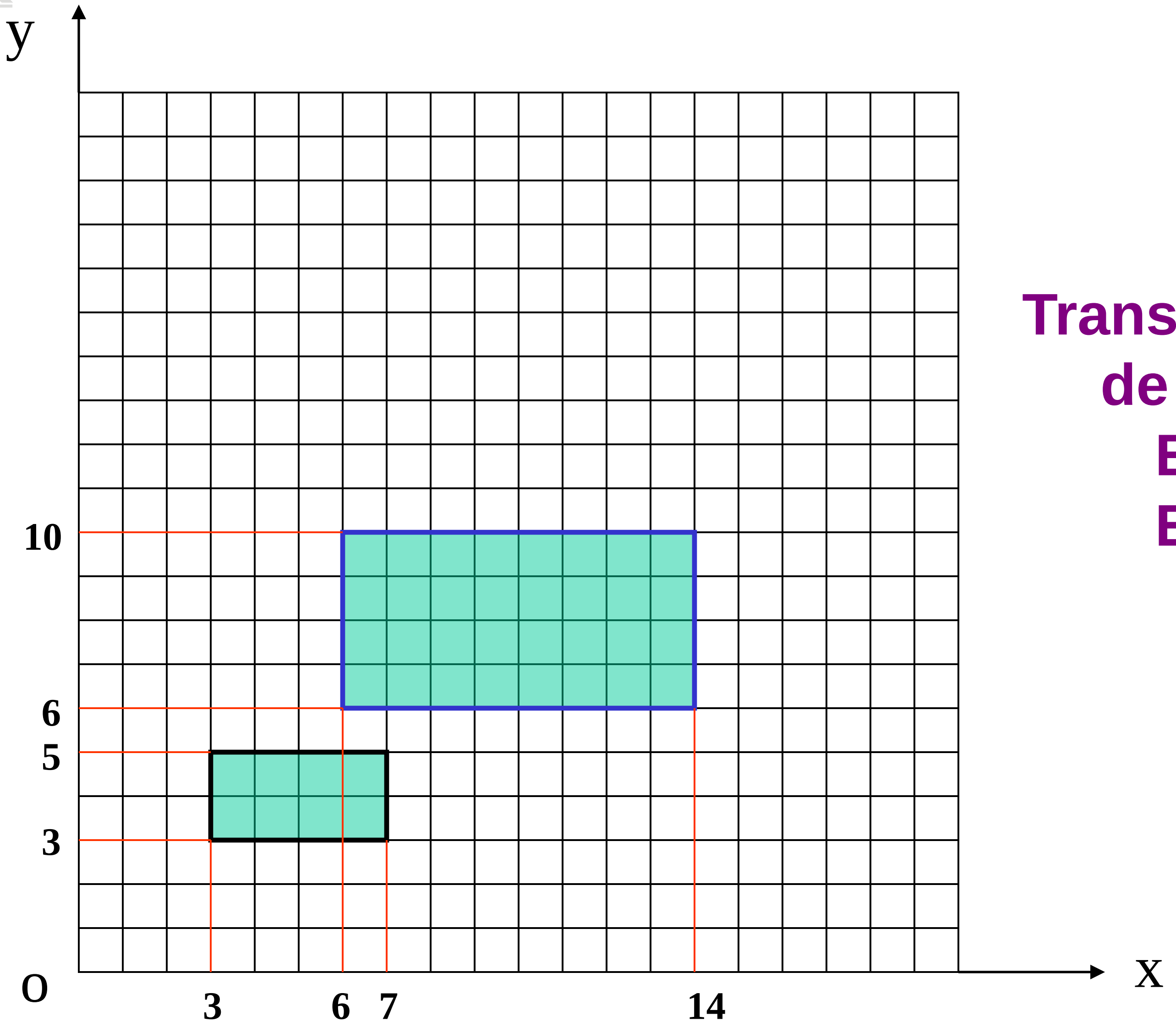
$$E_x \quad x' = E_x * x$$

$$E_y \quad y' = E_y * y$$

$E > 1$ Um fator de escala E maior que 1 provoca uma ampliação da entidade na direção do eixo afetado pelo fator.

$0 < E < 1$ Um fator de escala E entre zero e 1 provoca uma redução da entidade.

$E < 0$ Um fator de escala E menor que zero, ou negativo, provoca um espelhamento da entidade em relação ao eixo não afetado pelo fator.



Transformação de escala

$E_x = 2$

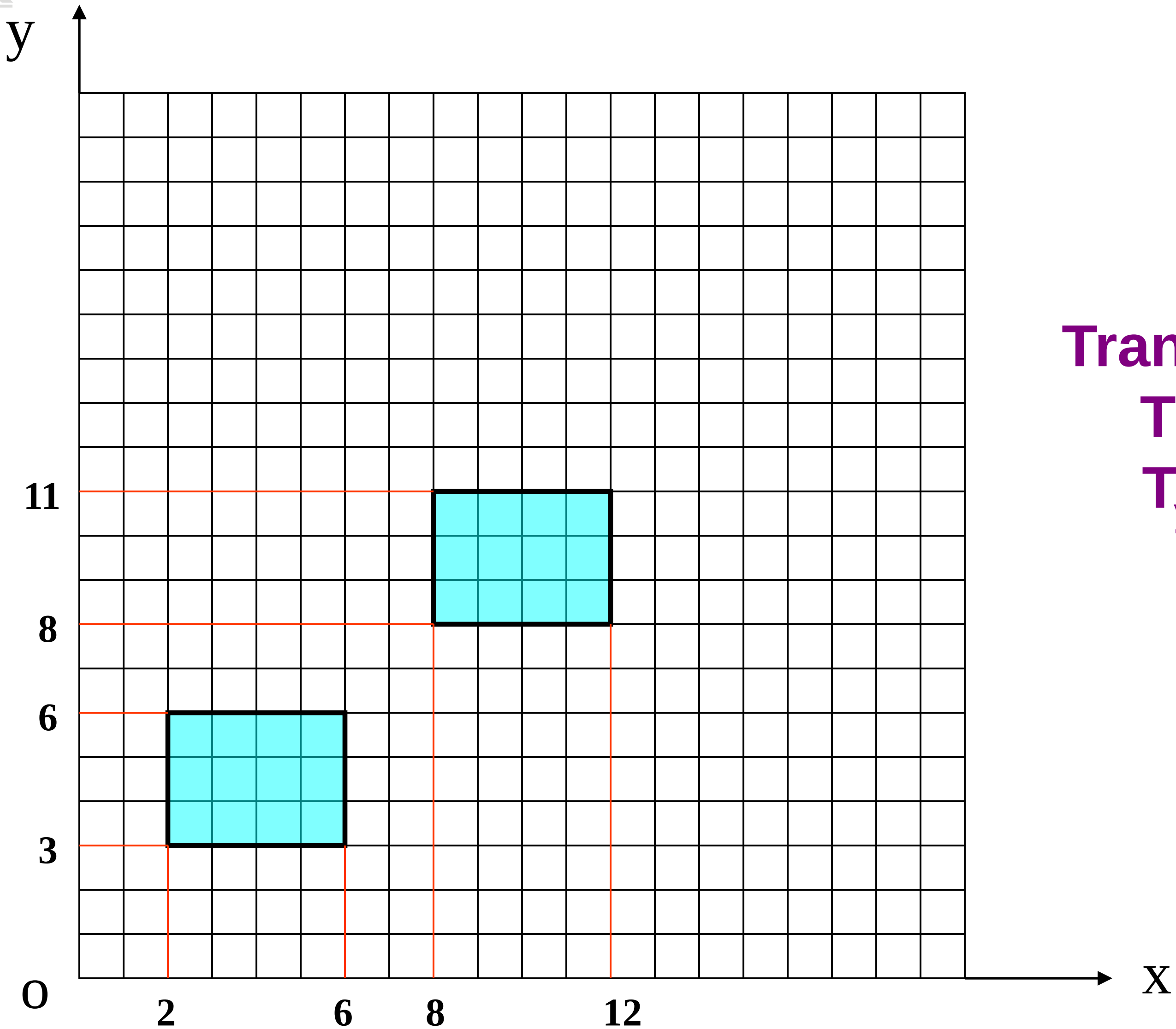
$E_y = 2$

TRANSLAÇÃO:

Em termos visuais, a translação de uma entidade produz um efeito de mudança de posição de uma entidade gráfica, em relação ao seu sistema de coordenadas. Em termos matemáticos a translação de uma entidade gráfica é a operação de adição de constantes de translação (positivas e/ou negativas) às coordenadas dos elementos formadores da entidade.

Translação de um ponto $P_1 (x, y)$, para $P_1 (x', y')$, com constantes de translação T_x e T_y:

$$x' = x + T_x$$
$$y' = y + T_y$$



Translação

$T_x = 6$

$T_y = 5$

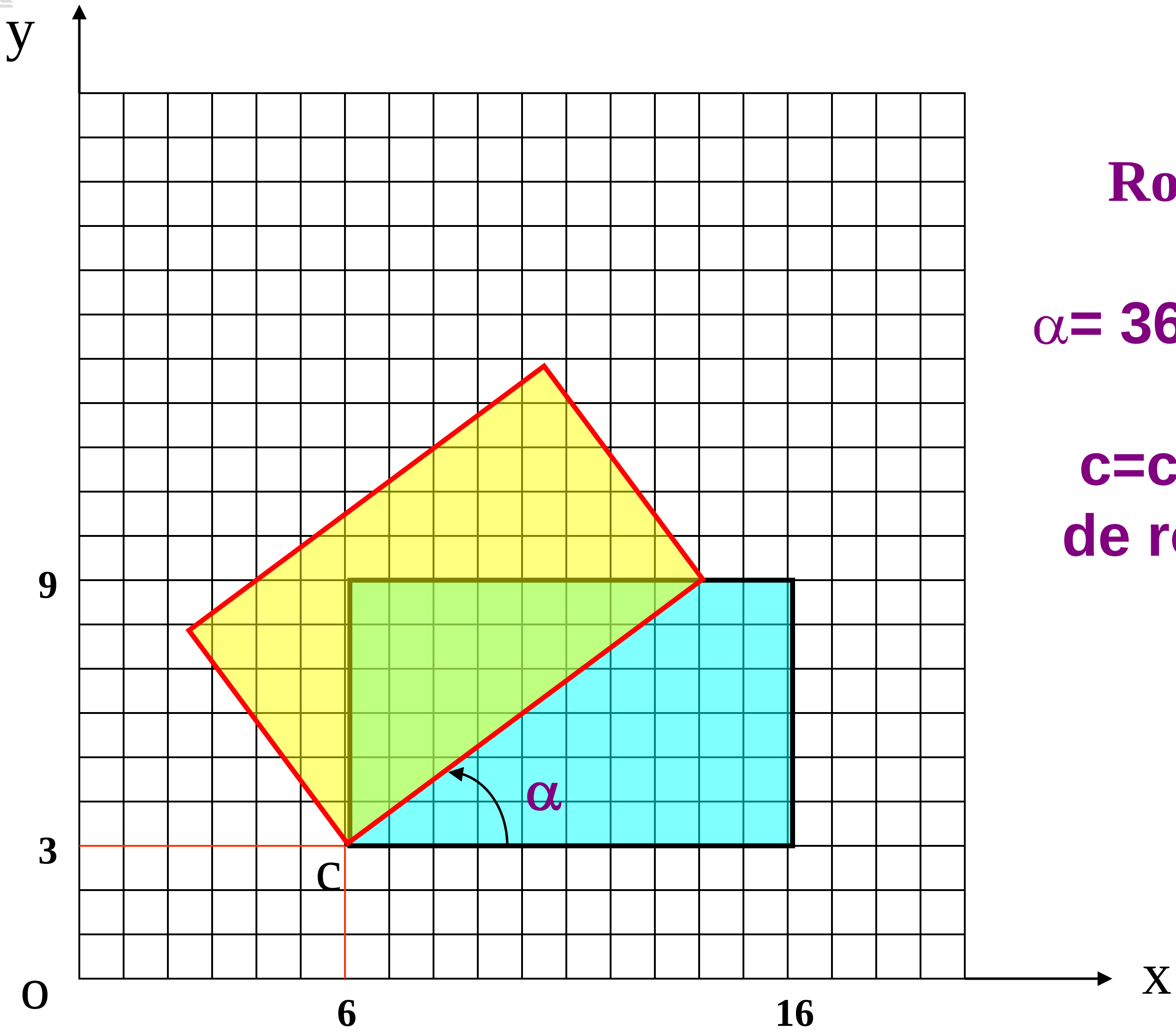
ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO (CENTRO DE ROTAÇÃO):

Em termos visuais, a rotação de uma entidade produz um efeito de mudança de posição desta entidade gráfica, de modo que todos os pontos mantenham a mesma distância do centro de rotação.

O único parâmetro de transformação para a rotação é o ângulo α (convenção positiva: sentido anti-horário).

Rotação de um ponto $\mathbf{P_1\ (x, y)}$, para $\mathbf{P_1\ (x', y')}$, de um ângulo α em torno da origem, temos:

$$x' = x * \cos\alpha - y * \operatorname{sen}\alpha$$
$$y' = y * \cos\alpha + x * \operatorname{sen}\alpha$$



Rotação

α= 36 52 12“

c=centro de rotação

TRANSFORMAÇÃO LINEAR

A equação matricial

$$Y = A\,X$$

A = MATRIZ TRANSFORMAÇÃO

X e Y vetores

Interpretações da equação:

1) X e Y = diferentes vetores referidos ao mesmo sistema de coordenadas;

   transformação descreve coordenadas de Y em termos das coordenadas de X.

   Operação: transformar X em Y.

A equação matricial

$$Y = A\,X$$

2) X e Y são o mesmo vetor, com seus elementos referidos a diferentes sistemas de coordenadas;
A matriz A descreve a relação entre os sistemas de coordenadas.
Operação: transformar o sistema de coordenadas a que X se refere o sistema que se refere a Y

TRANSFORMAÇÃO LINEAR PROJETIVA

Matriz A = quadrada e não singular

$$|A| \neq 0$$

Existe a transformação inversa:

$$X = A^{-1}\,Y$$

TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL

-Não há variação no comprimento do vetor durante a transformação.

Quadrado do comprimento do vetor:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2$$

Como o comprimento do vetor é invariável:

$$X^T X = Y^T Y$$

e

$$Y = A X$$

então,

$$Y^T Y = (A X)^T A X = X^T (A^T A) X = X^T X$$

TRANSFORMAÇÃO ORTOGONAL

REFLEXÃO: matriz ortogonal própria $|A| = +1$

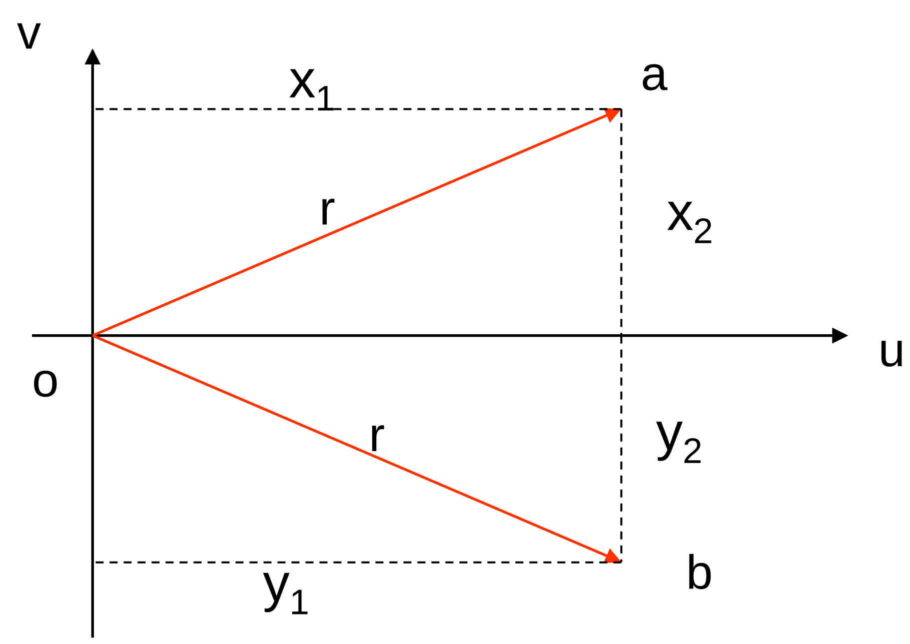
ROTAÇÃO: matriz ortogonal imprópria $|A| = -1$

REFLEXÃO NO PLANO (DUAS DIMENSÕES)

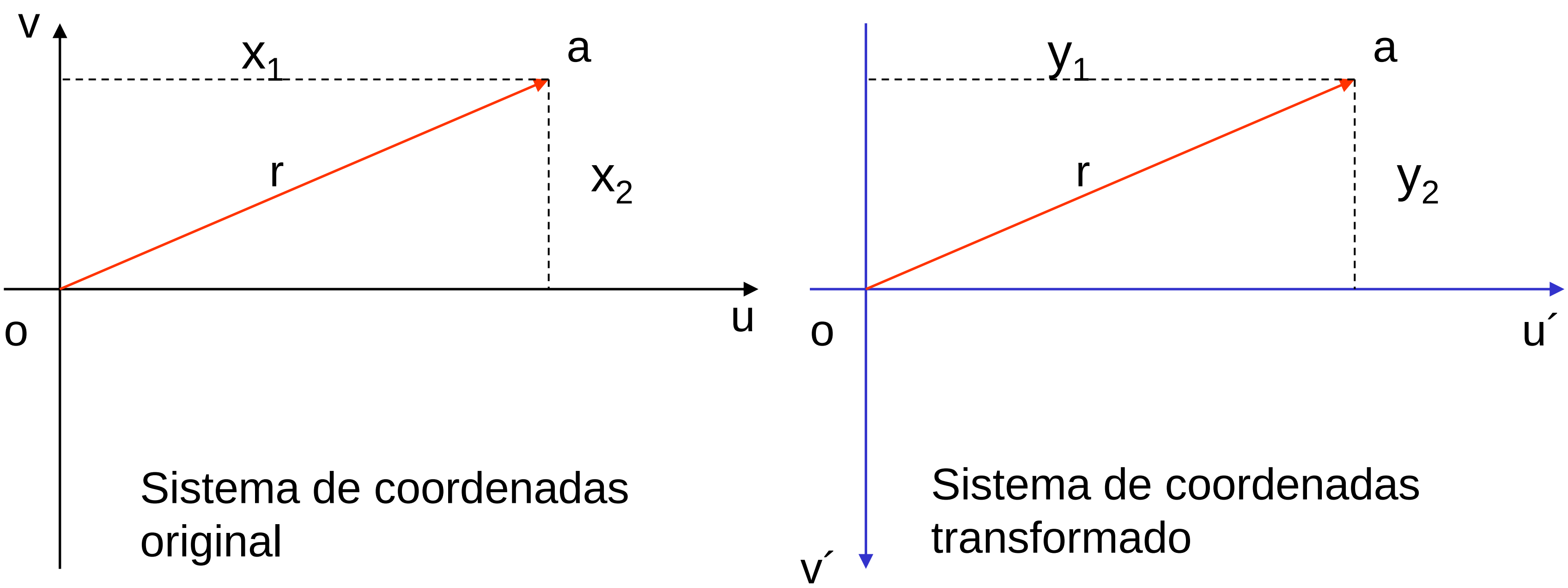
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) SISTEMA DE COORDENADAS É O MESMO

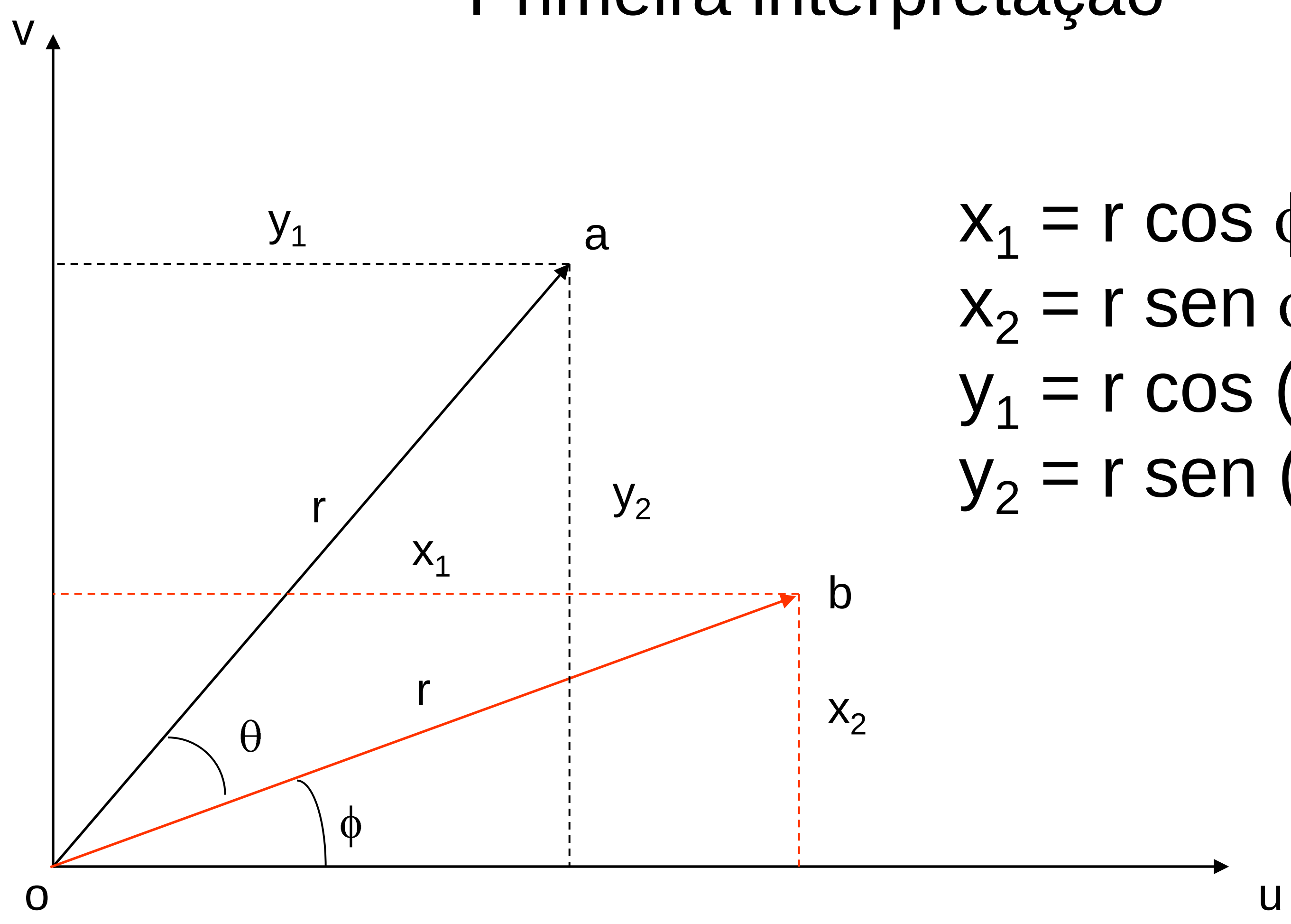
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = -x_2$$



2) Muda o sistema de coordenadas e o vetor permanece inalterado



ROTAÇÃO NO PLANO (DUAS DIMENSÕES)
Primeira interpretação



$$x_1 = r \cos \phi$$
$$x_2 = r \,\text{sen}\, \phi$$
$$y_1 = r \cos (\phi+\theta)$$
$$y_2 = r \,\text{sen}\, (\phi+\theta)$$

$$y_1 = r\cos\phi\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y_2 = r\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta + r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$$

ou,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

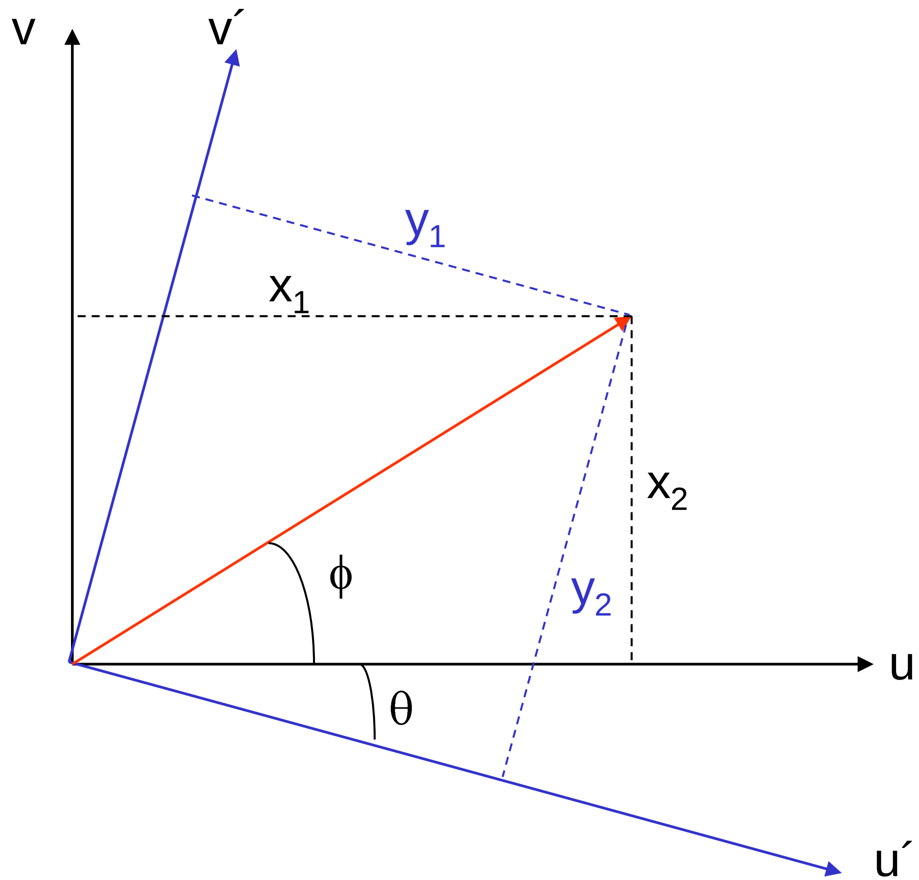
ou,

$$Y = R\,X$$

R é ortogonal

$$\mathbf{R\,R^T = I}$$
$$\mathbf{R^{-1} = R^T}$$
$$\mathbf{R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta)}$$

ROTAÇÃO NO PLANO (DUAS DIMENSÕES)
Primeira interpretação

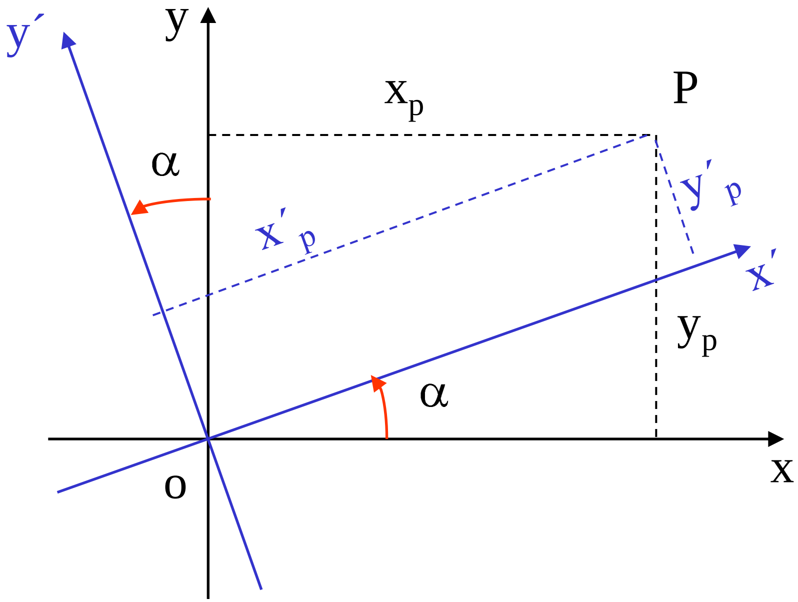


Sistema de coordenadas original

Sistema obtido após a Rotação θ

Rotação entre sistemas

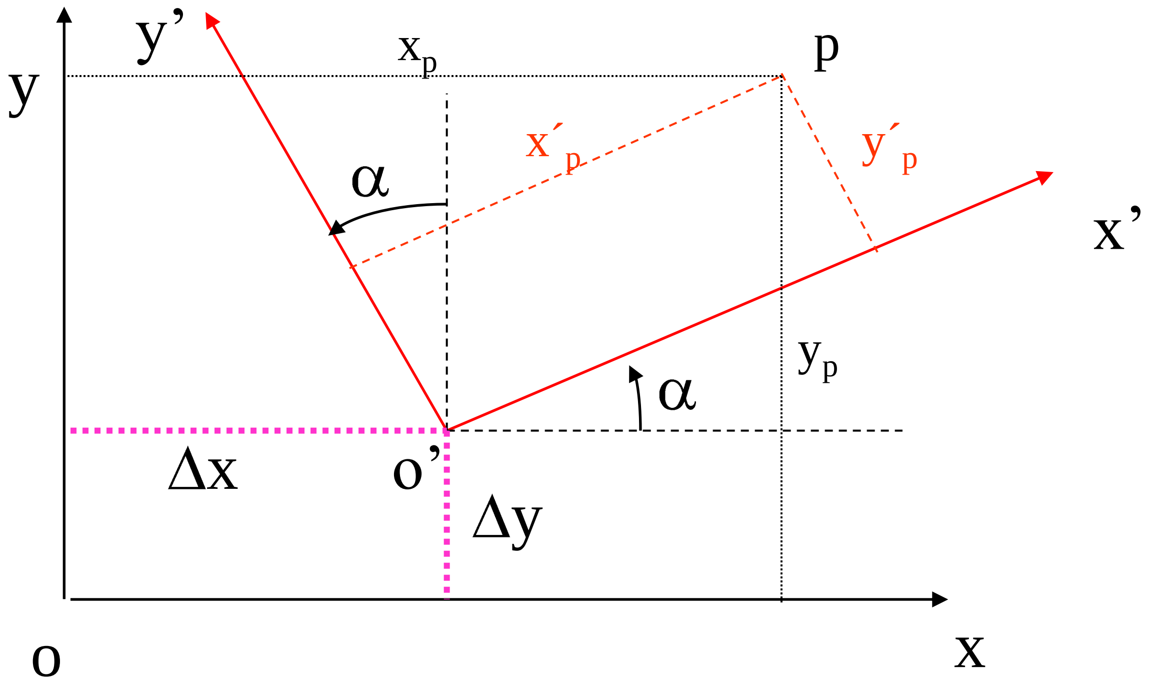
- girar um sistema em relação a outro através do ângulo de rotação de α.



$$x_p = x'_p \cdot \cos\alpha + y'_p \cdot \operatorname{sen}\alpha$$
$$y_p = -x'_p \cdot \operatorname{sen}\alpha + y'_p \cdot \cos\alpha$$

Rotação positiva no sentido anti-horário

Rotação e translação entre os sistemas



$$x_p = x'_p \cdot \cos\alpha + y'_p \cdot \text{sen}\,\alpha + \Delta x$$
$$y_p = -\,x'_p \cdot \text{sen}\,\alpha + y'_p \cdot \cos\alpha + \Delta y$$

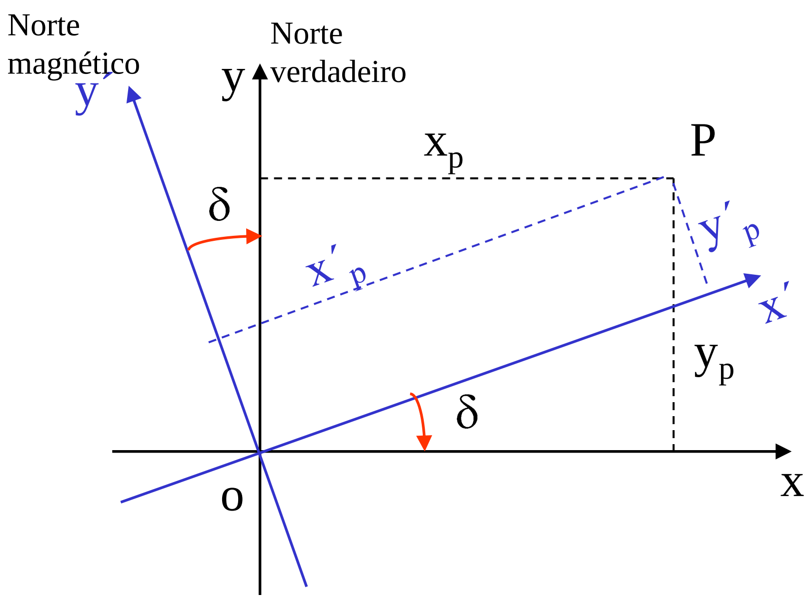
Transformação afim no plano

Exercício:

As coordenadas de um vértice de poligonal topográfica foram obtidas utilizando um azimute magnético para o lado que contem o vértice, obtendo-se:
$x'_p = 10{,}003$m e $y'_p = 2{,}005$m. Ao se calcular a declinação magnética do local obteve-se $\delta=-17$ W. Calcular as coordenadas deste vértice usando-se o azimute verdadeiro da direção considerada.

Solução:

A declinação magnética comporta-se como se fora uma rotação do sistema de coordenadas topográficas associada ao norte magnético para se chegar a um sistema associado ao norte verdadeiro como mostrado abaixo:

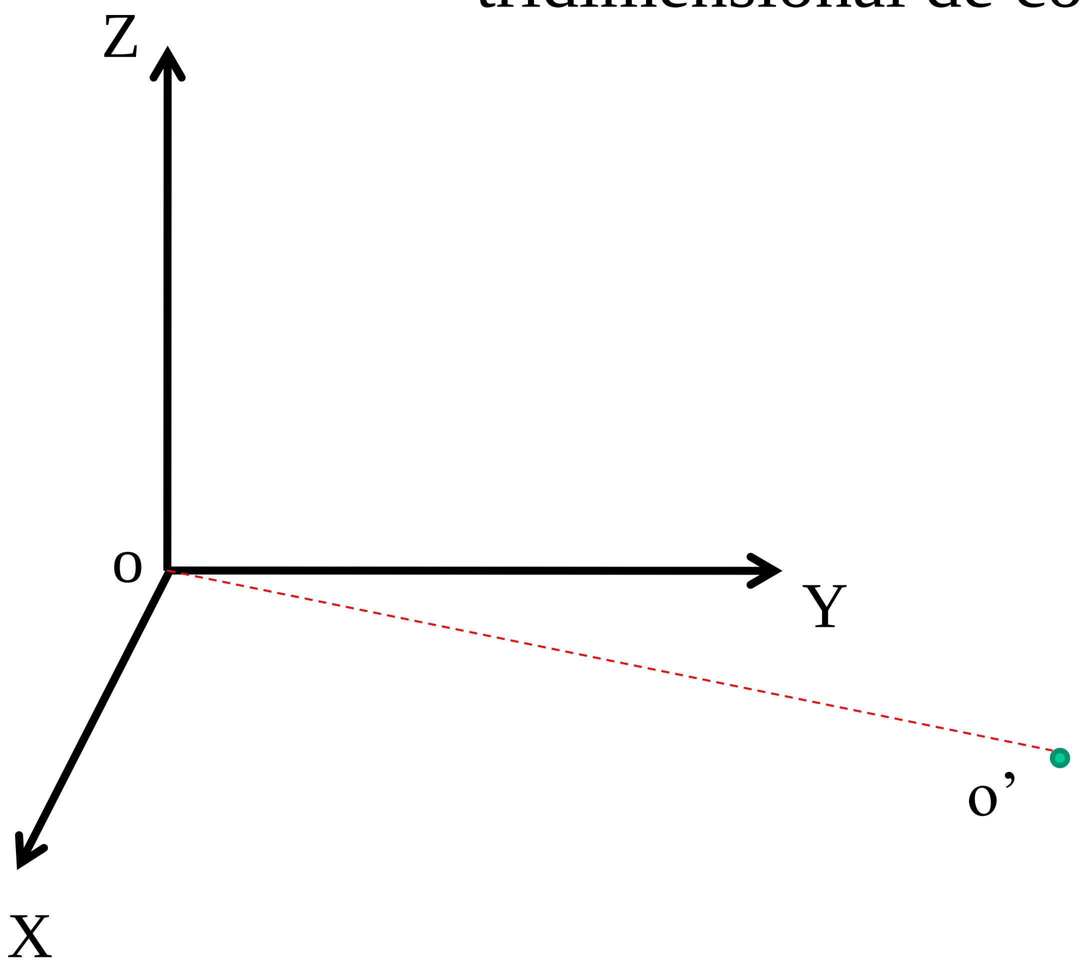


$$x_p = x'_p \cdot \cos\delta + y'_p \cdot \operatorname{sen}\delta$$
$$y_p = -\,x'_p \cdot \operatorname{sen}\delta + y'_p \cdot \cos\delta$$

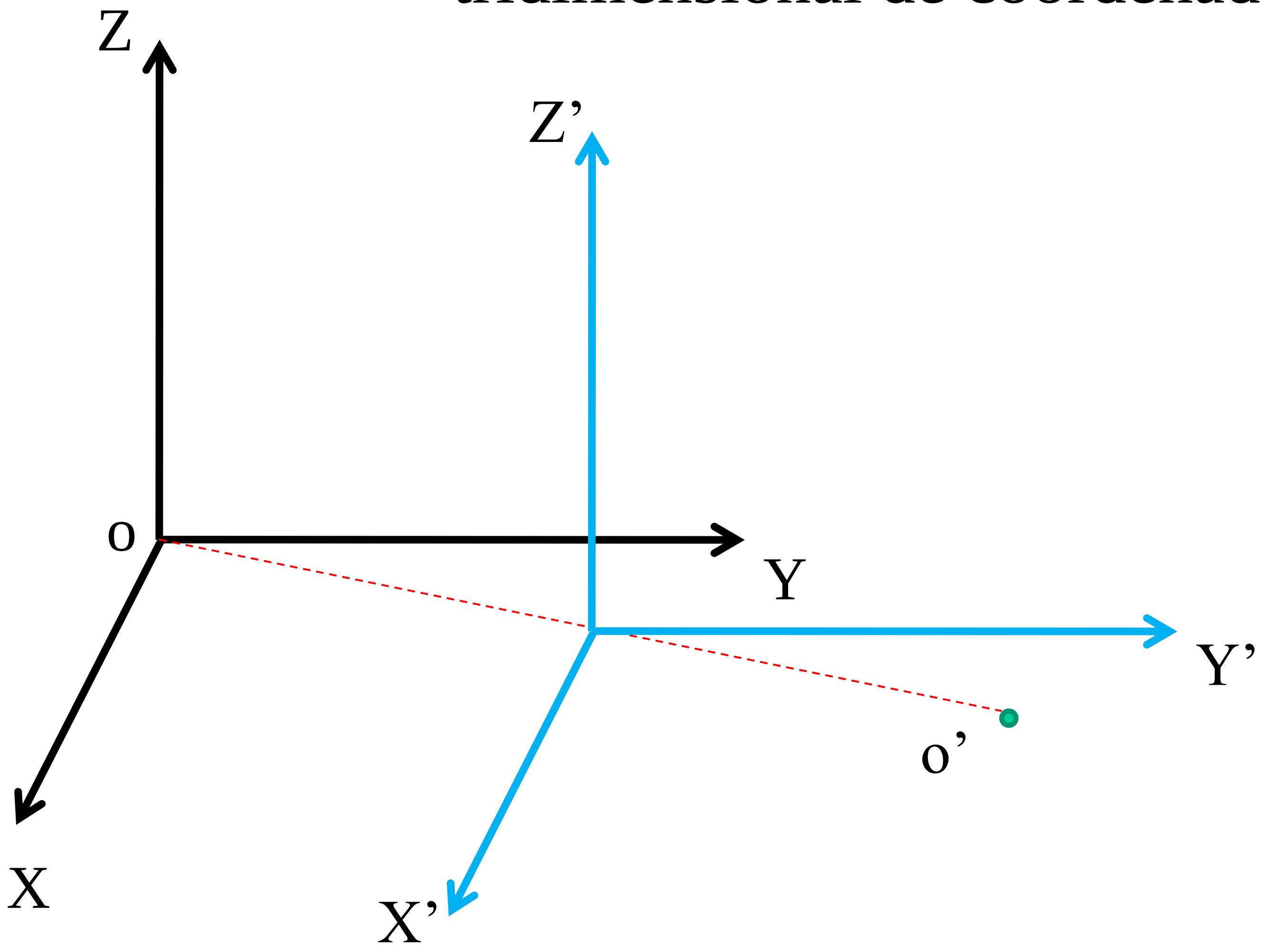
$$x_p = 10{,}003 \cos(-17\ ) + 2{,}005 \operatorname{sen}(-17\ )$$
$$x_p = 8{,}980\text{m}$$

$$y_p = -10{,}003 \operatorname{sen}(-17\ ) + 2{,}005 \cos(-17\ )$$
$$y_p = 4{,}842\text{m}$$

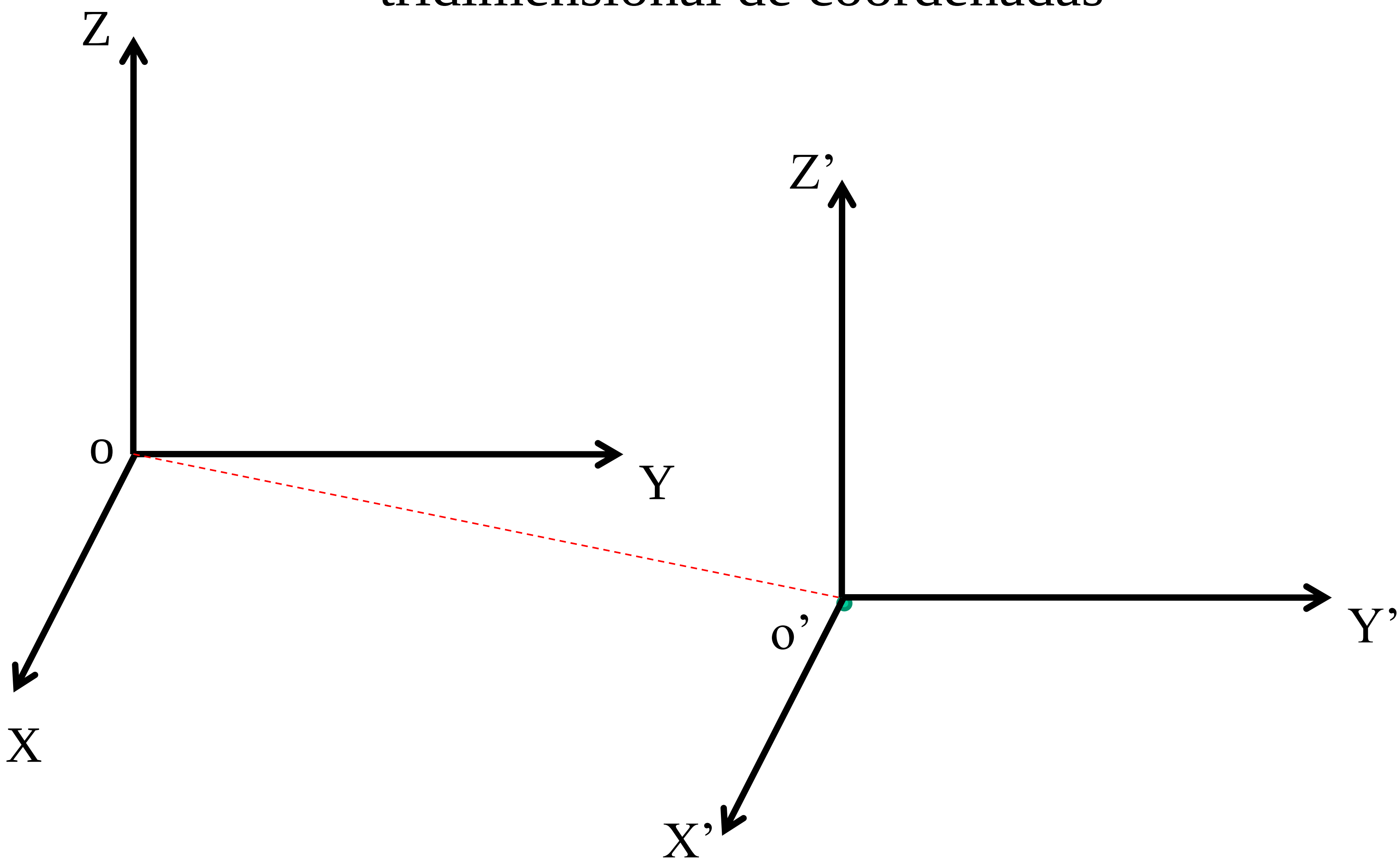
Translação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



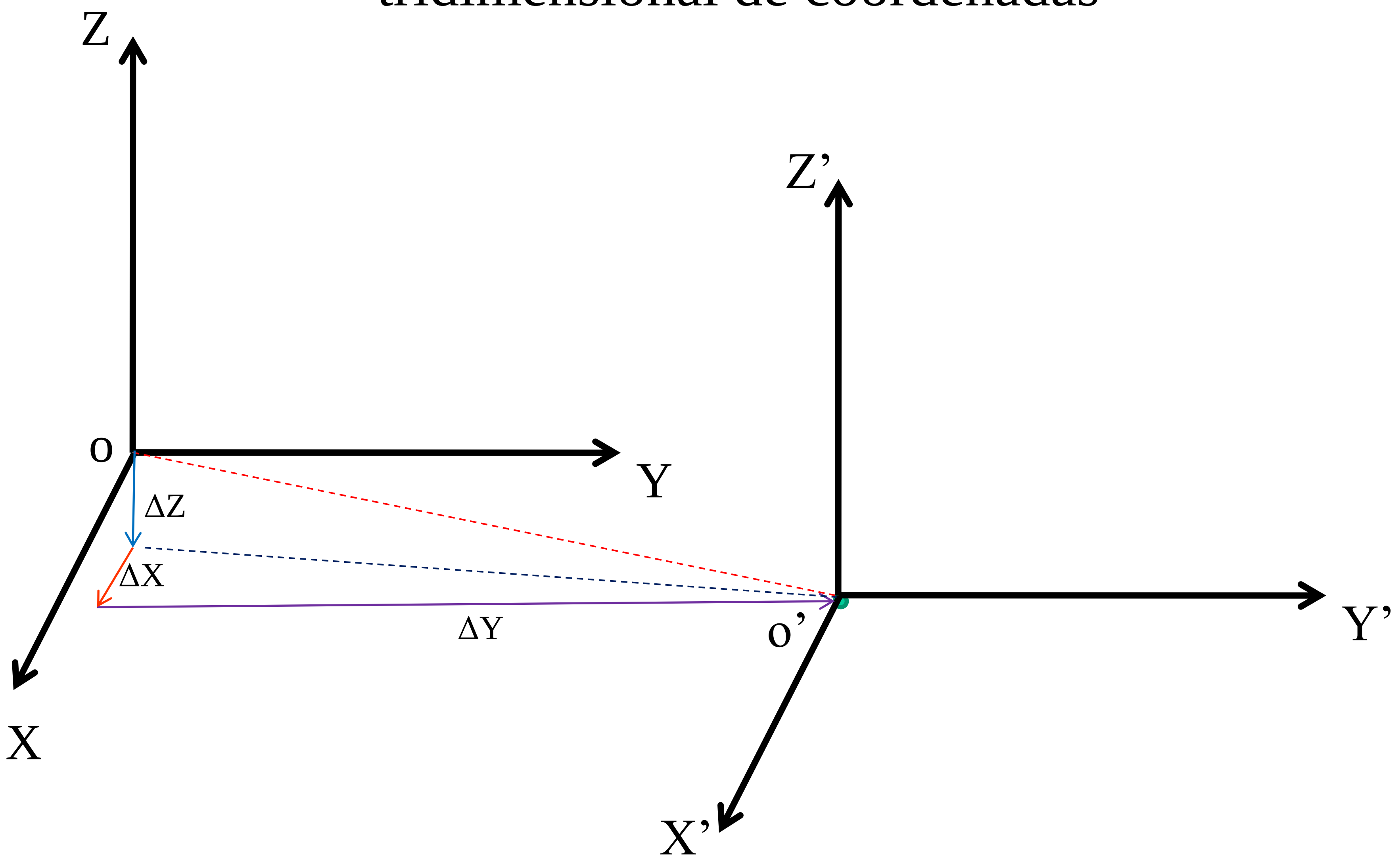
Translação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



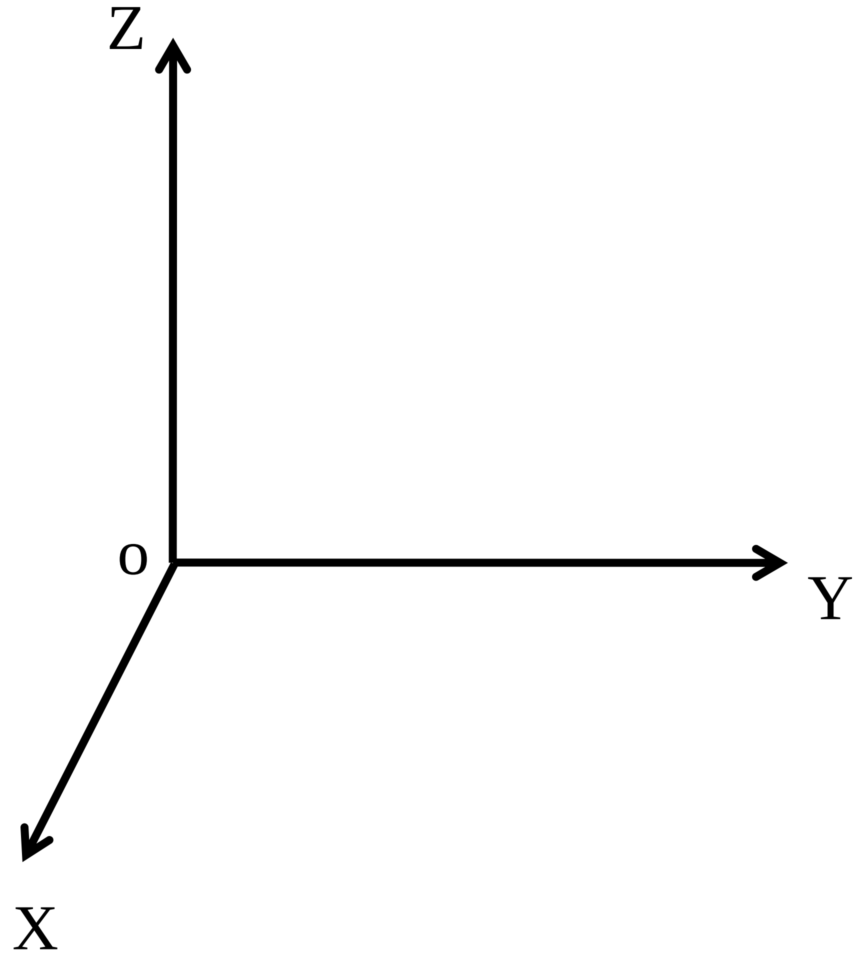
Translação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



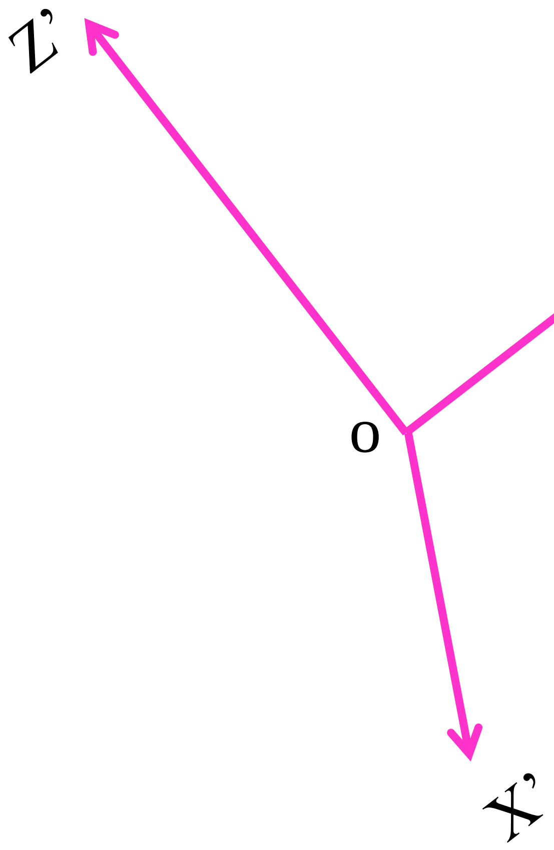
Translação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



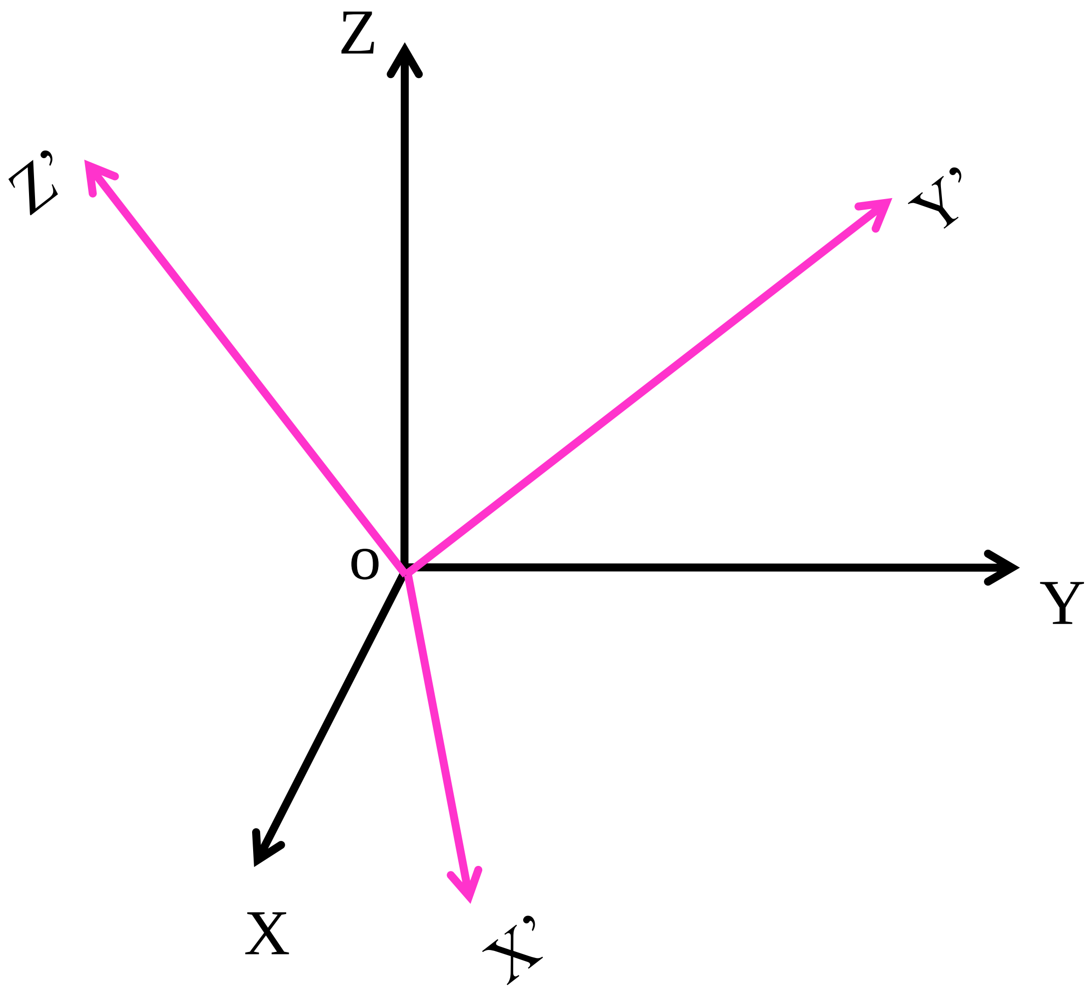
Rotação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



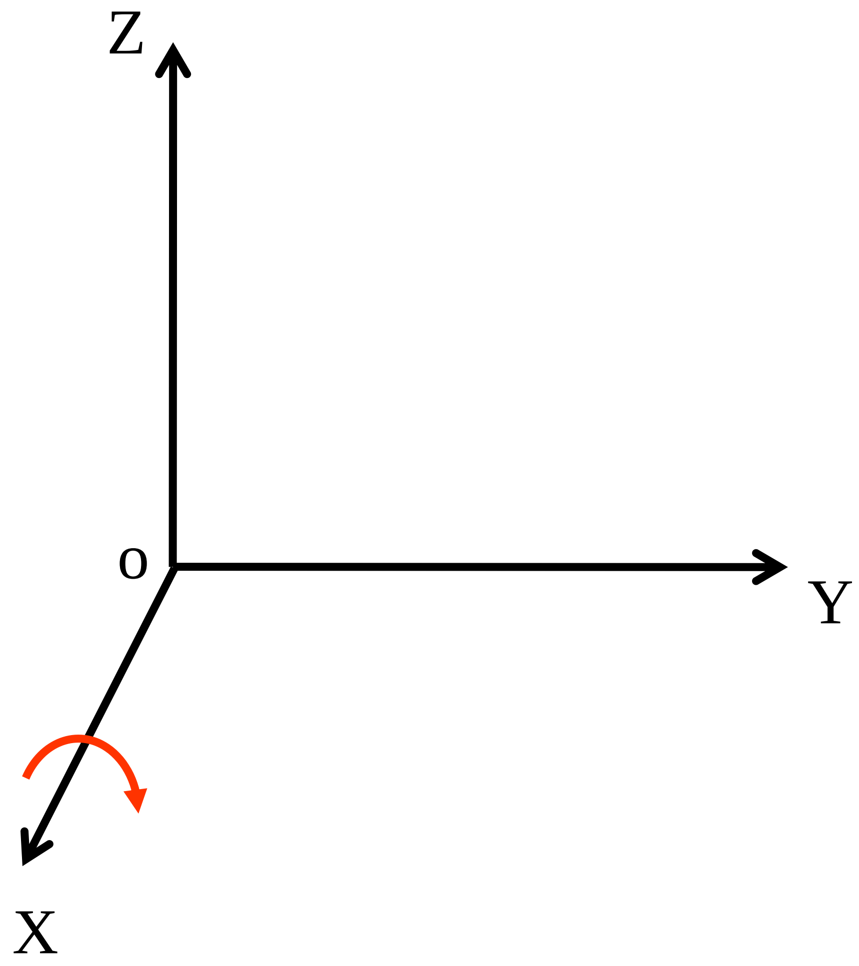
Rotação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



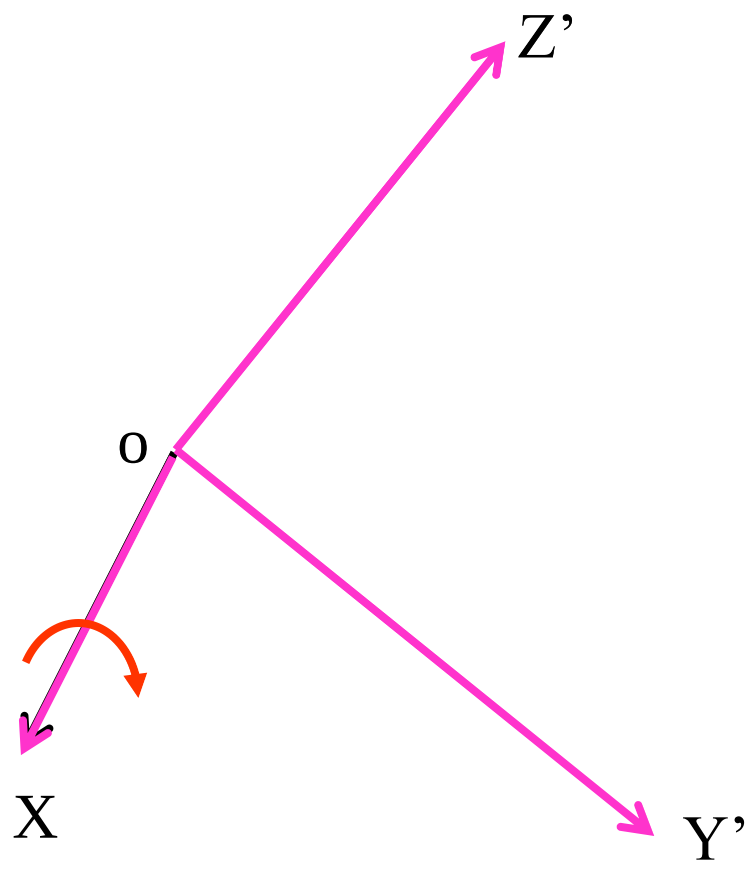
Rotação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



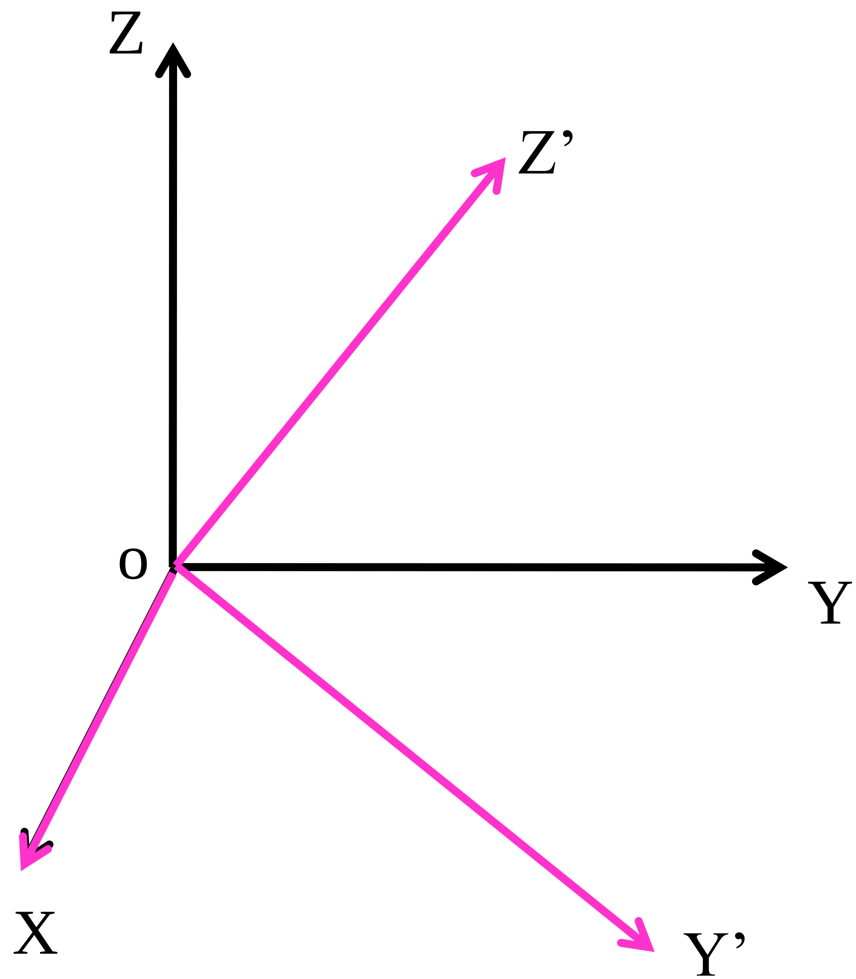
Rotação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas em torno do eixo X



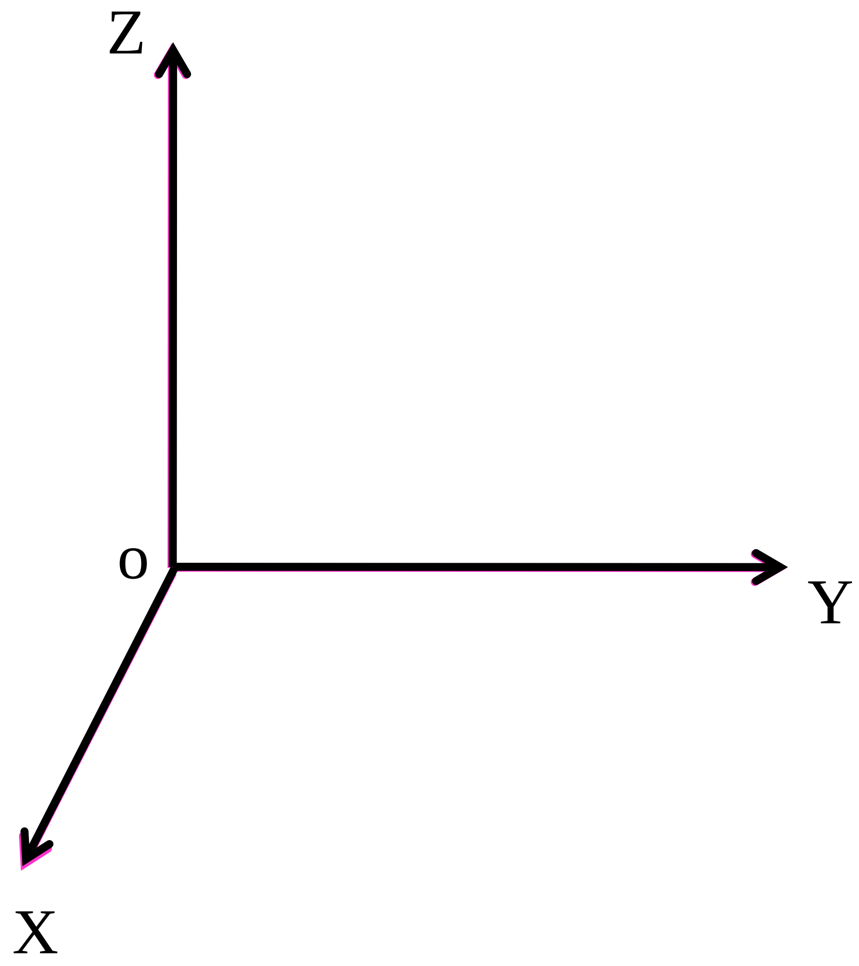
Rotação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas em torno do eixo X



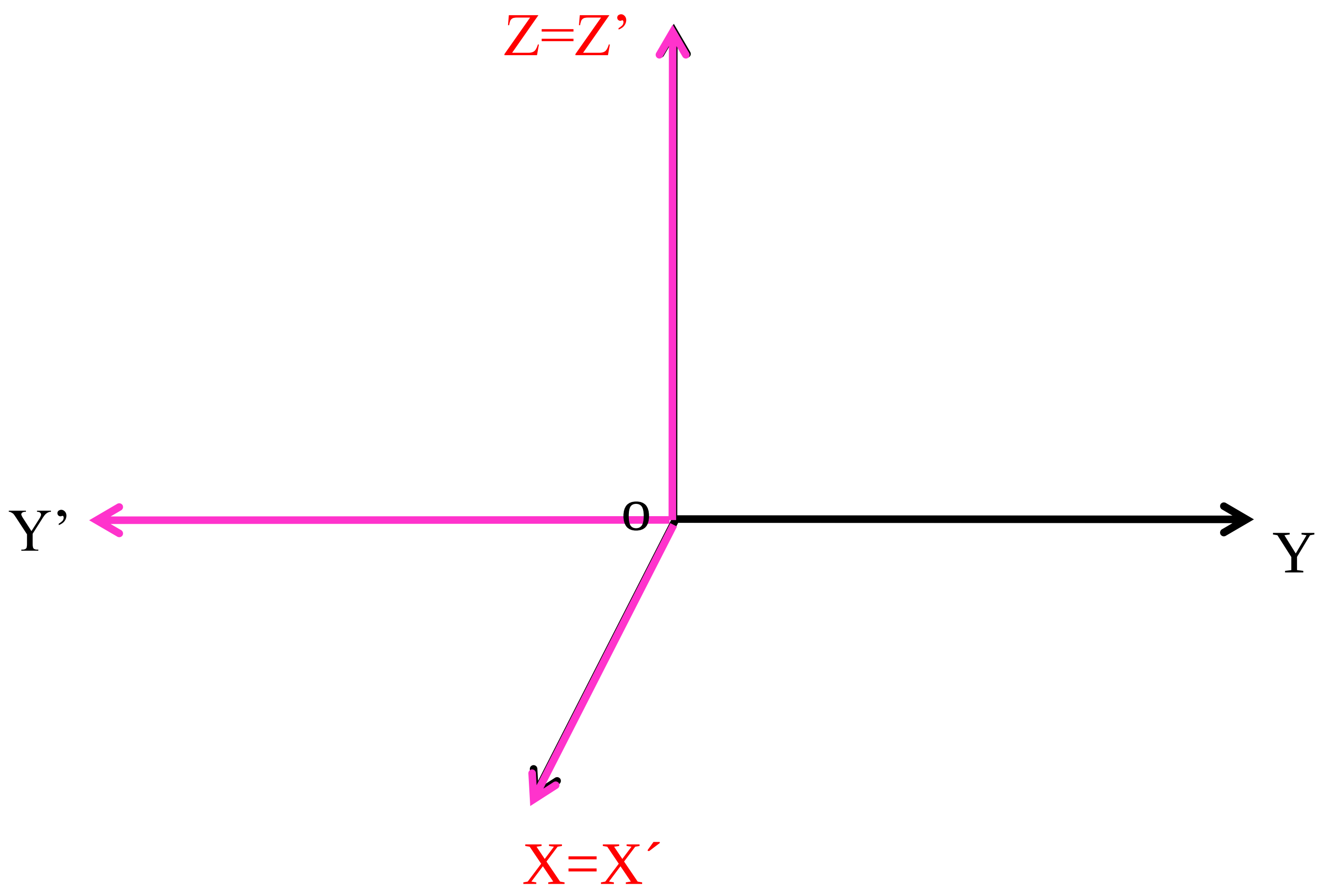
Rotação de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas em torno do eixo X



Reflexão de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas

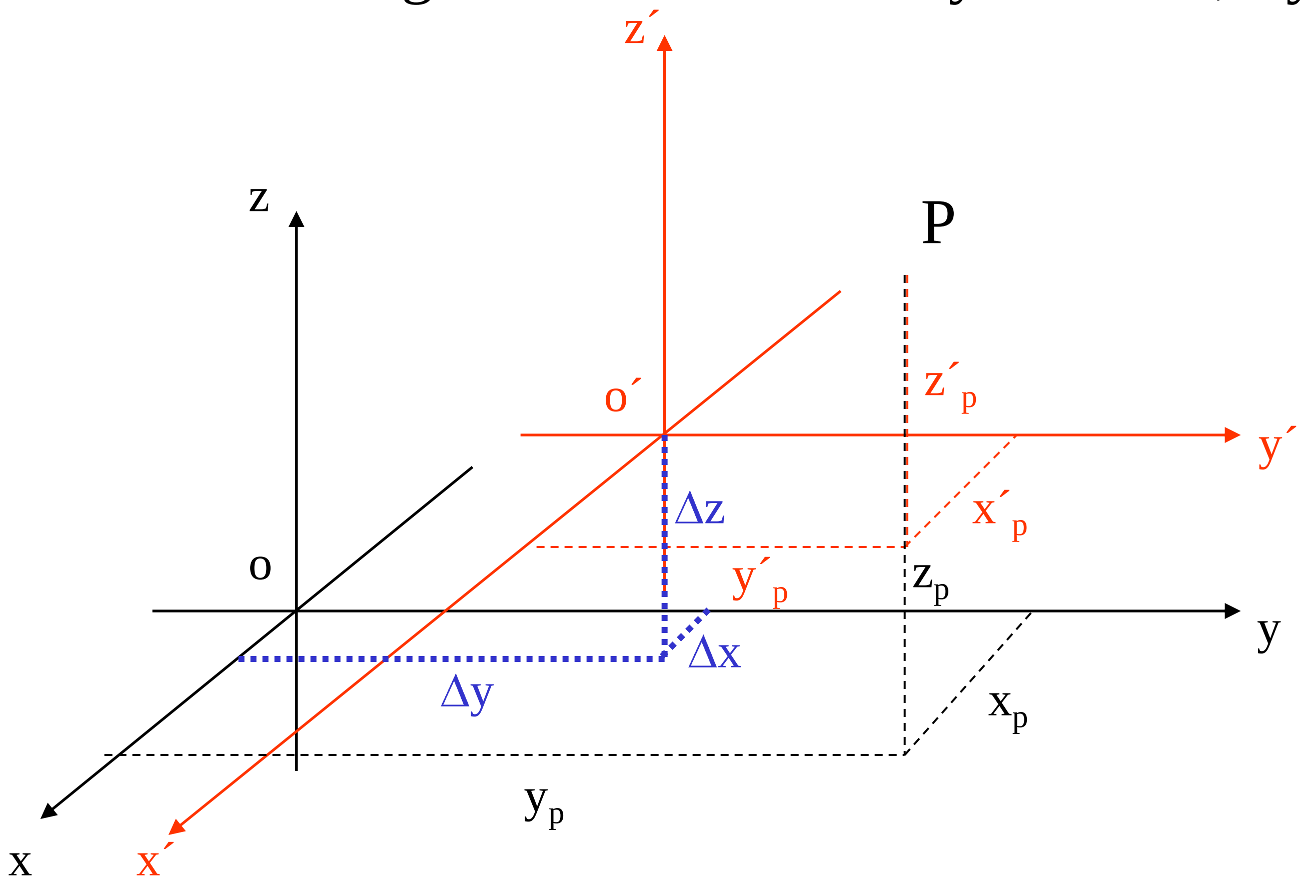


Reflexão de um sistema cartesiano tridimensional de coordenadas



Translação entre sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais

As coordenadas da origem o´ no sistema oxyz são: Δx, Δy, Δz.



$$x_p = x'_p + \Delta x \qquad y_p = y'_p + \Delta y \qquad z_p = z'_p + \Delta z$$

Exercício:

As coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais de um ponto obtidas do rastreio com o sistema GPS, no sistema geodésico WGS84 resultou em:

X = 3336578,238m

Y = -4693183,894m

Z = -2733834,809m

As normas técnicas do IBGE (PR-22) fornece os parâmetros de translação do sistema WGS-84 para o Sistema Geodésico Brasileiro (SAD-69):

$\Delta x = +66,87m$

$\Delta y = - 4,37m$

$\Delta z = 38,52m$

Calcular as coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais geodésicas do ponto no sistema SAD-69.

Solução:

$X' = X + \Delta x \quad \therefore \quad X' = 3336578,238 + 66,87$

$Y' = Y + \Delta y \quad \therefore \quad Y' = -4693183,894 – 4,37$

$Z' = Z + \Delta z \quad \therefore \quad Z' = -2733834,809 + 38,52$

X´=3336645,108

Y´=-4693188,264

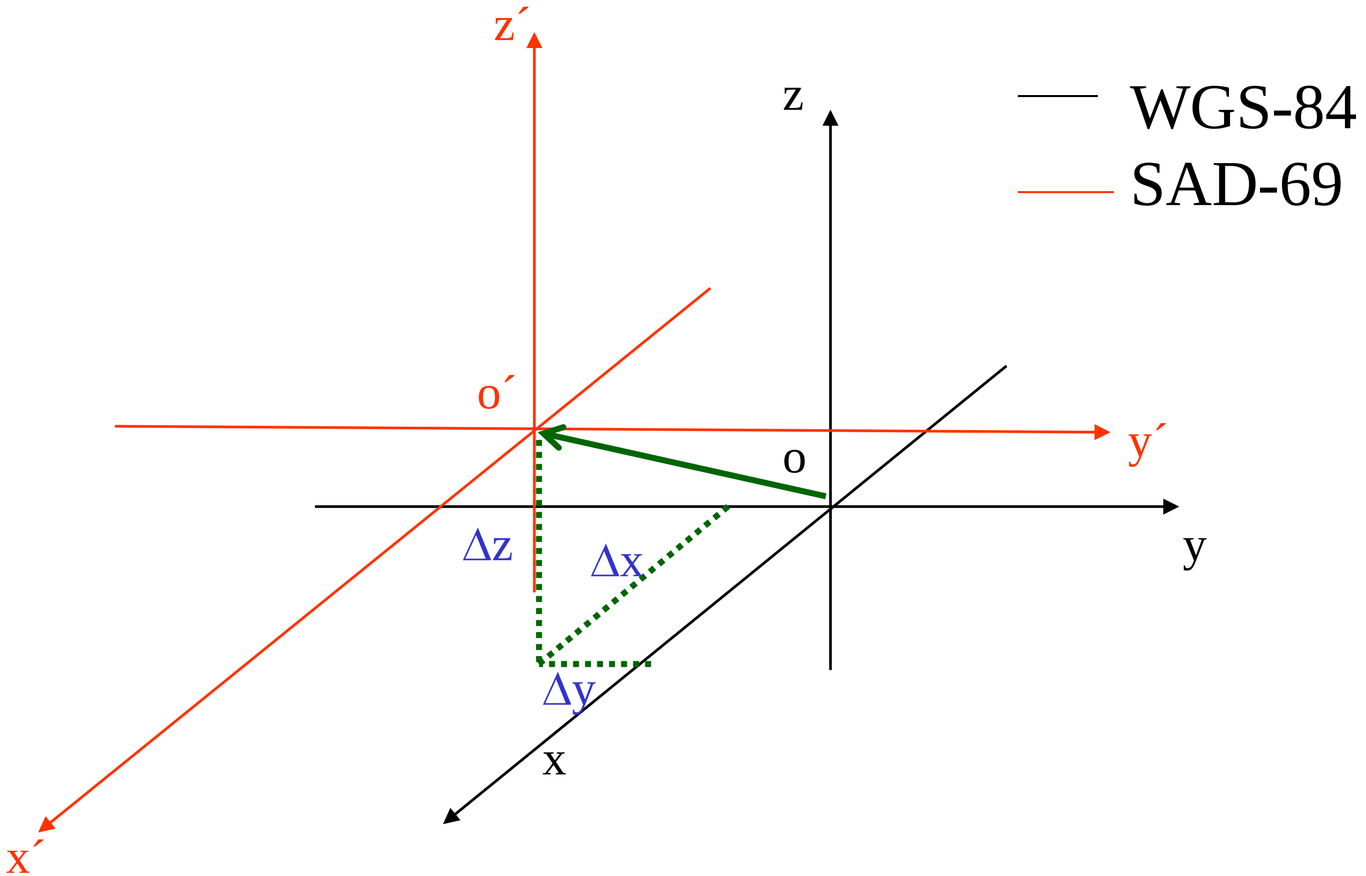
Z´=-2733796,289

Parâmetros de translação

$\Delta x = +66{,}87m$

$\Delta y = -\ 4{,}37m$

$\Delta z = 38{,}52m$



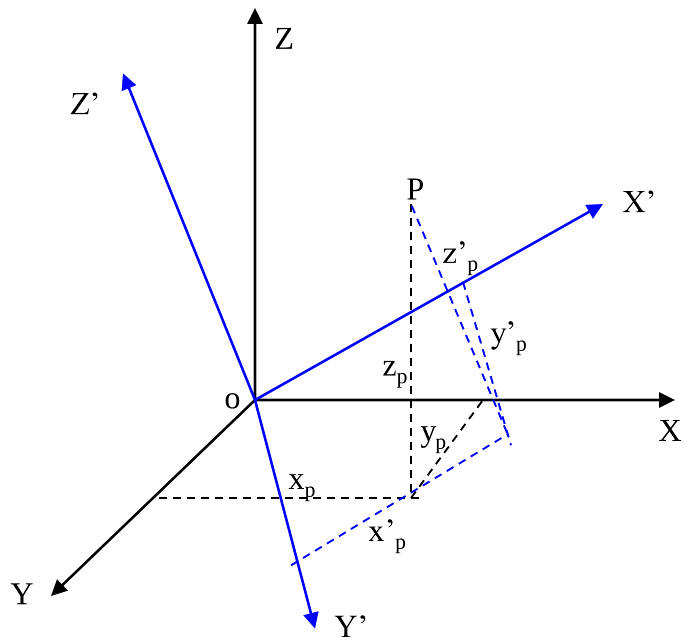
Distância oo´ = 77,295m

. MATRIZES DE ROTAÇÃO E REFLEXÃO

Tomando-se dois sistemas tridimensionais de coordenadas cartesiana ortogonais com mesma origem porém não coincidentes. Sejam x_p, y_p, z_p coordenadas cartesianas do ponto P no sistema oXYZ e x'_p, y'_p, z'_p no sistema oX'Y'Z'.
O problema consiste em: dadas as coordenadas de um ponto no primeiro sistema, deseja-se as coordenadas deste mesmo ponto no segundo sistema de coordenadas.
Da Geometria Analítica tem-se que [Hatschbach, 1975]:

$$x'_p = x_p\, l_{11} + y_p\, l_{12} + z_p\, l_{13}$$
$$y'_p = x_p\, l_{21} + y_p\, l_{22} + z_p\, l_{23}$$
$$z'_p = x_p\, l_{31} + y_p\, l_{32} + z_p\, l_{33}$$

onde, l_{ji} é o co-seno diretor do ângulo formado entre o eixo respectivo do sistema oX'Y'Z' com o eixo do sistema oXYZ, por exemplo que o eixo x'_i forma com o eixo x_i .



Sob a forma matricial tem-se que:

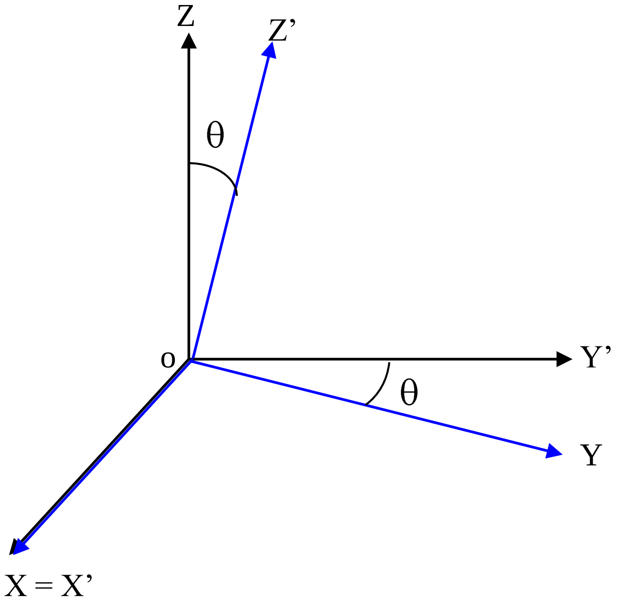
$$\begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

ou, de forma simplificada:

$$Y = L\ X$$

Pode ser provado que dos nove co-senos diretores somente três são linearmente independentes, portanto, conhecidos os três ângulos formados entre os respectivos pares de eixos dos dois sistemas, os quais são denominados de ângulos de Euler, é possível a transformação de coordenadas de um sistema para outro.

Seja, na figura, dois ternos coincidentes na origem e seus eixos oX e oX’
coincidentes e os outros eixos formando o ângulo θ entre si:



Neste caso a matriz L assumirá a seguinte forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ 0 & -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_1(\theta)$$

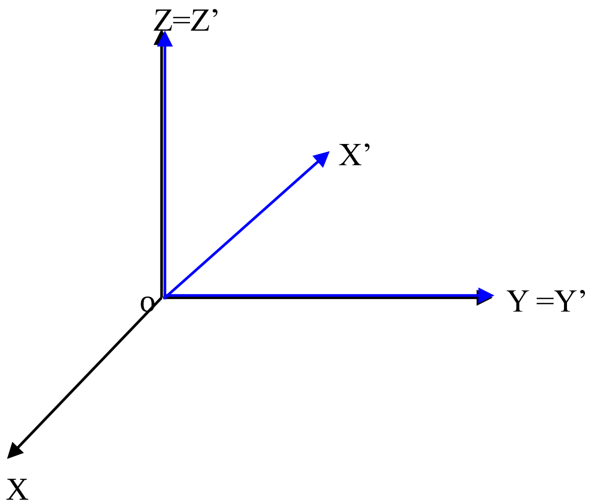
Similarmente, obter-se-ia a matriz L para uma rotação em torno do eixo y e do eixo z, respectivamente:

$$L = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = R_2(\theta)$$

$$L = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3(\theta)$$

As matrizes $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$ e $R_3(\theta)$ são conhecidas como **matrizes de rotação.** A convenção adotada neste trabalho para o valor positivo do ângulo de rotação θ, é a de que os sistemas devam ser dextrógiros e o ângulo θ correspondente à rotação deve ser medido no sentido anti-horário.

Tome-se agora, dois sistemas coincidentes na origem o, com os eixos y e z coincidentes, e com os eixos oX' e oX com sentidos opostos



Neste caso a matriz dos co-senos diretores assumirá a seguinte forma, denominada de reflexão do eixo dos x.

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R1$$

Para o eixo dos y com orientação contrária tem-se:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R2$$

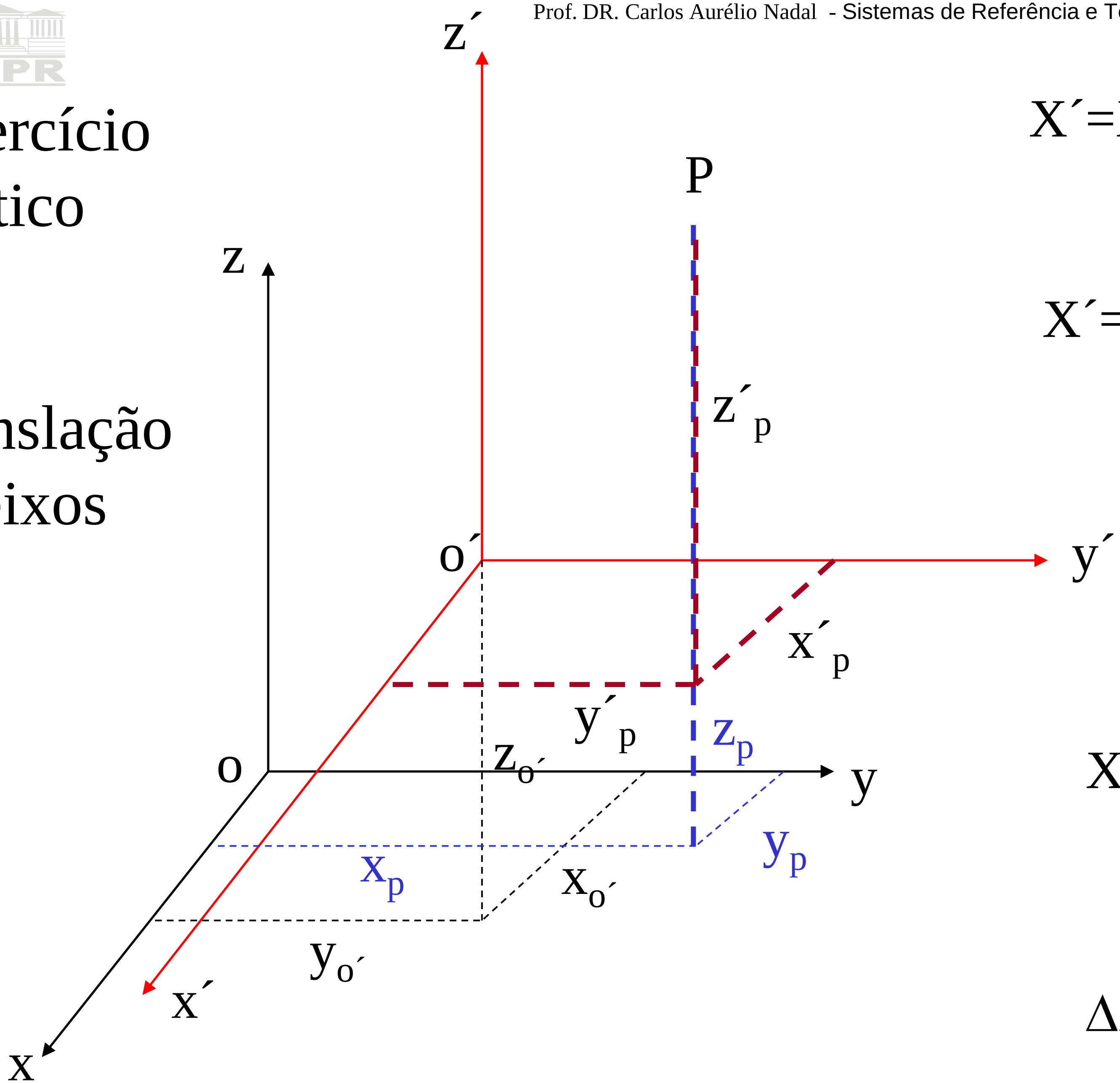
e, para o eixo dos z da mesma forma que os anteriores tem-se:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = R3$$

As matrizes R1, R2 e R3 são conhecidas com matrizes de reflexão e permitem a transformação de sistemas dextrógiros em levógiros e vice-versa.

Exercício prático

Translação de eixos



$$X' = X + \Delta X$$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

$$\Delta X = \begin{pmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \\ z_{o'} \end{pmatrix}$$

As coordenadas geodésicas de um ponto situado no Salto Santa Rosa em Santa Catarina são fornecidas e iguais a:

$\phi = 26° \ 40'11{,}1818''S$ $\lambda = 52° \ 05'43{,}5537''W$

h = 855,439m, sendo o datum utilizado o SAD-69.

Transformando-se as coordenadas geodésicas fornecidas em coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais no sistema SAD-69 obtendo-se:

$$X = 3504357{,}533 \text{ m}$$
$$Y = -4500805{,}065 \text{ m}$$
$$Z = -2845960{,}220 \text{ m}$$

Calcular estas coordenadas no sistema SIRGAS2000, Utilizando-se o software freemat.

O IBGE fornece os parametros de translação para o sistema SIRGAS-2000(WGS-84)

• SAD 69 para SIRGAS2000	• SIRGAS2000 para SAD 69
a1 = 6.378.160 m	a1 = 6.378.137 m
f1 = 1/298,25	f1 = 1/298,257222101
a2 = 6.378.137 m	a2 = 6.378.160 m
f2 = 1/298,257222101	f2 = 1/298,25
. ΔX = - 67,35 m	Δ.X = + 67,35 m
. Δ Y = + 3,88 m	. Δ Y = - 3,88 m
. Δ Z = - 38,22 m	. Δ Z = + 38,22 m

$$X' = X + \Delta X$$

No software FreeMat v 3.5, digitam-se as matrizes e efetuam-se os cálculos:

http://freemat.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page

format long (apresentar todas as casas decimais)

x=[3504357.533;-4500805.065;-2845960.220]

usar ponto
separar ;

d =[-67.35;3.88;-38.22]

$$y=x+d \quad \rightarrow \quad y=\begin{pmatrix} 3504290.183 \\ -4500801.185 \\ -2845998.440 \end{pmatrix}$$


```
--> x=[3504357.533;-4500805.065;-2845960.220]

x =

    1.0e+006 *

     3.5044
    -4.5008
    -2.8460

--> d=[-67.35;3.88;-38.22]

d =

   -67.3500
     3.8800
   -38.2200

--> format long
--> y=x+d

y =

    1.0e+006 *

    3.50429018300000
   -4.50080118500000
   -2.84599844000000

-->
```

format short

format long

clc – apaga a tela

clear – limpa as variaveis

Guardando dados em um arquivo texto para execução no Software FreeMat v3.5

transl.m - Bloco de notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

```
x=[3504357.533;-4500805.065;-2845960.220]
d=[-67.35;3.88;-38.22]
y=x+d
```

Salvar como; salvar como tipo: todo os arquivos;

nome do arquivo - transl.m

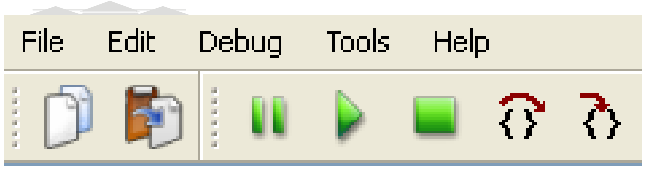
escolher a área a salvar   disco local c:\

No FreeMat v3.5 digitar

cd c:\

dir

transl




```
--> transl

x =

    1.0e+006 *

    3.50435753300000
   -4.50080506500000
   -2.84596022000000


d =

  -67.34999999999999
    3.88000000000000
  -38.22000000000000


y =

    1.0e+006 *

    3.50429018300000
   -4.50080118500000
   -2.84599844000000
```

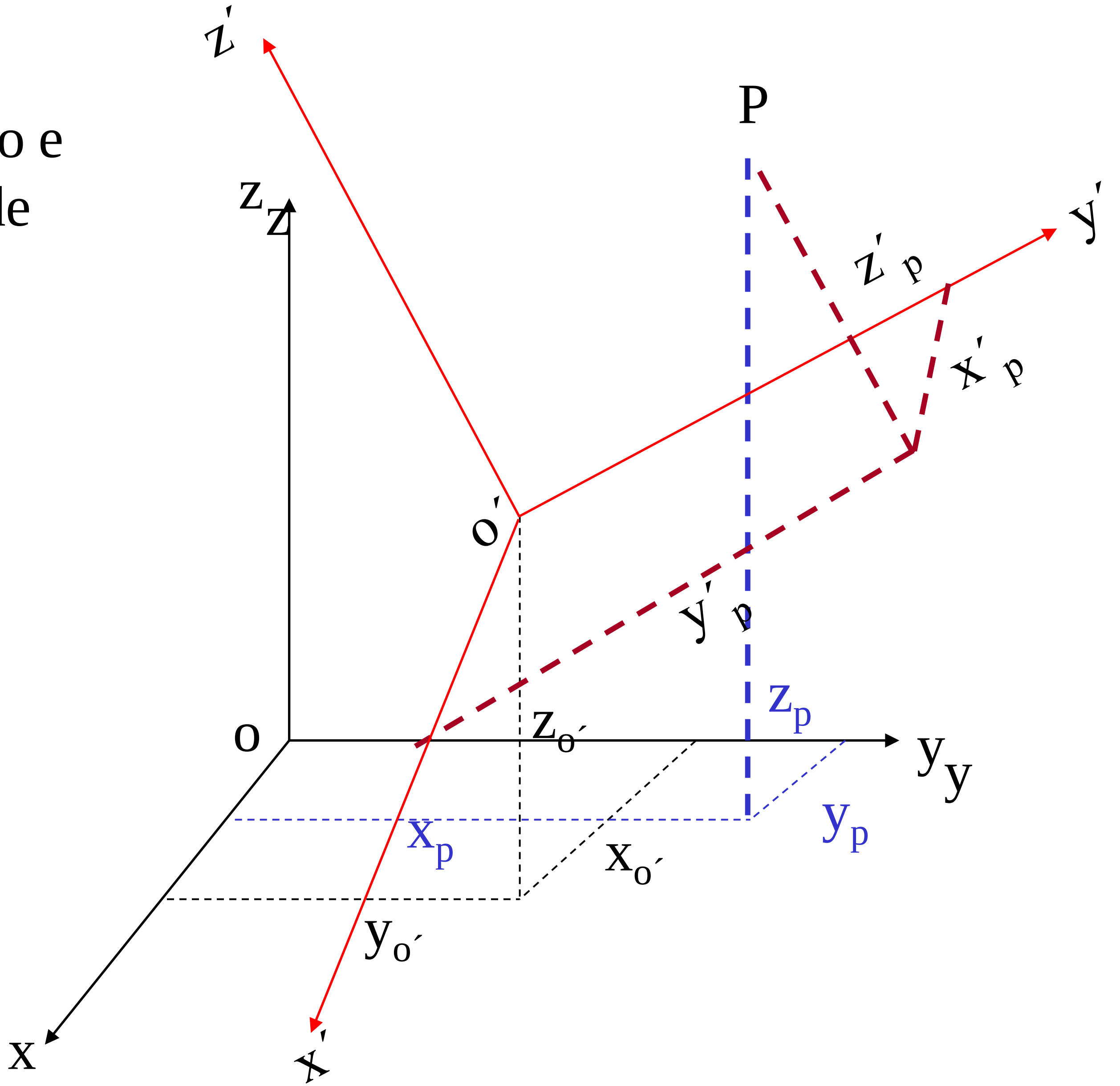
Os dados estão carregados, digitados num editor de texto

x=[3504357.533;-4500805.065;-2845960.220]

d=[-67.35;3.88;-38.22]

y=x+d

Translação e Rotação de eixos



Exercício de rotação de sistemas.

As coordenadas de um ponto no sistema OXYZ são conhecidas:

X = 1256.251m ; Y = 1456.853m; Z = 855.326m

O sistema de coordenadas é dextrógira e deve ser efetuada uma rotação de $\theta = 17°55'22.3''$ no sentido horário em torno do eixo Z. Determinar as novas coordenadas utilizando-se o software freemat.

$$X = \begin{pmatrix} 1256.251 \\ 1456.853 \\ 855.326 \end{pmatrix}$$

Matriz rotação do tipo 3 (eixo dos z)

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A convenção adotada neste trabalho para o valor positivo do ângulo de rotação θ, é a de que os sistemas devam ser dextrógiros e o ângulo θ correspondente à rotação deve ser medido no sentido anti-horário.

$$\theta = -17°55'22.3''$$

No bloco de notas:

Arquivo rota.m

```
x=[1256.251;1456.853;855.326]
te= -(17+55/60+22.3/3600)*pi/180
cv =cos(te)
sv =sin(te)
r3=[ cv sv 0;-sv cv 0;0 0 1]
y=r3*x
```

radianos

Se quiser colocar em qualquer área do disco rígido, utilizar
A função para setar o programa

```
cd 'd:\sistemas'
```

No FreeMat v 3.5:

```
--> rota

x =

   1.0e+003  *

   1.25625100000000
   1.45685300000000
   0.85532600000000


te =

  -0.31281293776654


cv =

   0.95147169233410


sv =

  -0.30773628107016
```

```
r3 =

   0.95147169233410  -0.30773628107016                  0
   0.30773628107016   0.95147169233410                  0
                  0                  0   1.00000000000000


y =

   1.0e+003  *

   0.74696074068050
   1.77274840022267
   0.85532600000000

-->
```

X´= 746,961m
Y´=1772,748m
Z´= 855,326m

Exercício de translação e rotação de coordenadas.

Utilizando-se uma estação total, na qual associa-se um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensional com origem coincidente com seu centro óptico (ponto cardã), com o eixo y situado no plano horizontal com sentido positivo para o ponto cardeal norte geográfico, com o eixo x com sentido positivo para o ponto cardeal leste e o eixo z na vertical com sentido positivo para o zênite. Visou-se três alvos topográficos situados em uma parede Vertical obtendo-se as seguintes medidas:

Ponto visado (alvos)	Azimute (A)	Distância zenital (z)	Distância inclinada (di)
A1	10 05 20”	88 10 15”	7,114m
A2	25 12 31”	52 51 31”	9,706m
A3	41 50 02”	65 20 50”	10,337m

Calcular as coordenadas dos alvos neste sistema?

Solução:

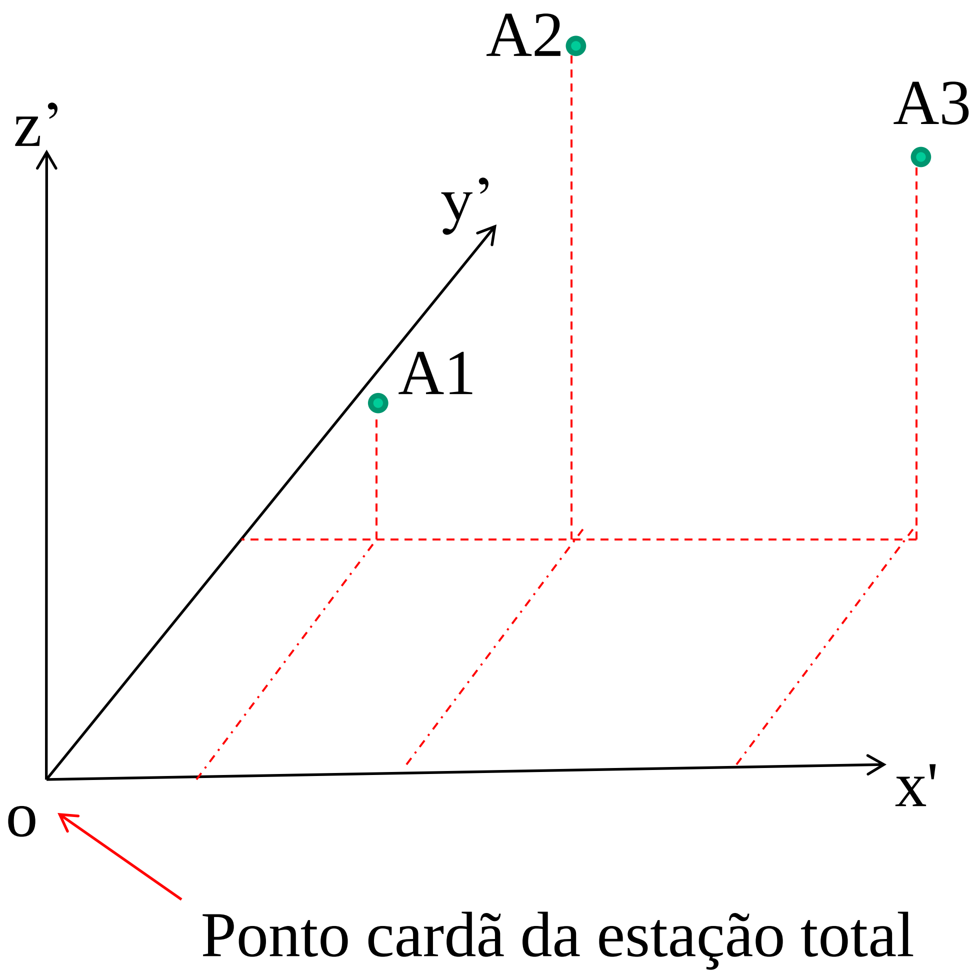
Como o sistema é dextrógiro, as coordenadas dos alvos serão calculadas pelas expressões:

$$x' = di \operatorname{sen} z \operatorname{sen} A$$
$$y' = di \operatorname{sen} z \cos A$$
$$z' = di \cos z$$

Resulta em:

Ponto visado	x´ (m)	y´(m)	z´ (m)
A1	1,245566	7,000428	0,227076
A2	3,295357	7,000259	5,860327
A3	6,266085	6,999897	4,31175

Representação esquemática do problema



UFPR

Um programa no software FreeMat v 3.5

```
clear;clc
% calculo de coordenadas de estações totais
% entrada de dados iniciais
% nu=numero total de pontos a serem calculados
nu=3;
% matriz dos azimutes dos alvos
a=[10 5 20;25 12 31;41 50 2];
for i=1:nu
b(i)=(a(i,1)+a(i,2)/60+a(i,3)/3600)*pi/180;
end
% matriz distancia zenital dos alvos
v=[88 10 15;52 51 31;65 20 50];
for i=1:nu
c(i)=(v(i,1)+v(i,2)/60+v(i,3)/3600)*pi/180;
end
% vetor distâncias inclinadas
d=[7.114;9.706;10.337];
% cálculo de coordenadas
for i=1:nu
x(1,i)=d(i)*sin(c(i))*sin(b(i));
x(2,i)=d(i)*sin(c(i))*cos(b(i));
x(3,i)=d(i)*cos(c(i));
end
x
```

Pode usar na saída do programa
['vetor das coordenadas']
x

1.24556564668607	3.29535686759801	6.26608452396772
7.00042847471227	7.00025875268026	6.99989732241686
0.22707573677787	5.86032733818667	4.31175036546801

No software excel, ou outra planilha tem-se:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ponto	azimute			azimute	distância zenital		
2	visado	grau	min	seg	radiano	grau	min	seg
3	A1	10	5	20	0,1760843	88	10	15
4	A2	25	12	31	0,4399733	52	51	31
5	A3	41	50	2	0,7301391	65	20	50
6								

	A	J	K	L	M
1	ponto	distância	x	y	z
2	visado	(m)	(m)	(m)	(m)
3	A1	7,114	1,245566	7,000428	0,227076
4	A2	9,706	3,295357	7,000259	5,860327
5	A3	10,337	6,266085	6,999897	4,31175
6					

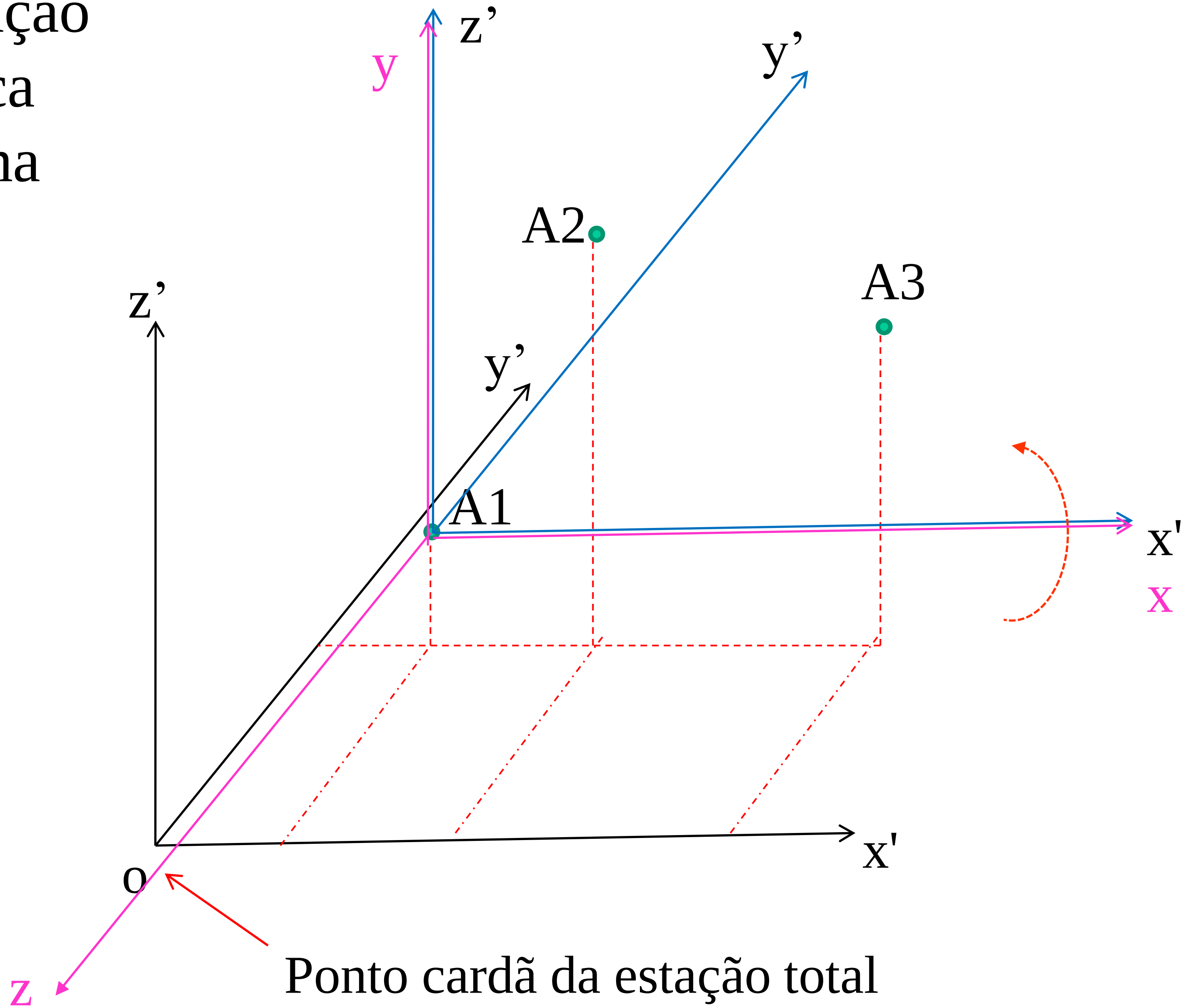
Supor agora um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais vinculado à parede vertical obtido pela rotação no sentido anti-horário do sistema anterior de 90 em torno do eixo x , colocando-se a origem do novo sistema no alvo A1, portanto, .efetuando-se também uma translação da origem, do centro óptico da estação total para este alvo.

Calcular as coordenadas dos alvos A1, A2 e A3 neste novo sistema?

Solução:

Como o sistema é dextrógiro e a rotação no sentido anti-horário em torno do eixo x, acrescendo-se a translação, pode-se escrever matricialmente os movimentos pela expressão:

Representação esquemática do problema



$$X = R1\,(90\ \ )\ X \ \ + \Delta X$$

ou,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90\ \ ) & \mathrm{sen}\,(90\ \ ) \\ 0 & -\mathrm{sen}\,(90\ \ ) & \cos\,(90\ \ ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

ou,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Efetuando-se os produtos matriciais, chega-se a:

$$x = x' + \Delta x$$
$$y = z + \Delta y$$
$$z = -y + \Delta z$$

Obs.: para quem não lembra de produto matricial, multiplica-se a primeira linha da matriz 3X3 pelo vetor 3x1, depois a segunda linha pelo vetor e após a terceira linha pelo vetor.

As translações nas coordenadas dos alvos para obtenção do novo sistema serão:

Δx= -1,245566
Δy= -7,000428
Δz= -0,227076

(coordenadas do alvo A1 no antigo sistema com sinal contrário)

Alvo A1 (será a origem do novo sistema):

x = 0,000m   y=0,000m   z=0,000m

Alvo A2

x = 3,295357 - 1,245566
x = 2,050m

y = 5,860327 - 7,000428
y = -1,140m

z = - 7,000259 - 0,227076
z = -8,163m

Alvo A3

x = 6,266085 - 1,245566
x = 5,021m

y = 4,31175 - 7,000428
y = -2,669m

z = - 6,999897 - 0,227076
z = -7,227m