

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

ROZELAINE DE FATIMA FRANZIN CONTRI

OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE ATENDIMENTO  
EMERGENCIAIS UTILIZANDO A TEORIA DAS FILAS  
E O DIAGRAMA DE VORONOI PONDERADO

TESE DE DOUTORADO

FLORIANÓPOLIS

2007

**ROZELAINE DE FATIMA FRANZIN CONTRI**

**OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE ATENDIMENTO EMERGENCIAIS UTILIZANDO  
A TEORIA DAS FILAS E DIAGRAMA DE VORONOI PONDERADO**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas – Área de Concentração: Transporte e Logística, da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do título de doutora em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Souza

Florianópolis

2007

## TERMO DE APROVAÇÃO

ROZELAINE DE FATIMA FRANZIN CONTRI

### OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE ATENDIMENTO EMERGENCIAIS UTILIZANDO A TEORIA DAS FILAS E DIAGRAMA DE VORONOI PONDERADO

Tese apresentada como requisito para obtenção do grau de doutora no Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas – Área de Concentração: Transporte e Logística. Universidade Federal de Santa Catarina, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Antônio Sergio Coelho, Dr.  
PPGEP/UFSC  
Coordenador

---

Prof. João Carlos Souza, Dr.  
UFSC-SC/Orientador

---

Prof. João Eduardo Di Pietro, Dr.  
UFSC-SC/Membro moderador

---

Prof. Arinei Lindbeck Silva, Dr.  
UFPR-PR /Membro externo

---

Prof. Lauro César Galvão, Dr.  
CEFET-PR/Membro externo

---

Prof. Antonio Galvão N. Novaes, Dr.  
UFSC-SC/Membro

---

Prof. Edson Tadeu Bez, Dr.  
UNIVALI-SC/Membro

Florianópolis, 03 de agosto de 2007

## **DEDICATÓRIA**

Para o meu esposo Gilberto, meus filhos Milena e Guilherme, e minha mãe Elda, agradeço pela força e amor a mim concedidos nessa caminhada, dedicando-lhes essa conquista.

## AGRADECIMENTOS

À UFSC, juntamente com a coordenação e corpo docente, na pessoa do meu orientador, professor João Carlos Souza, que, no decorrer do Curso, transmitiu conhecimentos, apoio e incentivo para que eu pudesse chegar ao grau de Doutora em Engenharia de Produção e Sistemas.

Aos meus filhos Milena e Guilherme, e meu esposo Gilberto que, pacientemente, souberam tolerar minha ausência, compreendendo e apoiando-me nos momentos difíceis, pelo incentivo constante, pelo amor dedicado e pela confiança a mim depositada.

A minha mãe que me auxiliou nos momentos que precisei, com muito carinho, incentivo e ajuda.

Ao meu colega e amigo Arinei L. Silva, que contribuiu muito para a realização deste trabalho, com sugestões, idéias e incentivo.

Ao Corpo de Bombeiros de Curitiba representado pelo seu Comandante, pela sua gentileza em conceder os dados das chamadas de emergência, sem os quais não seria possível a realização deste trabalho.

Agradecer também aos funcionários do IPPUC, instituto de pesquisas e planejamento urbano de Curitiba, que me auxiliaram na obtenção de informações necessárias sobre o trânsito.

Aos meus colegas de trabalho, que sempre me incentivaram quando o desânimo se abatia sobre mim.

A Deus, por ter-me permitido chegar até aqui, dando-me saúde e força para superar todos os momentos difíceis.

Os meus agradecimentos especiais, a todos os meus professores e colegas que me acompanharam nessa caminhada, e a todas as pessoas que direta ou indiretamente, prestaram auxílio na elaboração desta tese.

## RESUMO

Este trabalho trata do problema de localização ótima de Estações de Emergência, localizadas no Corpo de Bombeiros, em que é necessário calcular o número de ambulâncias em cada estação, para atender a população de uma determinada região. Esse procedimento é realizado por meio da teoria das filas, devendo-se, para isso, considerar: o tempo médio de deslocamento da ambulância até a ocorrência, o número de chamadas diárias extremas para cada estação e também o tempo de espera na fila. O tempo médio de deslocamento é calculado pela teoria dos valores extremos, em que se considera somente o maior valor observado em cada dia. O tempo de espera, na fila, deve ser atribuído pelos administradores, podendo ser maior ou menor, dependendo, muitas vezes, de recursos financeiros. Neste trabalho, é considerado um tempo de espera, na fila, de um minuto e, para o deslocamento, de quatro minutos, num total de cinco minutos, podendo esse valor ser alterado para outras situações.

Pelo diagrama de Voronoi multiplicativo por pesos, é realizada a divisão da área em estudo, nesse caso, a cidade de Curitiba-PR, onde há nove estações de emergência, sendo que cada ponto de estação será considerado como centro gerador de regiões.

A otimização das colocações das estações é realizada com os modelos contínuos minmax e minmaxmin por meio do método simplex, em que é otimizado cada ponto de localização da Estação do Corpo de Bombeiros.

A abordagem permite calcular, para um determinado conjunto de dados, o número suficiente de ambulâncias sem que haja limitação com relação à quantidade de unidades, o que dispensa o uso de simulação. Sendo assim, a metodologia apresentada é um instrumento que pode ser aplicado para qualquer região, desde que se tenham os dados relativos às ocorrências e os tempos de deslocamento, registrados num período considerado.

Os algoritmos e software utilizados demonstraram uma boa performance para os modelos usados, contribuindo para a melhoria do sistema e rapidez no atendimento emergencial.

Palavras-chave:

Otimização - Problemas de localização - Modelos contínuos - Diagramas de Voronoi.



## ABSTRACT

The present work discusses the location problem of Emergency Stations in Fire Brigades, where the number of ambulances in each station needs to be calculated in order to assist the population of a certain area. This procedure is accomplished through the Theory of the Lines, where the following should be considered: the average displacement time for the ambulance to get to the incident, the number of extreme daily calls for each station and also the time in the line. The average displacement time is calculated with the Extreme Value Theory where only the highest observed value each day is considered. The waiting time in the line should be told by the managers and it could be longer or shorter depending, at many times, on financial resources. In this work, a one-minute waiting time in the line is considered, whereas for the displacement a 4-minute waiting time is considered, totalizing five minutes although this figure may be altered in case there are other situations.

Through the Voronoi's multiplied by weights, a division of the area in study was made, in this case the city of Curitiba-PR. There are nine emergency stations, and each station point will be considered as an area generating center.

The optimization of stations points is accomplished with the continuous minmax and minmaxmin models through the simplex method in which each location point is optimized for that Fire Brigade Station.

The approach allows an adequate number of ambulances to be calculated for a certain set of data without a limitation in regard to the amount of units, which makes the use of simulation unnecessary. Therefore, the presented methodology is an instrument that can be applied to any area, since the data regarding the occurrences are at hand and the displacement times registered period of time.

The algorithms and software employed have shown a good performance in the models used, promoting the system improvement as well as speed in the emergency service.

Key words:

Optimization – Location - Continuous models - Voronoi's diagrams.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 01-	Freqüências observadas nas chamadas para a Estação CIC.....	92
Tabela 02-	Valores das probabilidades para o teste de Kolmogorov-Smirnov.....	93
Tabela 03-	Probabilidades para o número de chamadas .....	94
Tabela 04-	Resultados de $\lambda$ e $\mu$ e o número de ambulâncias.....	96
Tabela 05-	Resultados do número de ambulâncias para cada estação.....	98
Tabela 06-	Resultados do número de ambulâncias em cada estação para outros valores de tempos de espera na fila.....	99
Tabela 07-	Resultados dos tempos médios de deslocamentos das ambulâncias.....	100
Tabela 08-	Número de chamadas para cada Estação de Emergência.....	102
Tabela 09-	Resultado dos valores do peso para cada região.....	103
Tabela 10-	Resultado da otimização com o modelo minmax.....	107
Tabela 11-	Resultado da otimização com o modelo minmaxmin.....	110
Tabela 12-	Resultado da otimização com novas estações para o modelo minmax.....	114

## LISTA DE QUADROS

Quadro 01-	Coordenadas dos vértices da região retangular mapeada.....	89
Quadro 02-	Proximidade dos vértices com a Estação do Corpo de Bombeiros mais próxima.....	89
Quadro 03-	Distância, em cm, dos vértices até a estação mais próxima.....	90
Quadro 04-	Coordenadas dos vértices das regiões ponderadas.....	106
Quadro 05-	Coordenadas dos vértices da região formada à esquerda da Estação Central .....	111
Quadro 06-	Coordenadas dos vértices da região formada à direita da Estação Central .....	111
Quadro 07-	Coordenadas dos vértices da região formada à esquerda e à direita da Estação Central.....	111

## LISTA DE FIGURAS E GRÁFICOS

Figura 01-	Diagrama de Voronoi e Triangulação de Delaunay.....	36
Figura 02-	Diagrama de Voronoi em três dimensões.....	37
Figura 03-	Diagrama de Voronoi ordinário.....	40
Figura 04-	Localização dos centróides por Voronoi .....	41
Figura 05-	Demonstração do Voronoi analítico e sobre a malha.....	42
Figura 06-	Voronoi multiplicativo por pesos para $\alpha = 3$ .....	44
Figura 07-	Localização dos centros geradores por pesos.....	45
Figura 08-	Estrutura de um sistema de fila de espera.....	50
Figura 09-	Representação dos códigos de distribuições.....	52
Figura 10-	Representação gráfica da função exponencial.....	55
Figura 11-	Representação das fronteiras de Voronoi por pesos.....	79
Figura 12-	Localização das Estações de Emergência existentes e possíveis locais de instalações.....	86

Figura 13-	Representação de Curitiba com localização dos hospitais e Estações do Corpo de Bombeiros.....	87
Figura 14-	Divisão das regiões por Voronoi ordinário.....	101
Figura 15-	Localização das Estações de Emergência por Voronoi ponderado.....	104
Figura 16-	Localização otimizada das unidades de Estações de Emergência pelo modelo minmax.....	108
Figura 17-	Localização otimizada das unidades de Emergência da Central pelo modelo minmaxmin pela esquerda e pela direita.....	112
Figura 18-	Localização otimizada das Estações de Emergência.....	115
Gráfico 01-	Histograma do número de ocorrências na Estação CIC.....	91
Gráfico 02-	Comparação entre o tempo médio e o tempo extremo provável das unidades de emergência.....	100

## LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A	Cálculo da freqüência (absoluta) de observações para a Estação CIC.....	131
APÊNDICE B	Resultados dos cálculos das probabilidades para a distribuição de Poisson.....	134
APÊNDICE C	Programa 01 para determinação dos parâmetros dos diferentes sistemas de filas.....	136
APÊNDICE D	Resultados das probabilidades.....	144
APÊNDICE E	Algumas chamadas de emergência com horários de atendimentos.....	145
APÊNDICE F	Programa 02 para determinação do número de ambulâncias.....	146
APÊNDICE G	Resultados do número de servidores para um minuto.....	155
APÊNDICE H	Resultados do número de servidores para oito minutos.....	157
APÊNDICE I	Cálculo dos pesos para as estações de Curitiba.....	158
APÊNDICE J	Determinação da localização das estação CIC usando o modelo minmax.....	159
APÊNDICE K	Determinação da localização das estações usando o modelo minmaxmin.....	160

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	16
1.1 SISTEMAS DE ATENDIMENTO DE EMERGÊNCIA.....	18
1.2 OBJETIVOS.....	20
1.2.1 Objetivo Geral.....	20
1.2.2 Objetivos Específicos.....	21
1.3 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO.....	21
1.4 CONTRIBUIÇÃO PARA A CIÊNCIA.....	22
1.5 LIMITAÇÕES.....	22
1.6 ESTRUTURA.....	22
2 REVISÃO DE LITERATURA.....	24
2.1 PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO.....	24
2.2 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.....	26
2.3 MODELOS E MÉTODOS DE LOCALIZAÇÃO ESPACIAL E DE OTIMIZAÇÃO.....	28
2.3.1 Modelo MCLP- <i>Maximum Covering Location Problem</i> .....	29
2.3.2 Modelo Minmax (p-centro).....	31
2.3.3 Modelo Minmaxmin.....	31
2.4 DIAGRAMAS DE VORONOI.....	35
2.4.1 Diagrama de Voronoi a Partir da Triangulação de Delaunay.....	36
2.4.2 Diagrama de Voronoi Ordinário.....	37
2.4.3 Diagrama de Voronoi Multiplicativo Por Pesos.....	43
2.5 TEORIA DAS FILAS.....	49
2.5.1 Processos de Chegadas e Serviços.....	52
2.5.2 Chegadas Aleatórias de Poisson e Duração de Serviço Exponencial...	53
2.5.3 Processo de Geração e Extinção.....	56
2.5.4 Modelo de Sistema de Filas.....	57
2.5.5 Modelo $(M/M/c) : (GD/\infty)$ .....	58
2.6 DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS DE VALORES ESTREMOS E MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS.....	61
2.6.1 Distribuição de Gumbel.....	63
2.6.2 Método Dos Momentos Ponderados - <i>Probability-Weighted Moment Method</i> .....	64

2.6.3 Teste de Kolmogorov-Smirnov – <i>K-S</i> .....	65
2.7 MÉTODO DE RESOLUÇÃO E OTIMIZAÇÃO SIMPLEX.....	67
<b>3 METODOLOGIA PROPOSTA.....</b>	<b>71</b>
3.1 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO SISTEMA DE FILAS.....	72
3.1.1 Cálculo Dos Valores Extremos.....	73
3.2 VERIFICAÇÃO DOS DADOS QUANTO À DISTRIBUIÇÃO DE POISSON...	73
3.3 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE UNIDADES DE EMERGÊNCIA.....	74
3.3.1 Cálculo Do Número De Ambulâncias Em Cada Estação.....	75
3.4 PARA LOCALIZAR OS HOSPITAIS E CORPO DE BOMBEIROS.....	76
3.5 DETERMINAÇÃO DAS FRONTEIRAS DAS REGIÕES DE VORONOI PONDERADO.....	76
3.6 DETERMINAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DOS POSTOS DE ESTAÇÕES.....	79
3.6.1 Otimização Da Localização Dos Postos De Serviços Considerando o Modelo Minmax.....	81
3.6.2 Otimização Da Localização Dos Postos De Serviços Considerando o Modelo Minmaxmin .....	82
3.7 CASO GERAL.....	83
<b>4 ESTUDO DE CASO.....</b>	<b>85</b>
4.1 LOCALIZAÇÃO DOS HOSPITAIS E DO CORPO DE BOMBEIROS.....	87
4.2 VERIFICAÇÃO DO NÚMERO DE CHAMADAS QUANTO À DISTRIBUIÇÃO DE POISSON.....	90
4.3 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DE SISTEMAS DE FILAS.....	93
4.4 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE AMBULÂNCIAS.....	93
4.4.1 Cálculo Dos Valores Extremos.....	94
4.4.2 Cálculo Do Número De Ambulâncias Em Cada Estação.....	96
4.4.3 Análise Dos Resultados Comparativos Dos Tempos De Deslocamentos.....	99
4.5 DETERMINAÇÃO DAS FRONTEIRAS DAS REGIÕES DE VORONOI PONDERADO.....	101
4.6 LOCALIZAÇÃO OTIMIZADA DOS POSTOS DE AMBULÂNCIAS.....	104
4.6.1 Determinação Da Localização Dos Postos De Ambulâncias Usando o Modelo Minmax.....	105
4.6.2 Determinação Da Localização Dos Postos De Ambulâncias Usando o Modelo Minmaxmin.....	108
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES.....</b>	<b>116</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>121</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>130</b>
..	



## **CAPÍTULO I**

### **1 INTRODUÇÃO**

A localização de equipamentos ou pontos de serviços tem sido muito discutida e pesquisada, tanto na área privada como na pública. Na área privada, têm sido muito estudado os métodos de localização e otimização de centros de distribuição de produtos e de serviços. Na pública, segundo Chiyoshi, Galvão e Morabito (2000), dividem-se em duas categorias: a dos serviços não emergenciais e a dos serviços emergenciais. Na primeira categoria, tem-se como exemplo a localização de agências de correios, serviços de saúde pública e escolas e, na segunda categoria, a localização de hospitais, serviços de socorro em rodovias e de Corpo de Bombeiros.

Os sistemas de atendimentos emergenciais, mais precisamente o serviço de socorro oferecido pelo Corpo de Bombeiros, é o foco do estudo desenvolvido neste trabalho.

Estudos realizados por outros autores como Souza (1996), Galiev (1996), Costa (2003), Iannoni (2005), revelam que há, muitas vezes, uma falta de planejamento na colocação de Estações de Emergência, como exemplo, a do Corpo de Bombeiros. Geralmente, a localização e a quantidade delas não são baseadas em projetos, mas concentradas em uma única base, que tem por finalidade atender à demanda de uma região muito grande (Souza, 1996). Conseqüentemente, as distâncias percorridas tornam-se maiores, o que aumenta o tempo de atendimento à população.

O sucesso de uma operação de socorro para vítimas de acidentes depende, principalmente, da rapidez de chegada da equipe de atendimento, ou seja, do tempo de resposta. Este, por sua vez, depende primordialmente da localização das Estações de Emergência, da existência de ambulâncias não ocupadas em outra emergência e da rapidez de deslocamento. É importante, também, considerar-se o tempo de deslocamento da vítima até um hospital, que é dado em função da distância entre o local do acidente e a velocidade da viatura.

Um risco que se corre é quando a ambulância da Estação de Emergência estiver indisponível, devendo outra de uma estação diferente, mais próxima, ser enviada para o local da chamada, o que, muitas vezes, aumenta o tempo de resposta ao atendimento. Então, como saber quando aumentar o número de ambulâncias ou estações e onde localizá-las de maneira ótima?

É evidente ser necessário a diminuição do tempo de chegada da ambulância e de sua utilização para o deslocamento da vítima até um hospital. Para essa diminuição, pode ser necessário acrescentarem-se novas ambulâncias ou, até mesmo, serem localizadas novas Estações de Emergência em outros locais e/ou uma realocação das já existentes. Segundo Gargano (2000), há normas internacionais que consideram o tempo para se chegar até o local da ocorrência de, no máximo, cinco minutos. Essa recomendação para o tempo máximo de chegada até a ocorrência deve considerar também o tempo de espera na fila, sendo este o principal fator para a determinação do número de ambulâncias e a localização das Estações de Emergência em uma região.

Mas alguns problemas surgem, por exemplo: como atender a população localizada em zonas mais distantes? Como fazer para atender essa população em tempo razoável, de forma que não haja risco de morte para a vítima? Como minimizar o tempo de utilização das ambulâncias? Quando e onde adicionar novas estações e/ou ambulâncias, ou ainda, quando as existentes devem ser transferidas? Quanto a inclusão ou não desses fatores influenciará no modelo ótimo? São muitos os problemas a serem amenizados ou resolvidos.

Segundo Souza (1996), critérios de alocação temporal prevêm, com antecedência, em função do desenvolvimento da demanda, quando o sistema estará próximo da saturação, permitindo que se providencie a instalação prévia de novas

estações para suprir a demanda excedente. Porém, isso não é tratado neste trabalho.

Existem várias direções na pesquisa dos problemas de distribuições, baseados em diferentes técnicas (métodos) de otimização e modelos matemáticos. A utilização de um método e/ou modelo não garante resoluções reais para a solução ótima, pois podem existir fatores como congestionamentos, horários de picos ou uma rua fechada para algum tipo de manutenção que pode não ser considerado pelo modelo. Resultados obtidos por outros pesquisadores, como Takeda, Widmer e Morabito (2004), Galvão, Chiyoshi, Espejo e Rivas (2003), Galiev, Camargo e Araslanov (1997, 1998), mostram que as análises podem ser melhoradas se forem utilizados mais de um modelo e método.

A decisão ótima sobre problemas de localização depende do objetivo e das restrições que se quer resolver. Em diversos casos, a formulação de objetivo e restrições pode ser diferente. É possível que se tenha de considerar, também, a distância da localização da vítima até o hospital.

Em razão de todas essas situações, neste trabalho, procurar-se-á utilizar um método para a disposição ótima de Estações de Emergência com um número ótimo de ambulâncias em cada uma, utilizando-se os modelos contínuos minmax e minmaxmin, a teoria das filas e as regiões de Voronoi multiplicativas por pesos, sem considerar a distância do local da ocorrência até um hospital. Serão utilizados os métodos do problema de recobrimento e recobrimento múltiplos dos conjuntos e método simplex para as disposições de estações. Também é analisada uma situação real de serviço de emergência do Corpo de Bombeiros na cidade de Curitiba.

## **1.1 SISTEMAS DE ATENDIMENTO DE EMERGÊNCIA**

A grande parte desses serviços é oferecida pelo setor público, como é o caso do Corpo de Bombeiros. No sistema de emergência oferecido por essa instituição, o servidor é que se desloca até o local do usuário, diferenciando-se do que ocorre com outros tipos de serviços de emergência, como o dos hospitais, quando é o usuário que se desloca até o local onde está sendo oferecido o serviço.

O serviço prestado pelo Corpo de Bombeiros, atualmente, vai além do combate a incêndios, de fazer vistorias e de orientar sobre prevenção. Na grande maioria das cidades, as estações de Corpo de Bombeiros estão equipadas, também, com unidades de resgate (ambulâncias) que prestam serviços de primeiros socorros e assistência à vítima durante o transporte até um hospital, caso seja necessário, embora, em alguns casos, a vítima se recuse a ser encaminhada para um desses locais.

Os veículos de resgate estão cada vez mais equipados; muitos deles com suporte avançado de atendimento, verdadeiras UTIs móveis, possibilitando à equipe de resgate estabilizar o quadro clínico das vítimas por ela atendidas.

Há muitos fatores que podem influenciar no nível oferecido por esse serviço como, por exemplo, a incerteza sobre o horário de chamada, a duração de atendimento e o número de chamadas em cada dia e em cada Estação de Emergência. Sendo necessário, então, ter-se um número de ambulâncias que possam atender às chamadas num tempo que esteja dentro dos padrões internacionais.

Essas chamadas aleatórias para atendimento podem gerar conflitos, como o limite da capacidade de serviço oferecido. Isso pode causar um aumento do tempo de resposta, pois talvez uma unidade (ambulância) de outra estação deva ser acionada, devendo-se, então, dispor das estações de modo que, se uma ambulância de outra estação tenha de ser acionada, o tempo de deslocamento fique próximo ao desejado.

Numa chamada, o tempo total de atendimento, numa emergência, é formado pelo tempo de recebimento da chamada, pelo despacho da ambulância, por um tempo de espera na fila, pelo tempo de deslocamento até a ocorrência, pelo tempo de atendimento no local e pelo tempo de transporte até um hospital, caso seja necessário, e ainda mais o tempo de retorno até a corporação. Em razão da soma de todos esses tempos e para atender a uma determinada região que possua um grande número de chamadas, deve-se pensar no número ideal de estações como o de ambulâncias em cada uma para que o tempo de resposta seja o menor possível. Há de se considerar que esse tempo de resposta do atendimento oferecido é a principal medida de desempenho para verificar a eficiência do serviço oferecido. Quanto menor for o tempo de resposta, mais eficiente será o serviço prestado.

Em algumas cidades, é adotado o sistema SAMU (Serviço de Atendimento Médico de Urgência), baseado no sistema francês de atendimento (*Service d'Aide Médicale Urgente*). É um programa que tem como objetivo prestar socorro à população em casos de emergência. Esse serviço funciona vinte e quatro (24) horas por dia e é formado por equipes de profissionais de saúde como médicos, enfermeiros, auxiliares de enfermagem e socorristas que prestam atendimento de toda natureza, (traumática, clínica, pediátrica, cirúrgica, gineco-obstétrica). São sistemas que operam de forma integrada com os hospitais públicos. Assim como acontece no Corpo de Bombeiros, há uma central (192) de recebimento das chamadas e, após uma triagem, verificam-se o tipo de ocorrência e o local onde ela ocorreu e, se houver necessidade de ambulância, a equipe médica desloca-se até o local para prestar socorro às vítimas.

Esse tipo de atendimento emergencial feito pelo Corpo de Bombeiros, em Curitiba-PR, é denominado SIATE - Serviço Integrado de Atendimento ao Trauma e Emergência. O principal objetivo desse sistema é garantir a vida e a segurança da população, apresentando um nível adequado de serviço. Em Curitiba, o SAMU é bastante atuante, mas o SIATE ainda continua sendo muito utilizado em consequência do alto nível de confiança que a população tem no serviço prestado pelo Corpo de Bombeiros.

Há, também, o sistema “*Anjos do asfalto*”, utilizado para prestar socorro e resgate em rodovias. Essa alternativa foi estudada e abordada por Mendonça e Morabito (2000, 2001) e por Iannoni (2005). Esse sistema é semelhante ao oferecido pelo Corpo de Bombeiros e pelo SAMU; possui uma central de atendimento que recebe as chamadas e faz a triagem do tipo de ocorrência e, logo em seguida, envia uma equipe médica e de resgate para o local do fato. As chamadas são localizadas na rodovia presidente Dutra, entre as cidades de São Paulo e Rio de Janeiro. Nesse trecho, estão dispostas seis (6) bases fixas com equipes médicas e uma ambulância de socorro em cada uma. Dependendo do local da chamada, a ambulância mais próxima é deslocada para fazer o atendimento.

## **1.2 OBJETIVOS**

### **1.2.1 Objetivo Geral**

Este trabalho propõe um método para determinar o número necessário de ambulâncias e de Estações de Serviço de Emergência do Corpo de Bombeiros e suas localizações ótimas, utilizando a teoria das filas e o diagrama de Voronoi ponderado, com vistas a diminuir o tempo de resposta do atendimento e o tempo de utilização da ambulância nas chamadas.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Elaborar uma metodologia capaz de determinar a localização e quantificar as Estações de Emergência.

Calcular o número de unidades de emergência (ambulância) em cada Estação de Emergência utilizando a teoria das filas.

Dividir e otimizar a área em estudo em regiões de abrangência de cada estação utilizando o diagrama de Voronoi ponderado.

Otimizar a disposição de Estações de Emergência, mediante testes com os modelos contínuos minmax e minmaxmin, pelo método simplex.

Utilizar algoritmos de resolução dos modelos indicados e software para esses algoritmos.

Aplicar a metodologia proposta, em um estudo de caso para Curitiba.

## 1.3 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Há uma grande preocupação com o tempo de atendimento de emergência, como, por exemplo, o atendimento no resgate de acidentados ou sinistros, pois congestionamentos e longas distâncias fazem o tempo de resposta aumentar. Além disso, se a unidade de emergência precisar levar a vítima a um hospital, o tempo de utilização dessa unidade aumentará e, se houver nova chamada e não tiver outra unidade disponível na estação, gerar-se-á uma fila de espera.

Com a metodologia proposta, procurar-se-á que o tempo de resposta diminua ou que se aproxime do desejado.

## **1.4 CONTRIBUIÇÃO PARA A CIÊNCIA**

Neste trabalho é proposto um método de localização e otimização de Estações de Emergência do Corpo de Bombeiros, que envolve um modelo de teoria das filas e o diagrama de Voronoi ponderado. Por meio dessa abordagem, espera-se calcular o número necessário de ambulâncias em cada Estação de Emergência, uma vez que esse número não é limitado e não é preciso recorrer-se à simulação para encontrá-lo. Em alguns estudos, isso não foi possível de ser determinado nas situações em que esse número ultrapassava um certo limite, como em Costa (2003).

## **1.5 LIMITAÇÕES**

Os dados obtidos com o Corpo de Bombeiros, quanto ao número de ocorrências atendidas pelo SIATE-Serviço Integrado de Atendimento ao Trauma e Emergência, correspondem apenas a 2 meses do ano de 2006, tornando-se difícil avaliar a sazonalidade do serviço prestado.

Na aplicação do diagrama de Voronoi ponderado, houve limitações em razão de desconhecimento das coordenadas dos pontos de chamadas, o que limitou a aplicação desse diagrama. Por se tratar de Voronoi ponderado, obtêm-se regiões circulares, o que dificulta encontrar os vértices para cada região, então foram considerados polígonos de oito lados. Isso fez com que se encontrassem os vértices para cada região.

## **1.6 ESTRUTURA**

Esta tese está dividida em 5 capítulos:

Capítulo 1- Introdução do problema de transporte de emergência, os objetivos que se pretende alcançar ao final do trabalho, a contribuição para a ciência, as limitações da pesquisa, a justificativa e a estrutura do mesmo.

Capítulo 2- Embasamento teórico de modelos, métodos, e teorias que darão suporte para a elaboração da metodologia.

Capítulo 3- O sistema proposto com o desenvolvimento matemático para determinar o número de estações, a verificação de leis de distribuição das

chamadas telefônicas. Os algoritmos para determinar o número de ambulâncias quando as disposições das estações forem conhecidas, além de mostrar as divisões das regiões, otimização das estações e minimização do tempo de resposta.

Capítulo 4- Um estudo de caso com a aplicação da metodologia proposta no capítulo 3.

Capítulo 5- Apresenta as considerações finais e as recomendações e, por fim, as referências bibliográficas e os apêndices.



## **CAPÍTULO II**

### **2 REVISÃO DE LITERATURA**

Atualmente, existem diversos trabalhos em que foram considerados diferentes modelos de disposição de equipamentos ou pontos de serviços, tais como: conjuntos de coberturas, minisum ( $p$ -mediana), minmax ( $p$ -centro), modelos probabilísticos, modelos de filas (modelos construídos com sistemas de filas).

Nos problemas de localização e otimização, o objetivo geral é elaborar um procedimento que indique os locais mais convenientes dentro da área em estudo. Para se implantar uma ou várias estações de serviços, considera-se o comportamento da demanda e a natureza dos custos para suprir essa demanda em função da distribuição espacial daquelas estações.

#### **2.1 PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO**

Foi com Alfred Weber em 1909 que o problema de localização foi intensificado quando considerou a localização de um depósito numa determinada região e, a partir daí, muitos modelos e métodos foram estruturados, modificados e/ou elaborados.

Os problemas de disposição (ReVelle, Marks e Lieberman (1970)) podem ser divididos em duas grandes classes:

- distribuição por um grafo (network) - modelos discretos.

- distribuição por um plano - modelos contínuos.

Para a primeira classe de problemas usam-se, modelos discretos, em que as estações podem ser dispostas nos vértices (nós) e as distâncias nos arcos de grafos. Estudos sobre tais modelos e métodos de solução foram apresentados por Drezner (1995), Love e Morris (1988), Marianov e ReVelle (1996), Costa (2003).

Para modelos discretos existem:

- soluções analíticas;
- método de programação inteira;
- método de ramo e direção (*Branch and bound methods*);
- métodos de programação dinâmica;
- métodos de programação convexa;
- diversos métodos heurísticos;
- métodos probabilísticos, etc.

Entre esses métodos, não se pode afirmar que um deles é melhor que o outro. Para cada problema, é necessário procurar um método que se adapte melhor à sua solução.

Para a segunda classe usam-se, modelos contínuos, que podem ser considerados generalizações dos discretos, as estações de serviços podem ser dispostas em qualquer ponto e a distância entre quaisquer pontos  $a$  e  $b$  pode ser euclidiana ou retangular. Segundo Lee e Wong (1980), a distância retangular é muito utilizada quando o problema trata de localização de pontos, usando as ruas como percurso. Como via de regra, essa distância entre dois pontos  $a$  e  $b$  é, na maioria das vezes, perpendicular.

No problema de localização de Estações de Emergência, além do local da estação, também é necessário observar o tempo de atendimento e/ou deslocamento. Wesolowsky e Love (1971) consideraram um método de localização de uma ou duas Estações de Emergência. O método abordado por eles fica muito complexo se tal valor for maior que duas estações, o que para a resolução do problema desta tese, não será suficiente, devendo-se elaborar outro método que comporte um número bem maior de estações.

Souza (1999) trata dos modelos de localização de estações de socorro em rodovias estaduais e federais, utilizando uma distribuição adequada das viaturas para o atendimento de emergência. Ele adotou um índice de risco que pondera o valor das distribuições entre cada zona, ou seja, os distritos com maior população e com maior probabilidade de acidentes, que demandem atendimento emergencial, são privilegiados na distribuição espacial das viaturas.

Já, para Aly e Maruchek (1982), o problema de localização de estações pode ser considerado com o método da região retangular, usando as ruas como percurso. Nesse problema, a localização de muitas estações deve ser relativa às várias regiões existentes, em que se deve minimizar a distância de novas estações nessas regiões. Ele considera várias soluções básicas aproximadas para resolver o problema que propôs.

Para a resolução dos problemas de disposição ótima das Estações de Emergência, além dos métodos indicados, podem-se utilizar métodos baseados na aplicação de diagramas de Voronoi. Essas regiões foram utilizadas para diferentes problemas contínuos. Resultados fundamentais sobre regiões de Voronoi foram apresentados em Convey e Sloane (1990), Galvão et al (2006), Novaes et al (2007), Preparata e Sheimos (1985), Galvão (2003), Costa (2003), Silva (2004). Para diferentes métricas, em particular para a retangular, as regiões de Voronoi foram investigadas por Lee (1980), Lee e Wong (1980), Klein e Wood (1988).

## **2.2 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO**

Segundo Novaes (1978), “otimização não é um processo de busca do melhor absoluto, mas a procura sistemática do melhor prático”. Conclui, que o melhor prático deve seguir os seguintes objetivos:

- (a) Encontrar uma concepção física ou operacional adequada;
- (b) Definir os limites físicos para a formulação do problema escolhido;
- (c) Definir um modelo matemático e otimizá-lo, analisando os resultados.

Os métodos de otimização podem ser diretos ou indiretos:

Novaes (1978) afirma que o método direto determina e compara os valores da função a otimizar em vários pontos que estão situados dentro da região das variáveis independentes. Fornece o ponto ótimo com certo erro, por isso não é tão preciso. Em muitos casos, para se resolver problemas de localização, é necessário examinar a distância do atendimento, estudando mais a fundo a demanda e seus pontos de atendimento.

Os métodos indiretos não dependem de uma comparação direta dos valores. Obtêm-se as condições necessárias e suficientes para determinar se um ponto é de máximo ou de mínimo por meio de relações matemáticas.

A importância e a influência de como formular um problema de otimização, especialmente em áreas complexas como as de roteamento e recobrimento, devem ser bem especificadas, pois a formulação do problema terá efeito no desempenho do algoritmo de solução. Se o problema tiver um grande número de variáveis e restrições, o esforço computacional também será grande. Então, procura-se formular o problema de maneira clara, com o mínimo possível de variáveis e restrições.

Problemas de otimização com demanda contínua podem possuir infinitos números de possíveis resoluções, aumentando a dificuldade computacional para o desenvolvimento dessas soluções.

Para este trabalho, é mais adequado o modelo contínuo minmax e minmaxmin para a otimização das distâncias das estações até o local da ocorrência, pois o número de demandas (pontos de chamadas de emergência) é grande, podendo estar localizados em qualquer parte da região.

Com o modelo minmaxmin, podem-se construir outros do mesmo tipo, segundo afirmam Galiev e Satarov (1996). Utilizando os resultados sobre recobrimentos múltiplos, podem-se obter modelos para otimização das disposições das estações de serviços com reservas (se a ambulância da estação mais próxima estiver ocupada, utilizam-se ambulâncias de uma outra estação mais próxima da vítima).

Atualmente, são investigados intensivamente os diferentes problemas de recobrimentos e recobrimentos múltiplos. Segundo Galiev, Camargo e Araslanov (1997), esses tipos de problema têm aplicações importantes para otimização da

disposição de diferentes estações de serviços, tanto emergenciais como não emergenciais.

A distância a ser considerada pode ser real, euclidiana, retangular ou geodésica. Na real, a medida do percurso entre dois pontos  $a$  e  $b$  considera os seus contornos ou desvios se existirem. A euclidiana considera a distância entre dois pontos em linha reta. Já a retangular percorre a distância paralelamente aos eixos  $x$  e  $y$ , a geodésica considera as coordenadas esféricas.

Para cada métrica, deve-se definir a norma (expressão) que relaciona a distância aproximada da real.

### **2.3 MODELOS E MÉTODOS DE LOCALIZAÇÃO ESPACIAL, E DE OTIMIZAÇÃO**

Os modelos de localização espacialmente distribuídos podem ser divididos em dois grupos dinâmicos e estáticos.

❖ Modelos dinâmicos: consideram que o serviço ou equipamento alocado em uma determinada zona não esteja desocupado quando um usuário, dessa zona, o requerer, devendo-se utilizar outro equipamento.

Entre os modelos dinâmicos, destaca-se o hipercubo de filas, que avalia o desempenho do sistema pelo modelo de filas; o de simulação, que avalia o desempenho do sistema por simulação, e o da análise de utilidade, que usa a experiência de especialistas para dimensionar o sistema.

❖ Modelos estáticos: assumem que todos os serviços ou equipamentos estejam desocupados quando forem solicitados.

Quanto aos modelos estáticos, destacam-se o conjunto de cobertura ou cobrimento uniforme, em que todos os pontos de uma região são atendidos com um menor número de unidades; o minisum ou  $p$ -mediana, modelo que minimiza o custo médio associado a um número pré-estabelecido de unidades, e o minimax ou  $p$ -centro que minimiza, ao máximo, o custo de atendimento associado às unidades (Souza, 2002).

A literatura especializada em modelos de distribuição mostra haver uma grande variedade de problemas otimizados que, geralmente, minimizam o custo de viagens entre as unidades e os pontos de demanda. No entanto, quando aplicados a

sistemas de atendimento emergencial, apresentam algumas desvantagens, pois se houver limitação financeira para se adquirir novos equipamentos e/ou implementar novas instalações, por exemplo, o número destes pode não ser suficiente para atender a uma determinada demanda.

Souza (1999) afirma que é questionável a utilização de custos monetários para avaliar situações nas quais são envolvidas vidas humanas. Para muitos problemas, em particular para sistemas de atendimento emergencial, é admissível o emprego da distância como elemento definidor da distribuição dos servidores. Ele obteve bons resultados dispendo as Estações de Emergência otimamente e diminuindo o tempo de resposta de atendimento.

Em sistemas emergenciais, busca-se a máxima cobertura da área de demanda, como é observado em modelos de cobertura e recobrimentos.

A seguir, serão abordados alguns modelos matemáticos para o problema de localização e otimização, que darão suporte ao desenvolvimento desta tese.

### 2.3.1 Modelo MCLP- *Maximum Covering Location Problem*

O objetivo desse modelo é localizar um número de servidores (Estações de Emergência) tal que a máxima população de uma região seja coberta com a menor distância possível. Tal modelo maximiza o número de clientes que é coberto por, pelo menos, uma Estação de Emergência e busca a otimização de localização de pontos de serviços.

O MCLP é um modelo de localização e recobrimento sugerido por Toregas, Swain, Bergman e ReVelle (1971) e, mais tarde, aperfeiçoado por Church e ReVelle (1974), quando inseriram, no seu modelo, restrições de recobrimento, quando a ambulância estiver ocupada. O que objetiva minimizar o número de ambulâncias necessárias para atender a uma certa demanda.

Em 1986, Chung e ReVelle reformularam o modelo MCLP. Eles consideraram a restrição associada ao número máximo de ambulâncias para maximizar o atendimento de uma demanda por estações, dentro de uma área máxima de serviço.

Outra direção, segundo Marianov e ReVelle (1996), Boffey e Narula (1997), é dada da seguinte forma: maximizar a população que é “coberta”, pelo menos, por uma estação, como segue:

$$\max \sum_{j \in J} a_j y_j \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$y_i \leq \sum_{j \in J} x_j, \quad \forall i \in I$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p$$

em que  $y_i, x_j = 0, 1, \forall j \in J, i \in I$ .

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se estações localizadas no nó } j \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se nó } i \text{ é coberto} \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

sendo

$y_i \rightarrow$  cobertura do nó  $i$ ,

$x_j \rightarrow$  localização de unidades,

$J \rightarrow$  conjunto do número de estações,

$I \rightarrow$  conjunto do número de demandas,

$a_i \rightarrow$  despesas de serviço.

Nos trabalhos de Galiev e Satarov (1996), foram abordados problemas de localização de serviços de ambulâncias, modelos matemáticos e aplicação dos diagramas de Voronoi para divisão de regiões de abrangência desses serviços. Também apresentam alguns algoritmos para otimização de recobrimentos e recobrimentos múltiplos das regiões do plano, dados por cobertura no plano  $P$  por círculos ou no espaço euclidiano  $n$ -dimensional.

Como já apresentado, os métodos de otimização de recobrimentos e recobrimentos múltiplos podem ser utilizados para otimização das colocações das diferentes estações de serviços e, em particular, para otimização das disposições de Estações de Emergência.

### 2.3.2 Modelo Minmax ( $p$ -centro)

Esse modelo consiste em minimizar a distância máxima entre o ponto de demanda e a localização do ponto de serviço.

O objetivo do problema minmax é localizar  $p$ -serviço que, em geral, minimize a distância máxima entre o conjunto dos pontos de demanda e os servidores com abordado por Polyak (1988). Quando a localização dos servidores é limitada para nós de trabalho, o problema é convertido para o problema  $p$ -centro.

O referido modelo é muito utilizado para localização de Estações de Emergência, tais como Corpo de Bombeiros e tem estabelecido várias aplicações e resultados importantes na área de emergência.

Para a resolução desse problema, existem diferentes algoritmos e também outros modelos de resolução, como o minmaxmin,

O problema minmaxmin tem estabelecido várias aplicações no campo de sistemas emergenciais e obtido resultados importantes, como em Galiev (1993).

A seguir, será considerado o modelo minmaxmin para algum esquema de serviço e também algoritmos para investigar esse modelo.

### 2.3.3 Modelo Minmaxmin

Considera-se o problema da disposição ótima das Estações de Emergência para serviço de uma dada região, sob localização conhecida dos hospitais. É necessário escolher a colocação de  $n$  unidades de emergência para, assim, minimizar a distância final da rota até o ponto de chamada, depois até o hospital, para diferentes esquemas de serviços e para as métricas euclidiana e retangular.

Sejam  $x_i, y_i$  as coordenadas cartesianas dos  $c_i, 1 \leq i \leq n$ , e um vetor  $\xi$  determinado da seguinte maneira:



$$\xi = (x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n).$$

O problema de localização de Weber (problema minisum ou  $p$ -mediana) para estações  $c$  e  $c_i$  a  $i$ -ésima Estação de Emergência, que pode ser escrito como

$$\min_{\xi} f(x,y); \quad f(\xi) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n w_{ij} d(s_j, c_i), \quad (2.2)$$

em que  $w_{ij}$  é o peso associado com a distância  $d(s_j, c_i)$  entre uma demanda  $s_j$  e uma estação  $c_i$ ,  $N$  é o número de demanda (pontos)  $s_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ ,  $n$  é o número de estações (pontos)  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $d(s_j, c_i)$  é a distância introduzida entre o ponto de chamada  $s_j$  e uma estação  $c_i$  (por exemplo distância euclidiana ou retangular). Outro problema de localização (problema  $p$ -centro) pode ser escrito como modelo minmaxmin como dado em Drezner (1984):

$$\min_{\xi} \max_{1 \leq j \leq N} \min_{1 \leq i \leq n} w_{ij} d(s_j, c_i) \quad (2.3)$$

O mesmo autor demonstra que o problema minmaxmin (2.3) pode ser escrito como problema minmax

$$\min_{\xi} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}} Z_{ij} d(s_j, c_i) \quad (2.4)$$

com restrições

$$\sum_{j=1}^n Z_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq N, \quad Z_{ij} \in \{0,1\},$$

em que  $Z_{ij}$  são novas variáveis. Para o problema (2.4), foram apresentados diferentes algoritmos por Drezner (1984, 1995).

Para o caso contínuo, quando qualquer ponto  $s_j$  de  $G$  pode ser considerado como o ponto de chamada, o problema de localização das estações  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de emergência, na região  $G$ , pode ser escrito como:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(s_j, c_i) \quad (2.5)$$

em que  $f_i(s_j, c_i)$  é uma função de distância  $d(s_j, c_i)$ .

Modelos contínuos, mais gerais, podem ser escritos da seguinte maneira de acordo com Carrizosa, Munoz-Marquez e Puerto (1998): Seja  $n$  o número de estações na região  $G$ . Suponha-se que exista uma função tal que se  $n$  estações são dispostas nos pontos  $c_1, \dots, c_n$  tem-se:

$$\int_G f(s_j, c_1, c_2, \dots, c_n) d\mu(s_j) \quad (2.6)$$

A função pode ser uma função de distância  $d(s_j, c_i)$  e  $\mu$  a densidade de distribuição na região  $G$  dada. Então, o problema de otimização consiste em:

$$\min_{(c_1, c_2, \dots, c_n)} \int_G f(s_j, c_1, c_2, \dots, c_n) d\mu(s_j). \quad (2.7)$$

Como referido anteriormente, métodos de otimização de recobrimentos e recobrimentos múltiplos podem ser utilizados para otimização das colocações das diferentes Estações de Emergências, em particular, para otimização das colocações das estações de pronto-socorro.

Para resolução dos problemas de disposição ótima das estações (servidores), além dos métodos indicados, podem-se utilizar outros baseados na aplicação dos diagramas de Voronoi, os quais foram utilizados para diferentes problemas contínuos. Resultados fundamentais sobre diagramas de Voronoi também foram apresentados por outros autores como Silva (2004) e Galvão (2003).

Para uma dada região  $G$  conhecida, com a localização de  $m$  hospitais  $b_j$ , com  $1 \leq j \leq m$ , deve-se escolher o número necessário  $n$  de estações de emergência  $c_i$ , com  $1 \leq i \leq n$  e os pontos de chamadas  $s_j$ ,  $1 \leq j \leq N$  serão representados somente por  $s$ . Estabelecemos, então, problemas de recobrimento de região  $G$  para os seguintes casos:

1- Minimizar a distância máxima do ponto de chamada até a estação mais próxima de emergência entre todos os pontos de chamadas possíveis;

2- Minimizar a distância da rota até o ponto de chamada e depois até o hospital mais próximo e determinado após o diagnóstico (a posteriori).

Observa-se que os métodos indicados anteriormente são discretos, isto é, o conjunto de todos os pontos de chamadas é finito. Quando o número desses pontos

é grande, é mais adequado considerar os modelos contínuos, em que cada ponto de  $G$  é ponto de chamada. A seguir, consideram-se os modelos contínuos escritos na linguagem matemática e designados por:

$s(x, y)$  o ponto de chamada, onde está a vítima com coordenadas  $x, y$ ;

$c_i(x_i, y_i)$  o ponto onde está uma estação com coordenadas  $x_i, y_i, 1 \leq i \leq n$ ;

$b_i(x_i, y_i)$  o ponto onde está localizado um hospital de coordenadas  $x_i, y_i$  conhecidas,  $1 \leq i \leq m$ .

Em que,  $n$  = número de estações;  $m$  = número de hospitais e  $d(s, b)$  a distância euclidiana ou retangular entre os pontos  $s$  e  $b$ .

Seja  $\xi = (x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n)$ , em que  $x_i, y_i$  são coordenadas dos pontos  $c_i, 1 \leq i \leq n$ .

Então,

\* quando  $n = m$ , o modelo matemático poderá ser:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq i \leq n} [d(c_i, s) + d(s, b_i)] \quad (2.8)$$

\* quando  $n < m$ , (nesse caso, supõe-se que para cada estação, são determinados alguns hospitais e sejam  $l(i)$  os índices dos hospitais para a estação  $i$ ), pode-se obter o seguinte modelo:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq i \leq n} [d(c_i, s) + \min_{j \in l(i)} d(s, b_j)] \quad (2.9)$$

\* quando  $n > m$ , (nesse caso, supõe-se que para cada hospital são determinadas as estações que o servem) obtém-se o seguinte modelo:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq i \leq n} [d(c_i, s) + d(s, b_{j(i)})], \quad \text{com } j = j(i) \quad (2.10)$$

Se o modelo (2.10) excluir a distância até o hospital, obtém-se o modelo:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq i \leq n} d(c_i, s) \quad (2.11)$$

Considerar-se-á o modelo (2.11) quando não se levar em conta a distância da vítima até o hospital.

Esse modelo abordado por Galiev (1996) é usado para o problema de otimização de colocação de  $n$  estações de emergência de tal forma que minimizem a distância máxima do ponto de chamada até a estação mais próxima entre todos os pontos de chamadas possíveis. Se  $n = 1$ , então se obtém o modelo contínuo minmax ( $p$ -centro):

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} d(c_i, s) \quad (2.12)$$

Seja  $G$  um conjunto fechado, limitado no plano  $E^2$ , e o conjunto de regiões  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , que forma o recobrimento de  $k$ -múltiplo  $G$ . Se cada ponto  $s$  que pertencer a  $G$  não for menor que  $k$  regiões  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , e a distância euclidiana ou retangular  $d(s, c_i)$  entre os pontos  $s \in E^2$  e  $x_i, y_i$ , as coordenadas de centros  $c_i$  da região  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  sendo  $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Para o recobrimento  $k$ -múltiplo é dado o modelo:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{j \in J(\xi, s)} d(c_i, s) \quad (2.13)$$

sendo  $J(\xi, s)$  o conjunto de índices  $(N-k+1)$  regiões  $D_j$ , em que a distância do centro é maior ou igual à distância  $(k-1)$ , introduz-se os diagramas  $k$ -múltiplos de Voronoi formados pelo conjunto dos centros  $\{c_i, 1 \leq i \leq N\}$  e as distâncias por:

$$D_j = \left\{ s \in G : d(s, c_j) \leq \min_{i \in J(\xi(s))} d(s, c_i) \right\} \quad (2.14)$$

Como resultado, há diferentes problemas minmaxmin. Para resolvê-los, podem-se utilizar métodos numéricos ou usar os diagramas de Voronoi, que serão considerados a seguir.

## 2.4 DIAGRAMAS DE VORONOI

O diagrama de Voronoi determina as áreas de atuação ou abrangência de determinado serviço da região de domínio de cada um dos pontos do conjunto,

denominados pontos geradores, ou seja, consiste em achar “partes” de um espaço m-dimensional formado por poliedros.

Os diagramas de Voronoi têm sido estudados por vários autores em razão de sua importância e grande aplicabilidade na distribuição e otimização de algum tipo de serviço ou equipamento, como demonstrado por Galvão (2003), Silva (2004), Resende, Almeida, Nobre (2000), Galiev (1996), Lobo (2005), Galvão, Souza e Novaes (2000), Galvão et al (2006), Novaes et al (2007).

Esse diagrama compreende uma estrutura geométrica que foi inicialmente estudada em meados do século XIX pelos matemáticos Gauss e Dirichlet e depois aprofundada por Voronoi sendo definida também como tesselação de Dirichlet, zonas de Wigner-Seitz, polígonos de Thiessen, zonas proximais entre outras denominações.

#### 2.4.1 Diagrama De Voronoi a Partir Da Triangulação De Delaunay

Para gerar um diagrama de Voronoi, parte-se de um conjunto de protótipos e gera-se primeiramente uma triangulação. Para isso, usa-se o método da Triangulação de Delaunay, como mostra a figura 01.

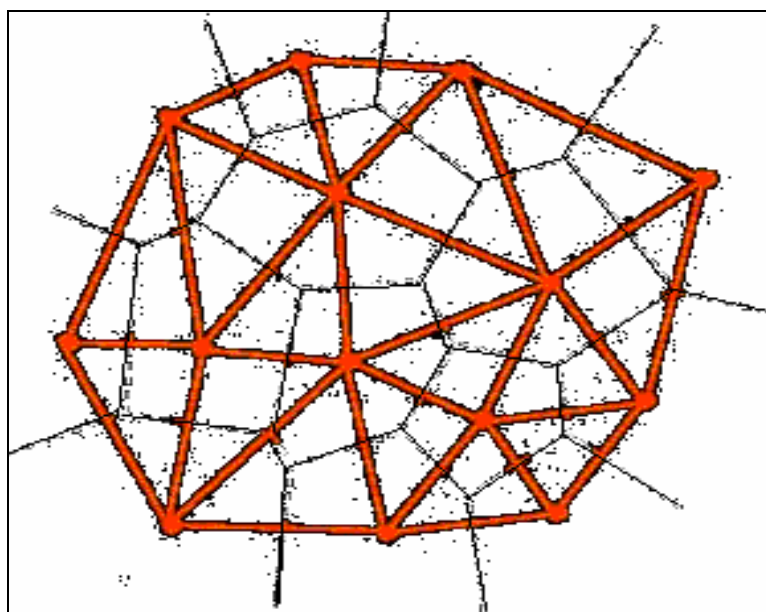


Figura 01- Diagrama de Voronoi e Triangulação de Delaunay.

Realizada a triangulação, geram-se linhas que formarão as fronteiras das regiões do diagrama de Voronoi. Esses limites são gerados por linhas perpendiculares ao ponto médio (mediatrizes) de cada aresta da triangulação produzida anteriormente. As intersecções dessas perpendiculares formam os vértices das células do diagrama de Voronoi. Os segmentos de retas das perpendiculares, que se estendem para além de sua primeira intersecção com outra perpendicular, nos dois sentidos, são descartados.

#### 2.4.2 Diagrama De Voronoi Ordinário

O diagrama de Voronoi é formado com base numa regra que determina que dado um conjunto de locais (pontos) no plano, associa-se a cada local, a região do seu plano mais próximo dele, podendo-se encontrar qual o ponto mais próximo ou qual o local mais próximo de um ponto dado.

Alguns pontos do plano podem ser associados a dois ou mais outros desse conjunto e são chamados de fronteira.

O diagrama de Voronoi também pode ser desenvolvido em três dimensões como é demonstrado por Ledoux e Gold (2003).

Esses autores usaram Voronoi em três dimensões, em que uma cela de Voronoi generaliza um poliedro convexo formado por faces convexas, como mostra a figura 02.

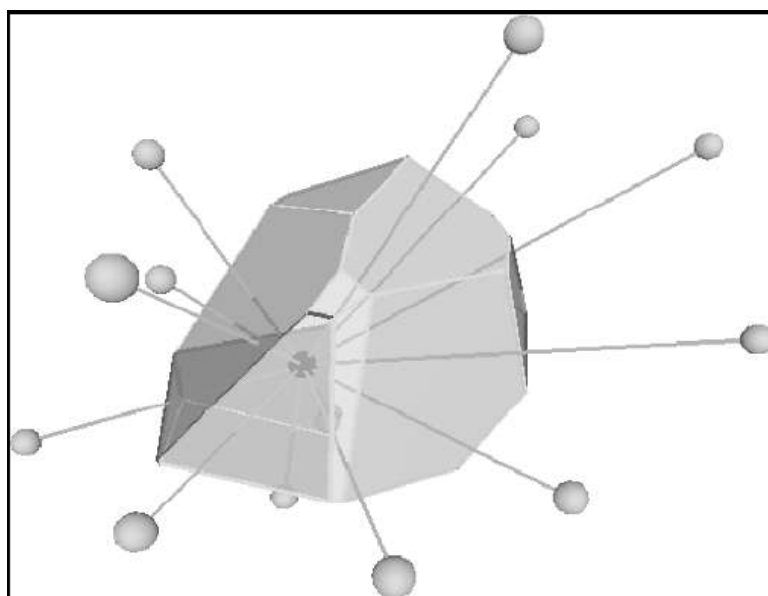


Figura 02- Diagrama de Voronoi em três dimensões.

Para a comprovação da tese proposta neste trabalho, o diagrama de Voronoi em duas dimensões será suficiente, pois trata-se da localização de pontos de serviços num plano.

Para definir as regiões de Voronoi serão abordados alguns conceitos.

Sejam  $a$  e  $b$  os pontos do plano  $P$  com coordenadas  $(x_a, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$  e a distância euclidiana entre esses pontos dada por:

$$d(a, b) = [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2]^{1/2} \quad (2.15)$$

Na maior parte das cidades, não se pode ir de um ponto qualquer “ $a$ ” até outro ponto “ $b$ ” unindo “ $ab$ ”. É necessário utilizar as ruas que, como via de regra, na maioria das vezes, são perpendiculares.

A distância retangular considera a distância paralela aos eixos  $x$  e  $y$ .

Introduzindo a distância retangular,

$$r(a, b) = |x_b - x_a| + |y_b - y_a|, \quad (2.16)$$

obtém-se a distância entre “ $a$ ” e “ $b$ ” por linha perpendicular.

Segundo Galiev (1996), algumas das propriedades da região de Voronoi são:

- 1-  $\cup D_j = G$ , a união de todas as regiões  $D_j$  que formam a região  $G$ .
- 2-  $\{D_j, 1 \leq j \leq n\}$  cobrem cada ponto  $s \in G$  não menor que uma vez. Se  $s$  não é ponto de fronteira, então ele é encoberto uma vez.
- 3- Se o conjunto das regiões  $D_j, 1 \leq j \leq n$  forma recobrimento de  $G$ , então  $D_j \subseteq G$  para qualquer  $j, 1 \leq j \leq n$ .

O diagrama de Voronoi possui a característica de dividir a área em estudo de modo que os pontos, dentro dessa área, estão mais próximos de seu centro do que qualquer outro.

No conjunto gerador de pontos  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ , o ponto  $p$  é associado ao conjunto da figura poligonal.

Os polígonos  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , recebem o nome de polígonos de Voronoi e uma malha de Voronoi é determinada sobre um plano.

Os vértices dos polígonos estão a três ou mais arestas, sendo, portanto, pontos equidistantes entre três ou mais locais.

A determinação dos  $p$  centros em um problema de localização pode ser resolvido pelo deslocamento dos centros de cada polígono de Voronoi. Esse deslocamento tem por objetivo a minimização da máxima distância dentro de cada zona, sem precisar considerar a demanda de chamadas de cada região.

Silva (2004) apud Suzuki e Okabe (1995) observaram que a construção de algoritmos eficientes que determinem a divisão de Voronoi é muito importante para a aplicação desse método na resolução de problemas de localização e sugerem:

Passo 1: gerar  $p$  centros randomicamente num espaço  $S$ ;

Passo 2: construir o diagrama de Voronoi desses  $p$  centros;

Passo 3: encontrar os circuncentros dos polígonos formados;

Passo 4: re-alocar os  $p$  centros para os centros calculados no passo 3;

Passo 5: se a troca for menor que uma determinada tolerância especificada, parar, caso contrário, ir para o passo 2.

O processo deve ser repetido um número  $n$  de vezes e deve-se escolher a melhor resposta, que estará próxima da solução ótima.

Freqüentemente, a iteratividade dos algoritmos implica em muitas determinações de diagramas de Voronoi distintos. Segundo Galvão (2003), para o processo iterativo de resolução deve-se ter um equilíbrio entre as zonas, mas, muitas vezes, pode ocorrer que alguma delas fique com o seu formato comprometido ou, que o centro fique fora da sua zona. Para se evitar esse tipo de problema, a determinação dos  $p$  centros são gerados aleatoriamente, sempre com a intenção da minimização das distâncias máximas em cada zona.

Mas, se o processo de deslocamento dos centros for realizado muitas vezes, o resultado será uma possível solução dos problemas de  $p$  centros, deixando de considerar o equilíbrio das chamadas. Para isso não acontecer, deve-se executar o deslocamento de centros de modo proporcional ao desvio das chamadas: quanto maior for o desvio, maior a probabilidade do deslocamento ser aceito. O processo de construção do diagrama de Voronoi será detalhado a seguir.



Neste trabalho, os  $p$  centros iniciais serão os pontos de localizações das Estações de Emergência já existentes.

A construção do diagrama de Voronoi ocorre primeiramente ao levar-se em conta um conjunto de pontos não colineares,  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ,  $n > 2$ , no plano Euclidiano, denominados “pontos geradores”. Entre esses pontos, são traçadas retas eqüidistantes entre si, que irão formar as bordas dos polígonos. Cada polígono, fechado e adjacente a outro, contendo apenas um dos pontos geradores, é denominado região *de Voronoi*, conforme ilustra abaixo a figura 03.

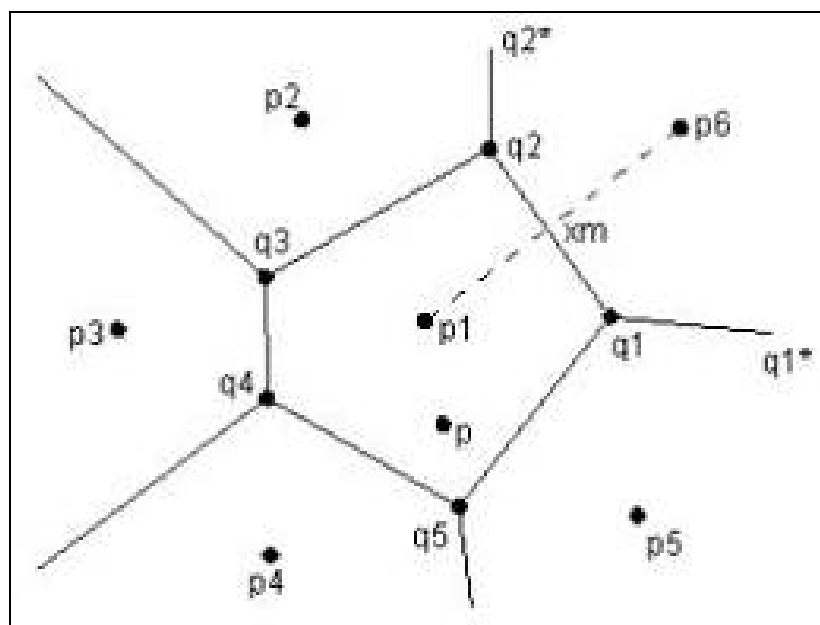


Figura 03- Diagrama de Voronoi ordinário

Se uma função que caracteriza a proximidade for a distância euclidiana, a partição será um conjunto de polígonos. Cada polígono é definido como:

$$V(p_j) = \{x / \|x - x_j\| \leq \|x - x_k\|, \forall j \neq k\}, \quad (2.17)$$

sendo  $j$  e  $k$  elementos do conjunto gerador.

No Diagrama de Voronoi Clássico, os pontos geradores não possuem pesos diferenciados e sua construção depende apenas da distância entre eles.

Uma vez definida geograficamente a localização dos pontos geradores, procede-se à construção dos polígonos.

A área de abrangência, construída a partir do diagrama de Voronoi Clássico, apresentando os pontos geradores, centróides, está representada na figura 04.

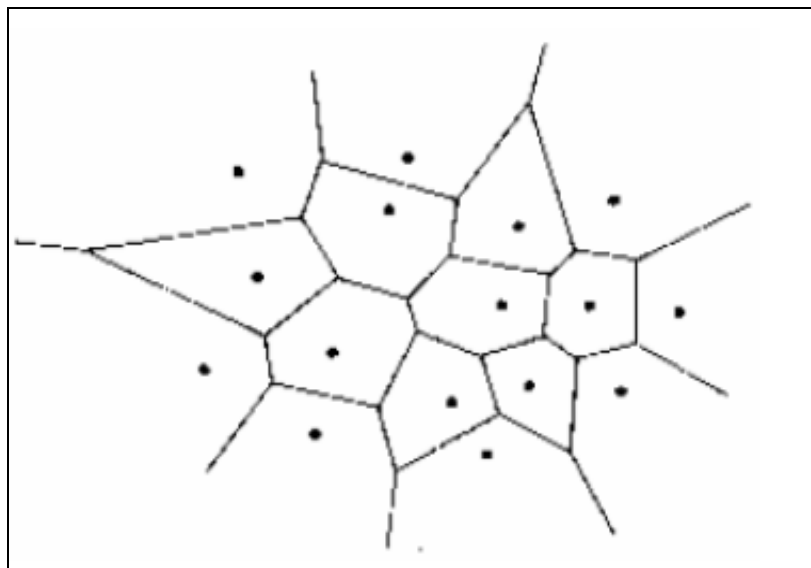


Figura 04-:Localização dos centróides por Voronoi

O processo para a determinação da divisão da área em estudo dá-se, conforme abordado por Silva (2004), do seguinte modo:

Passo 1: Dividir a área por linhas paralelas e perpendiculares, constituindo-se uma malha definida;

Passo 2: Verificar cada nó de malha mais próximo ao centro de Voronoi.

Cada nó mais próximo pertencerá à região daquele centro  $i$ .

Se o ponto pertencer ao centro da região  $i$ , os demais pontos internos a ele também pertencerão à região.

Se a malha é dividida em retângulos ainda menores, a divisão de Voronoi, por esse método, fica muito próxima da obtida analiticamente. Esse aumento do número de retângulos faz com que o tempo computacional para a resolução das distâncias entre os pontos dos retângulos e os centros aumente consideravelmente.

Para diminuir o tempo computacional, o autor considerou um artifício, baseado no algoritmo de *Quadtree*, Novaes et al (2007), (que tem por base uma árvore de busca em que cada nó possui quatro ramos, o que diminui o tempo de busca) para minimizar esse tempo, ou seja, se um ponto, pelo canto superior esquerdo de um retângulo, pertencer a mais de uma região, faz-se a sua divisão em mais partes iguais. Dentro dessa nova malha obtida, precede-se o passo 2, achando-se o centro mais próximo. Com esse processo, faz-se com que o tempo de

resolução do algoritmo não se eleve, tornando mais rápido o processo de obtenção dos resultados.

Em razão das características do problema estudado por Silva (2004), em que se trabalha com uma malha para a definição da função contínua, não será utilizado um método analítico e sim um que trabalha em uma malha definida sobre a região. Na figura 05 podem-se observar as linhas que formam as regiões pelo método analítico, e as regiões coloridas pelo método abordado por Silva (2004).

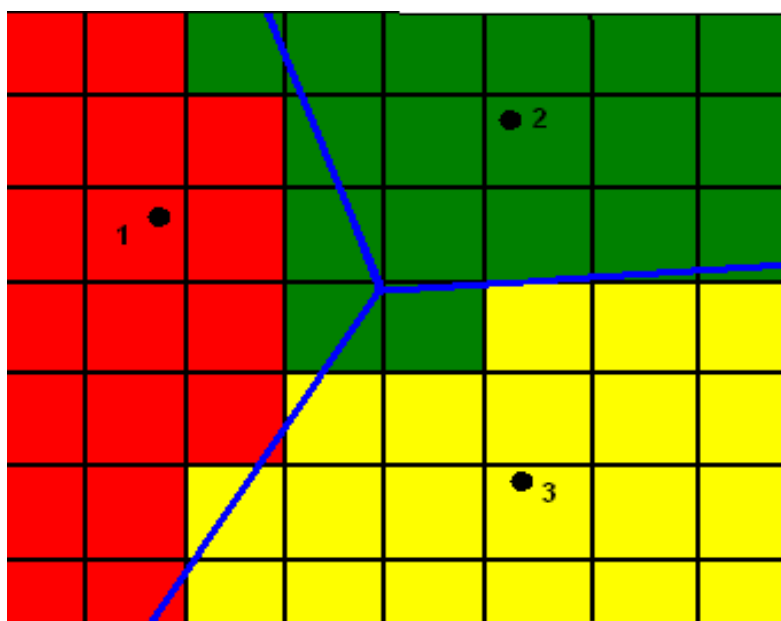


Figura 05- Demonstração do Voronoi analítico e sobre a malha.

Explicações mais detalhadas desse processo podem ser encontradas em Silva (2004), Galvão (2003) e Novaes et al (2007).

No diagrama de Voronoi ordinário, assume-se que os pontos geradores possuem o mesmo peso. O mesmo não acontece, em alguns casos, quando as regiões possuem características que não podem ser consideradas iguais para todos os pontos, devendo-se considerar pesos diferentes para cada uma.

Existem vários tipos de diagramas de Voronoi, como por exemplo o diagrama de Voronoi ordinário, por pesos, por pesos aditivos, por potência, com obstáculos abordado por Silva (2004), do menor caminho, entre outros.

O objetivo da pesquisa inclui a construção de regiões ponderadas, fazendo-se necessário o uso de outra variável para que, cada ponto, cada Estação de Emergência, receba peso diferenciado de acordo com as características relevantes,

as quais se supõe, possam alterar seu “poder de decisão”. Muitas variáveis podem ser empregadas para isso como, por exemplo, o número de unidades emergenciais em cada estação, o número de chamadas e o tempo de deslocamento.

### 2.4.3 Diagrama De Voronoi Multiplicativo Por Pesos

Esse método permite caracterizar as potenciais áreas de influência de localização para a instalação de pontos de serviços, como estações de emergência.

O diagrama de Voronoi multiplicativo por pesos difere do ordinário pelos seus pontos geradores; no ordinário o peso é igual, o que não acontece no ponderado.

Para comprovação desta tese será necessário usar o diagrama de Voronoi multiplicativo por pesos, visto que há a necessidade de serem empregados pesos diferentes às zonas de atendimento, pois há fatores que podem influenciar na dimensão e divisão das áreas de abrangência de cada estação de emergência, como já citado anteriormente.

Considera-se um peso  $w_i = \{w_{i1}, \dots, w_{im}\}$  associado a cada  $p_i$  num conjunto de pontos distintos

$$P = \{p_1, \dots, p_m\} \subset R^m \quad (2 \leq m < \infty) \quad (A = P, S = R^m) \quad (2.18)$$

A distância  $d_w(p, p_i)$  é definida de  $p$  para  $p_i$ , com uma região de domínio dada por:

$$Dom(p_i, p_j) = \{p/d_w(p, p_i) \leq d_w(p, p_j)\} \quad (2.19)$$

Com  $j \neq i$  e

$$V(p_i) = \bigcap_{j=1}^n Dom(p_i, p_j) \quad e \quad (2.20)$$

$$V(p, d_w) = V_w = \{V(p_1, \dots, V(p_m))\} \quad (2.21)$$

O conjunto  $V(p_i)$  é chamado de região do Voronoi multiplicativo com pesos associados com  $p_i$  ou para abreviar, região *mw* Voronoi de  $p_i$ .

O diagrama *mw* Voronoi reduz-se ao ordinário quando  $w_i$  é uma constante e igual  $\forall i \in I_n$ . Assim, pode-se considerar o diagrama *mw* Voronoi como uma generalização do ordinário.

A característica desse tipo de diagrama de Voronoi por pesos é a distância ponderada, como é dada a seguir:

$$d_{mw}(p, p_i) = \frac{1}{w_i} \|x - x_i\|, w_i > 0 \quad (2.22)$$

Segundo Okabe, Boots e Sugihara (1992), a distância multiplicativa por pesos ou de  $mw$  distância é uma região de domínio com essa distância, dada por

$$Dom(p_i, p_j) = \{x / \frac{1}{w_i} \|x - x_i\| \leq \frac{1}{w_j} \|x - x_j\|\}, i \neq j. \quad (2.23)$$

Por meio da equação (2.23), é obtida a mediatriz dada pela expressão

$$b(p_i, p_j) = \{x / \|\frac{w_i^2}{w_i^2 - w_j^2} x_j + \frac{w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} x_i\| = \frac{w_i w_j}{w_i^2 - w_j^2} \|x_j - x_i\|\}, \quad (2.24)$$

com  $w_i \neq w_j$  e  $i \neq j$

Sendo que a mediatriz satisfaz a condição de que a distância de  $p$  aos pontos fixos dados por,  $[w_i^2 x_j / (w_i^2 - w_j^2)] - [w_j^2 x_i / (w_i^2 - w_j^2)]$  seja constante.

Obtém-se um círculo em  $R^2$ . Este passa pelos pontos de divisão interior e exterior (denotados por  $p_{ij1}$  e  $p_{ij2}$ ) de  $\overline{p_i p_j}$  com razão  $w_i, w_j$ , o diâmetro é determinado por meio de  $\overline{p_{ij1} p_{ij2}}$ , que é conhecido como círculo de Apollonius.

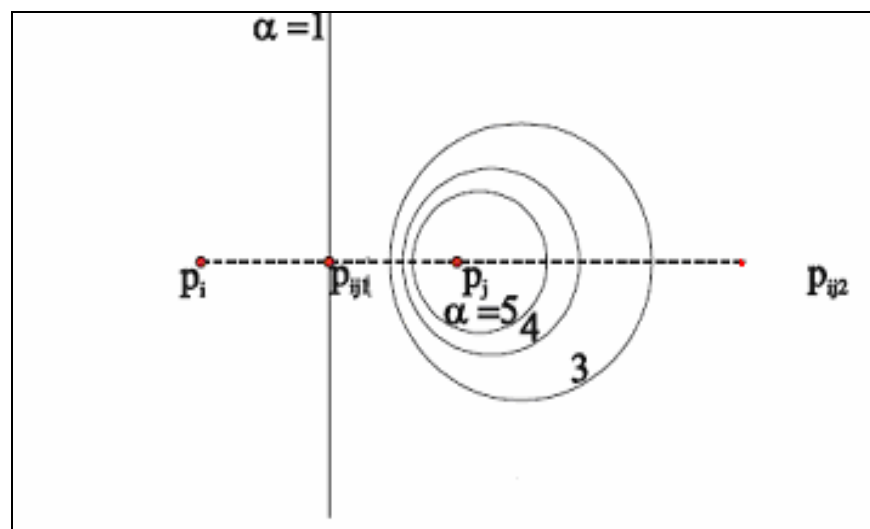


Figura 06- Voronoi multiplicativo por pesos para  $\alpha = 3$

A figura 06 representa a mediatriz definida com a  $mw$  distância para várias razões  $\alpha = \frac{w_i}{w_j}$ , com  $\frac{w_i}{w_j} \geq 1$  sem perda de generalidade. Se  $\alpha=1$  ( $w_i = w_j$ ), a mediatriz é uma linha reta, ou um círculo com um raio infinito.

Na equação (2.22), é usada a notação  $\frac{1}{w_i}$ , mas matematicamente também pode ser aceito somente  $w_i$ . Nessa equação, é adotada  $\frac{1}{w_i}$  porque, como pode ser observado na figura 06, a região de domínio de  $p_i$  sobre  $p_j$  fica maior quando se aumenta o peso  $w_i$  (ou  $\alpha$ ).

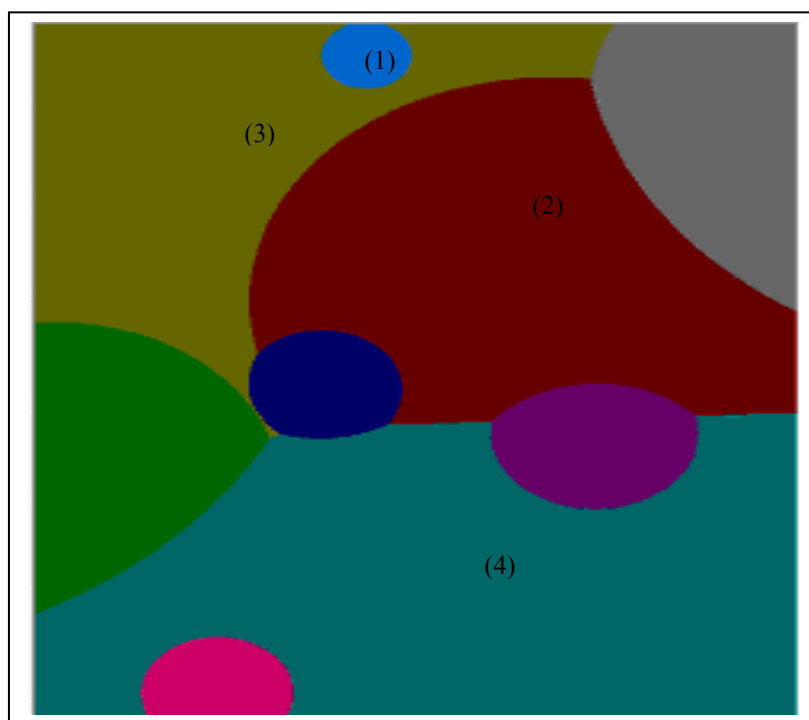


Figura 07- Localização de centros geradores por pesos

A seguir, observam-se as propriedades geométricas de um diagrama  $mw$  Voronoi, representados na figura 07 em que representam os pesos associados geradores a cada região. Se o ponto gerador com o peso máximo é único, somente uma região  $mw$  Voronoi é infinita, como é mostrado pela região  $mw$  Voronoi esverdeada na figura 07.

Na figura 06, observa-se que a mediatriz  $b(p_i, p_j)$  pode ser um círculo como uma linha reta e, na figura 07, verifica-se que a fronteira de Voronoi, compartilhada

por  $V(p_1)$  e  $V(p_4)$ , é desconectada. Dessa observação, com respeito às extremidades, tem-se a terceira propriedade.

Primeiro,  $V(p_2)$  não é convexo. Segundo,  $V(p_1)$  está contido em  $V(p_3)$  ou  $V(p_3)$  tem um buraco. Terceiro,  $V(p_4)$ , indicado pela região esverdeada, não é conectado. Quarto, os pesos das regiões  $mw$  Voronoi adjacentes a uma região  $mw$  Voronoi convexa. Pode-se entender essa propriedade de convexidade da região de domínio na figura 07 e o fato que  $Vp_i$  é a interseção das regiões de domínio. Quinto, da mesma figura e da mesma equação, nota-se que aquele  $V(p_i)$  não é vazio porque os pesos são finitos.

Para melhor entender-se o que está ocorrendo, abordar-se-ão as seguintes propriedades abordadas por Okabe, Boots e Sugihara (1992):

Propriedade 1:

Uma região  $mw$  Voronoi é um conjunto não vazio; não precisa ser convexo ou conectado e pode ter buraco(s). Uma região  $mw$  Voronoi  $V(p_i)$  é convexa se e somente se os pesos das regiões  $mw$  Voronoi adjacentes não forem menores que  $w_i$ .

Propriedade 2:

Seja  $w_{\max} = \max_j \{w_j, j \in I_n\}$  e  $P_{\max}$  ser o subconjunto de  $P$  dado por  $P_{\max} = \{p_j / w_j = w_{\max}\}$ . Uma região  $mw$  Voronoi  $V(p_i)$  é infinita se e somente se  $p_i \in P_{\max}$  e  $p_i$  estiver sobre a fronteira de  $CH(P_{\max})$ .

Propriedade 3:

Duas regiões  $mw$  Voronoi podem compartilhar fronteiras desconectadas. Uma fronteira é um arco circular se e somente se os pesos das regiões  $mw$  Voronoi que compartilham a fronteira forem diferentes; uma fronteira é uma linha reta se e somente se os pesos das regiões  $mw$  Voronoi que compartilham a fronteira forem iguais.

Os pontos geradores terão pesos diferentes. Para isso, devem-se determinar os centróides. Cada centro gerador vai determinar um ponto de localização.

Galvão et al (2006) apresenta em seu trabalho, os diagramas de Voronoi multiplicativos por pesos, determinando o equilíbrio de carga entre as regiões, os quais são divididos, de forma radial, pela seguinte equação:

$$d_w(p_i, p_j) = \frac{1}{w_i} d_\varepsilon(p_i, p_j), \quad (2.25)$$

em que  $w_i$  é o peso de cada região e  $d_\varepsilon$  representa a distância euclidiana ou retangular.

Para determinar o número de centros, é necessário seguir:

Seja  $t_i$  o tempo estimado de deslocamento até o  $i$ -ésimo ponto de demanda que é dado por:

$$t = \sum_{i=1}^{np} t_i \quad (2.26)$$

O ponto  $(p_i, p_j)$  será substituído pelo ponto  $(c_i, s_i)$ . Com  $d_{max}$  sendo a distância total entre a estação e os pontos de atendimento  $s_i$ ,

$$d_{max} = \max d(c_i, s_i), \quad i = 1, 2, \dots, np \quad (2.27)$$

Para o cálculo da distância, considera-se a seguinte fórmula:

$$D(s_i, c_i, w_i) = (d^*(s_i, c_i))^2 - w_i \quad (2.28)$$

sendo  $d^*(s_i, c_i)$  a distância euclidiana ou retangular.

A atribuição dos pesos não pode ser feita de qualquer maneira, precisa-se de um equilíbrio entre os pesos associados a cada centro e às zonas de atendimento. Inicialmente, cada zona tem o mesmo peso dividindo a área igualmente, mas, se há um aumento no peso para um dos centros, o valor da distância do ponto até um dos centros aumentará e a outra diminuirá. Isso acontecerá também com as áreas. Para o equilíbrio das regiões, os pesos devem ser distribuídos de forma proporcional ao número de ocorrências pelo tempo de deslocamento em cada região que, quando aumentado em uma região, o da outra deve ser diminuído.

Para melhor compreensão desse assunto, mostra-se, a seguir, como é realizada essa atribuição dos pesos conforme Silva (2004). Ele utilizou essa abordagem para tempo de deslocamento e quantidade de carga, e, neste estudo, a carga será substituída pelo número de chamadas.



Para um diagrama de Voronoi com um certo número de  $n$  regiões, o peso  $w_i^k$  associado a cada uma delas com seus centros fixos e  $N_i^k$  o número de chamadas da  $i$ -ésima região na iteração  $k$ , sendo esses números dispostos numa certa ordem como é dado a seguir

$$N_{i1}^k \geq N_{i2}^k \geq \dots \geq N_{in}^k \quad (2.29)$$

com o número médio de chamadas,  $m^{-k}$  sendo dado por:

$$m^{-k} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i^k}{n} \quad (2.30)$$

e o desvio padrão por:

$$\sigma^k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m^{-k} - N_i^k)^2}{n-1}} \quad (2.31)$$

para a alteração no peso de cada região utiliza-se a fórmula:

$$v_i^{k+1} = \frac{N_i^k - m^{-k}}{d}, \text{ com } d > 0 \quad (2.32)$$

$$w_i^{k+1} = w_i^k + v_i^{k+1} \quad (2.33)$$

Sendo que o valor de  $v_i^{k+1}$  varia diretamente em relação à chamada de uma dada região na iteração anterior, isto é, quanto maior for  $N_i^k$  maior será o valor de  $v_i^{k+1}$ . Além disso, quando  $N_i^k$  tem valor superior da média  $\overline{m}^{-k}$ , o valor de  $v_i^{k+1}$  será positivo. Assim, tem-se que o numerador e o valor da alteração do peso serão positivos.

$$N_i^k > m^{-k} \Rightarrow N_i^k - m^{-k} > 0 \quad (2.34)$$

Mas, se  $N_i^k$  possui valor inferior ao da média, conseqüentemente, a alteração do peso de sua região será negativo.

O valor  $w_i^k$  será subtraído  $v_i^k$  de chamadas da maior região e será adicionado ao valor de o número de  $v_i^k$  da menor região, o que implica considerar que haverá alteração no peso que antes era  $[w_{in}^k, v_{il}^k]$  e agora passa a ser  $[w_{in}^k + v_n, w_{il}^k - v_1]$ .

Quando as alterações mínimas entre o número de chamadas de uma dada região e outra diminuem, o valor da dispersão verificada pelo desvio padrão também diminui.

Deve-se escolher um valor mínimo para  $d$  utilizado na expressão (2.32) de tal forma que o desvio encontrado diminua.

Para se encontrar o melhor valor de  $d$ , deve-se atribuir um determinado valor e testá-lo no diagrama de Voronoi. Se esse valor diminuir o desvio na nova iteração, ele é aceito e o processo é interrompido. Caso contrário, atribui-se um novo valor, agora para  $d = d*2$ , até  $d$  ser aceito.

## 2.5 TEORIA DAS FILAS

A formação de filas de espera é um fenômeno comum que ocorre sempre que a demanda por um determinado serviço excede a capacidade do seu fornecedor. A teoria das filas fornece um grande número de modelos matemáticos para descrever uma situação de fila de espera, permitindo calcular a medida de desempenho de um determinado serviço assim como verificar a qualidade desse sistema.

Panico (1969) afirma que a teoria das filas consiste em um estudo matemático de linhas de espera. Por esse estudo, é possível isolar fatores como a duração de espera, o tempo de espera em particular, a probabilidade de ter um elemento no sistema e suas características.

Num processo de fila, clientes entram num sistema requerendo algum tipo de serviço e geram uma fila, podendo esta ser física ou conceptual (por meio de senhas com um número de atendimento, por exemplo). Um cliente é selecionado seguindo algum critério, o serviço é realizado e ele deixa a fila, como exemplifica a figura 08.

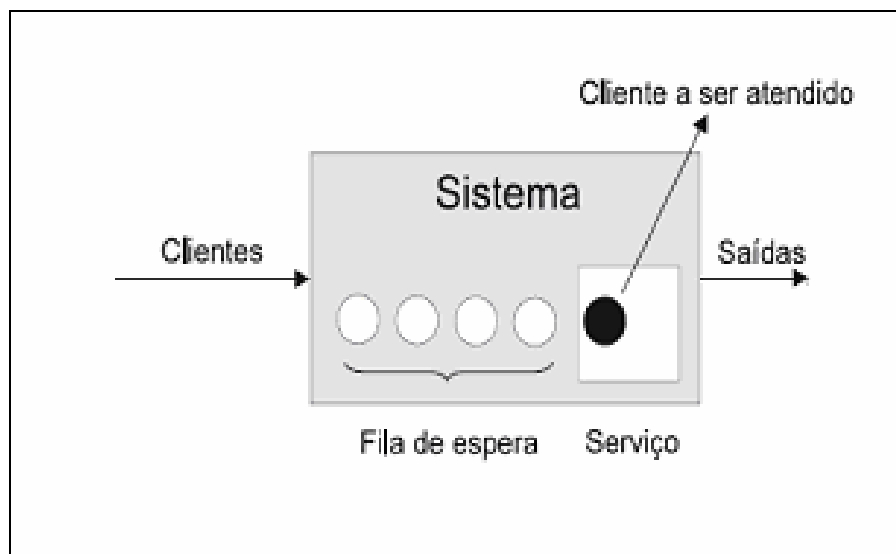


Figura 08- Estrutura de um sistema de fila de espera.

Conforme Oliveira (1998), a fonte, quanto a população, pode ser finita ou infinita. Quando infinita, a probabilidade de ocorrer uma nova chegada não é influenciada pelo número de clientes que já estão no sistema. Quanto à chegada, a fonte pode ser um a um ou em grupos, podendo ser controladas ou não controladas. A distribuição das chegadas pode ter tempo entre chegadas consecutivas ou por unidade de tempo. Quanto à taxa de chegada, tanto pode ser independente como dependente do estado do sistema. A fonte pode ter um número simples, ou seja, fila única, ou múltipla, uma fila por posto de atendimento.

Já a disciplina da fila, refere-se à ordem em que os clientes são selecionados na fila. A menos que seja definido o critério de seleção, como prioridade, normalmente o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido. O comprimento da fila pode ser finito (conter um pequeno número de clientes) ou infinito (a capacidade máxima de clientes na fila é muito grande).

Referente ao tipo de serviço, tem-se uma configuração de um servidor e múltiplas fases, múltiplos servidores e uma fase, múltiplos servidores e múltiplas fases ou ainda redes de filas, sendo a dimensão simples ou em grupo.

O serviço tem uma distribuição de tempo constante ou aleatório, com uma taxa dependente ou independente do sistema.

Para resolver um problema de filas, deve-se proceder as seguintes decisões:

- \* Quantos servidores uma instalação de serviço deve ter;
- \* A eficiência dos servidores;
- \* O número de instalações de serviços;
- \* Qual modelo mais apropriado.

Um sistema de filas é caracterizado pelo modelo de chegada dos usuários, modelo de serviço, número de atendentes, capacidade do sistema e ordem de atendimento aos usuários.

Taha (1971) fez um estudo profundo sobre alguns modelos de sistemas de filas, no qual foram consideradas diferentes aplicações, em particular uma abordagem de como calcular o número ótimo de servidores, conhecendo-se o custo de serviço e a perda de clientes nas filas.

Galvão, Chiyoshi, Espejo e Rivas (2003) trabalharam com o modelo do problema de localização da máxima disponibilidade estendida para o caso em que a taxa de ocupação é calculada para cada facilidade separadamente, com a utilização do modelo hipercubo.

Takeda, Widner e Morabito (2004) consideraram o problema da descentralização de ambulâncias pelo sistema (SAMU), de Campinas-SP, com a aplicação do modelo hipercubo de filas, constatando que esse modelo produz resultados que elevam o nível de serviço.

Chiyoshi, Galvão e Morabito (2000) abordaram em seu artigo, hipóteses básicas, desenvolvidas por Larson e Odoni (1981), as quais devem ser satisfeitas para que o modelo hipercubo seja utilizado. Para se aplicar esse modelo, deve-se considerar o quanto o sistema real não se ajusta à robustez do modelo ou se é melhor considerar outro, mesmo que existam possíveis limitações.

Iannoni (2005) desenvolveu um método para analisar sistemas de atendimento emergenciais em rodovias. Ela usou também o modelo hipercubo, conjuntamente com o algoritmo genético, para analisar as medidas de desempenho do sistema de filas, e constatou que, quando o número de servidores for maior que doze (12), o modelo fica inviável computacionalmente, tendo que se recorrer ao modelo de simulação para resolução do problema.

Costa (2003) divide a área em estudo em outras pequenas que denominam átomos geográficos. Cada átomo é considerado como um grande gerador de serviço ao longo do tempo. Constatou também que o modelo hipercubo fica intratável quando o número de servidores ultrapassa doze (12) unidades.

O modelo de chegada dos usuários é determinado pelo tempo de chegadas, podendo ser determinístico (conhecido) ou aleatório.

A teoria das filas já foi usada para analisar diferentes sistemas de serviços, como por exemplo, telefonia, bombeiros, hospitais, bancos e serviços de ambulâncias. Toda vez que clientes se dirigem a um ponto de serviço e que clientes ou instalações tenham de esperar, gera-se um processo de fila. Esse problema pode ser resolvido se houver uma programação nas chegadas ou no fornecimento de instalações, ou em ambas, de modo a minimizar ou maximizar uma determinada função.

### 2.5.1 Processos De Chegadas e Serviços

O padrão de chegadas pode ser representado pelo tempo entre duas chegadas consecutivas ou pelo número de chegadas por unidade de tempo, podendo ser constante ou aleatório. É constante quando o intervalo de tempo entre chegadas consecutivas é fixo, e aleatório quando o intervalo de tempo entre chegadas consecutivas é incerto.

Algumas distribuições para calcular o processo de chegadas de tempos são demonstradas por Odoni (2001), conforme a figura 09.

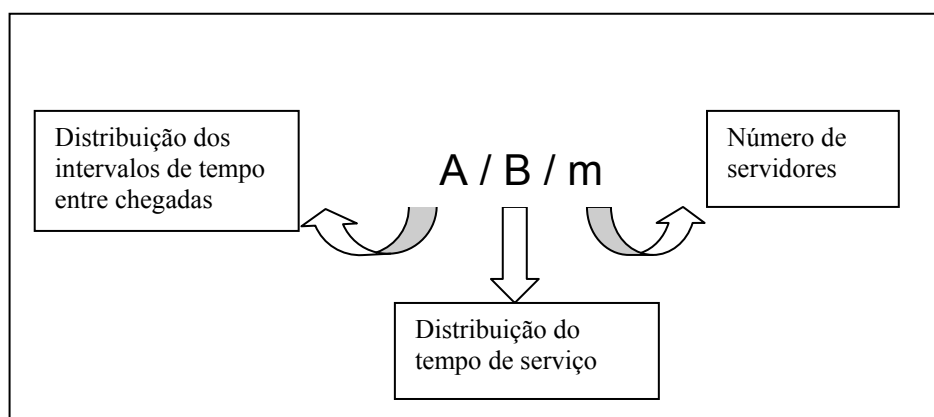


Figura 09- Representação de códigos de distribuições.

Códigos típicos para A e B:

M: exponencial negativa; Poisson;

D: determinística;

$E_k$ : distribuição Erlang de ordem  $k$ ;

G: distribuição genérica.

Devem-se pesquisar os padrões de chegada e de serviço de um sistema de filas que, por motivos matemáticos, tenham a mesma probabilidade, em qualquer intervalo de tempo, e a ocorrência de outra chegada, no sistema, seja independente do tempo decorrido da última chegada.

### 2.5.2 Chegadas Aleatórias De Poisson e Duração De Serviço Exponencial

Supõe-se que o processo de chegada assuma uma distribuição de Poisson, pois os clientes chegam aleatoriamente, mas com uma taxa média de chegada. O tempo entre as chegadas consecutivas deverá seguir uma distribuição exponencial.

Segundo Taha (1971), para A. K. Erlang, pioneiro na teoria das filas, as chamadas chegam às estações com uma configuração cuja hipótese de distribuição de Poisson leva a considerações satisfatoriamente aproveitáveis de serviços. As hipóteses de Poisson podem falhar quando as chegadas forem programadas, os erros das horas pequenos em comparação aos intervalos programados e quando as chegadas resultam de um processo dependente do tempo. A distribuição de Poisson possui variância pequena, possibilitando a sua aceitação.

Para Fonseca e Martins (1996), pode-se provar, pela distribuição de Poisson, que a probabilidade de  $n$  chegadas em qualquer intervalo de tempo finito,  $t$ , é dada pela função de probabilidade.

$$P(X = x) = P_x = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{n!} \quad (2.35)$$

em que,  $\lambda$  é o número médio de acontecimentos por unidade de tempo,  $t$  é o comprimento do intervalo de tempo em análise e  $x = 1, 2, \dots$ , é o número de acontecimentos.

Um sistema de filas com qualquer distribuição de duração de serviço, com ( $m$ ) servidores idênticos, pode alcançar o estado estacionário desde que a taxa média de chegadas por servidor ( $\alpha/m$ ) seja menor que a taxa média de serviço por servidor ( $\mu$ ):

$$\frac{\alpha}{m\mu} < 1,$$

Se a média de chegada for igual à de serviço por unidades, a menos que as chegadas sejam regularmente espaçadas em tempos iguais ao médio de serviço, a fila aumentará indefinidamente, pois não se pode guardar ou recuperar o tempo de serviço utilizado.

Hillier e Lieberman (1988) definem que duas propriedades estatísticas determinam as características de operação dos sistemas de filas: a distribuição de probabilidade dos tempos entre chegadas e a distribuição de probabilidade dos tempos de serviço, sendo que tais distribuições podem assumir qualquer forma, menos valores negativos.

Oliveira (1998) define mais detalhadamente algumas dessas propriedades a seguir mencionadas.

Se o tempo entre dois acontecimentos consecutivos segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro  $\alpha$ , então o número de acontecimentos por unidade de tempo  $t$  segue uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\alpha t$ .

A distribuição exponencial negativa não tem memória e a probabilidade de ocorrência de um acontecimento é independente do instante de tempo em que ocorreu o acontecimento imediatamente anterior.

Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_n$  variáveis aleatórias com distribuição exponencial negativa e parâmetros  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . A variável  $u = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ , que representa o tempo até que o primeiro de entre  $n$  acontecimentos ocorra, segue uma distribuição exponencial negativa com parâmetro  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Essa propriedade permite modelar sistemas com  $k$  servidores idênticos (mesma distribuição) com parâmetro  $\mu$ , operando em paralelo, como um único servidor com parâmetro  $k\mu$  (o próximo cliente é atendido quando o primeiro servidor ficar livre).

Se a chegada de clientes seguir uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda$ , e esses clientes puderem ser divididos em diferentes tipos de tal modo que a probabilidade  $p_i$  de o cliente ser de um dado tipo  $i$  seja fixa e  $\sum_i p_i = 1$ , então a chegada de cada um dos clientes segue ainda uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda_i = p_i \lambda$ .

Para a formulação de um modelo, é necessário especificar a forma assumida de cada uma das distribuições, de maneira suficientemente realista e simples, para que ele seja matematicamente tratável, mas a formulação do modelo da teoria das filas deve ser especificada.

A distribuição exponencial é uma das mais importantes das distribuições de probabilidade da teoria das filas, cuja variável aleatória  $T$  representa ou o tempo entre chegadas ou o de serviço, sendo a sua *f. d. p.* dada por

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Sua representação gráfica pode ser vista na figura 10 e sua probabilidade aculada é dada pela expressão 2.37.

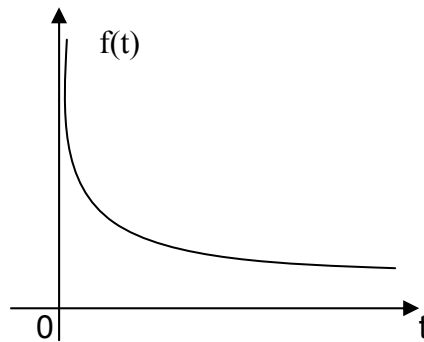


Figura 10- Representação gráfica da função exponencial

$$P \{ T \leq t \} = 1 - e^{-\alpha t}$$

$$P \{ T > t \} = e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0). \quad (2.37)$$



A média e a variância de  $T$  são dadas por

$$E(T) = 1/\alpha \quad e \quad var(T) = 1/\alpha^2 \quad (2.38)$$

A propriedade da distribuição exponencial que se relaciona com a distribuição de Poisson revela que o tempo entre ocorrências consecutivas de algum tipo de incidente particular (chegadas ou conclusões de serviços por um servidor continuamente ocupado) tem uma distribuição exponencial com parâmetro  $\alpha$ . Tal propriedade tem a ver com a implicação resultante quanto à distribuição de probabilidade do número de vezes que esse tipo de incidente ocorre dentro do espaço de tempo específico.

A média dessa distribuição de Poisson é  $E\{X(t)\} = \alpha t$ , de modo que o número esperado de incidentes por tempo unitário é  $\alpha$ . Então, esta a taxa média em que os incidentes ocorrem.

Essa propriedade fornece informações úteis sobre as conclusões dos serviços quando os tempos destes têm uma distribuição exponencial com parâmetro  $\mu$ .

A propriedade é útil para descrever o comportamento das chegadas quando os tempos entre elas têm distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$ . Nesse caso,  $x(t)$  seria o número de chegadas no espaço de tempo  $t$ , em que  $\alpha = \lambda$  é a média de chegadas. Tais modelos também são descritos quando se supõe uma chegada de Poisson.

### 2.5.3 Processo De Geração e Extinção

Num processo de vida e morte, associa-se a vida a uma chegada de cliente, e a morte a uma saída de um cliente depois de ser atendido, seguindo as hipóteses:

Nunca pode ocorrer mais de um nascimento ou mais de uma morte simultaneamente.

O sistema encontra-se no estado  $n$ , no tempo de espera  $t$ , num dado instante  $t$ .

Para processos de vida e morte, supõem-se estados estacionários ou de equilíbrio, não podendo haver estados transitórios, como a fila tender ao infinito, pois se a taxa de chegada exceder a capacidade de atendimento ou variar ao longo do tempo, ou mesmo possuir um número anormal de clientes para o início de funcionamento de um serviço, o processo não estará equilibrado.

#### 2.5.4 Modelo De Sistema De Filas

Os modelos de filas envolvem aproximações do sistema real, sendo seus resultados úteis para estimar a grandeza de medidas de desempenho do sistema, as análises de sensibilidade a respeito do impacto de mudanças operacionais e as tomadas de decisão sobre melhorias no sistema.

Têm-se modelos de filas baseados no processo de vida e morte, os quais são indicados como chegadas de Poisson e tempo de serviço exponencial. Alguns deles tratam da taxa de chegada e de serviços constantes, independentes do estado do sistema. Em alguns casos, o sistema tem fila finita, ou seja, quando o número de clientes não pode ultrapassar a sua capacidade de atendimento.

Outra situação é quando a fonte de chegada é limitada, caso em que o tamanho da população é finito.

Em outras situações, os modelos baseados no processo de vida e morte não são adequados como, por exemplo, se as chegadas devam ser programadas ou reguladas.

Esses modelos utilizam chegadas de Poisson e qualquer distribuição de tempo de serviço ou tempos de serviços constantes (distribuição de serviço degenerada). A distribuição degenerada supõe uma variação zero nos tempos de serviços, o que é bem diferente na exponencial ou, ainda, com tempos de serviços de Erlang. Esse tipo de distribuição intermedia a distribuição constante da exponencial.

Há modelos em que o processo de chegadas não é de Poisson. Isso acontece quando as chegadas são reguladas ou programadas, deixando de serem aleatórias.

Também existem modelos de filas com prioridades, em que clientes passam à frente de outros, seguindo um tipo de seleção de acordo com a sua classe de prioridade.

A maior parte dos trabalhos relacionados com o atendimento de emergência detém-se em um processo de chegadas de Poisson e tempos de serviços exponenciais.

Apesar das técnicas matemáticas empregadas na análise das filas, é necessário escolher entre adotar distribuição exponencial para serviços e intervalos de chegadas independentes e as técnicas analíticas ou simulação.

O modelo hipercubo de teoria das filas tem sido utilizado intensivamente nos últimos tempos, por vários pesquisadores como Chiyoshi, Galvão e Morabito (2000), Galvão, Chiyoshi, Espejo e Rivas (2003), Costa (2003), Oliveira (2003), Takeda, Widner e Morabito (2004), Iannoni (2005) e Albino (1994).

Esse modelo refere-se a uma ferramenta analítica e descritiva cuja função é calcular uma ampla variedade de medidas de desempenho, capaz de auxiliar na tomada de decisões operacionais e de configuração do sistema (Takeda, Widner e Morabito, 2004). O hipercubo é um modelo de otimização que determina uma configuração ótima para o sistema e oferece uma completa avaliação da configuração sugerida. Esse modelo baseia-se na partição da região em um conjunto de áreas geradoras de demanda.

Os resultados são limitados a condições de equilíbrio, principalmente a partir de suposições estabelecidas.

Para o presente estudo, deve-se especificar qual modelo de sistema de filas se adapta melhor à amostra dos dados em questão (chamadas de emergência ao Corpo de Bombeiros), em que o processo de chegada é aleatório, o tempo entre chegada é exponencial, e com o atendimento seguindo a ordem de chegada.

Resultados apresentados por Contri (2000), demonstram que com a utilização do modelo  $(M/M/c): (GD/\infty/\infty)$  obtêm-se boas soluções para os dados em estudo.

#### 2.5.5 Modelo $(M/M/c): (GD/\infty/\infty)$

Com relação a esse modelo, faz-se, então, uma abordagem do sistema de filas, conforme Taha (1971).

Esse modelo segue um processo de fila com chegada de Poisson (M) com ( $c \geq 1$ ) atendentes e tempos de atendimento exponenciais independentes (M), o qual não depende do estado do sistema ( $\infty$ ) com capacidade infinita de origem das chamadas ( $\infty$ ) e disciplina geral de serviço (GD).

O tempo de atendimento, relacionado com cada servidor (estação), é independente do estado, e o número de unidades atendendo usuários depende do número destes no sistema.

Condições válidas sempre que

$$\mu n = \begin{cases} \mu n & (n=0,1,2,\dots,c) \\ c & (n=c+1,c+2,\dots) \end{cases} \quad (2.39)$$

$\mu n \rightarrow$  taxa média de serviço para todo o sistema, quando  $n$  clientes estão no sistema;

Dado que:

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\rho}{c} \quad (2.40)$$

$$\rho \equiv \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{\rho}{c} < 1 \quad (2.41)$$

$\lambda \rightarrow$  taxa média de chegadas;

$\mu \rightarrow$  taxa média de serviço;

$\frac{1}{\lambda} \rightarrow$  tempo médio esperado entre chegadas consecutivas;

$\frac{1}{\mu} \rightarrow$  tempo médio de atendimento esperado;

$\rho \rightarrow$  fator de utilização da instalação de serviço;

$c \rightarrow$  número de servidores (estações).

Sendo as probabilidades de que exatamente  $n$  clientes estejam no sistema de filas no tempo ( $t$ ), estas são dadas por:

$$P_n(t) = \begin{cases} \left( \frac{\rho^n}{n!} \right) P_0, & 0 \leq n \leq c \\ \left( \frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right) P_0, & n > c \end{cases} \quad (2.42)$$

Com  $P_0$ , probabilidade de zero elementos na fila, dado pela equação acima, tem-se que

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c! \left( 1 - \frac{\rho}{c} \right)} \right\}^{-1} \quad (2.43)$$

Tempo de espera na fila para cada cliente,

$$W_q = \frac{lq}{\lambda} = \frac{\rho^c \mu \mu_0}{(c-1)! \mu^2 (c-\rho)^2} \quad \text{como} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\lambda} \quad (2.44)$$

$$\frac{\rho^c \rho}{(c-1)! \lambda (c-\rho)^2} P_0 = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)! (c-\rho)^2} \quad \frac{P_0}{\lambda} = \frac{Lq}{\lambda}$$

Tempo de espera no sistema para cada cliente

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}. \quad (2.45)$$

## 2.6 DISTRIBUIÇÕES ESTATÍSTICAS DE VALORES EXTREMOS E MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Para determinar os parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  que serão utilizados na solução do problema usar-se-á a estatística dos valores extremos e métodos de estimação de parâmetros, visto que será trabalhado com os valores extremos de cada dia da semana.

Para a análise de valores extremos, existem vários modelos de distribuição de probabilidades. Entre eles, os mais usados são: a distribuição de Gumbel, Log-normal com dois e três parâmetros, distribuição de Pearson tipo III, Log-Pearson III, Generalizada de eventos extremos tipo II de Fréchet, tipo III de Weibull e mais uma grande variedade de outras distribuições.

Para o cálculo dos parâmetros, há muitos métodos, sendo os mais usados: método da máxima verossimilhança, momento, momento-L e momento ponderado por probabilidade.

Muitos trabalhos e artigos foram desenvolvidos utilizando-se essas distribuições e métodos, mas, a maioria deles concentra-se na área de hidrologia como será abordado a seguir.

Back (2006) utilizou as distribuições Log-normal com dois e três parâmetros, a de Pearson tipo III, Log-Pearson III e a de Gumbel-Chow com a estimação dos parâmetros pelo método dos momentos, para analisar o pluviograma da Estação Meteorológica de Chapecó-SC. Ele fez uma análise de chuvas extremas utilizando esses métodos e constatou que, pela distribuição de Gumbel, seus resultados apresentaram melhores estimativas para os valores extremos da sua amostra.

Queiroz e Chaudhry (2006) apresentaram uma modelação de eventos meteorológicos extremos por meio da distribuição *GEV-generalized extreme value* (generalizada de valores extremos) e do método de momentos LH, para estimar os parâmetros. A distribuição foi aplicada nos valores de vazões de rios do Paraná, fornecendo um bom ajuste conforme os resultados do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov e de Wang, com um nível de 5% de significância.

Silva e Zocchi (2006) mostraram em um estudo de precipitação pluvial, em Piracicaba, que com a aplicação da distribuição generalizada de Pareto-Poisson e para a estimação dos parâmetros do método da máxima verossimilhança, obtiveram

bons níveis e períodos de retorno para as precipitações diárias para o tempo estudado.

Valverde, Leite, Silva e Prusk (2004) fizeram um estudo comparativo entre distribuições que servem para analisar dados de eventos extremos numa aplicação em hidrologia, para análise de precipitações de vazões extremas. Em seu artigo, recomendaram que os dados sejam testados pelo menos por três das distribuições: generalizada logística, GEV, generalizada normal, Pearson ou generalizada de Pareto. Sendo que, para a estimação dos parâmetros, poderão ser usados os momentos-L e derivados dos momentos como os ponderados por probabilidades.

Já Silva e Clarke (2004) constataram, em seu estudo sobre chuvas na Bacia do rio São Francisco, que a distribuição de Gumbel, para o ajuste dos dados, não foi muito adequada e que a GEV, com o método momento-L, foi a que apresentou melhor ajuste para as precipitações máximas anuais em 218 postos pluviométricos da referida bacia.

Beijo, Muniz e Neto (2005) também utilizaram a distribuição de Gumbel para determinar as estimativas de precipitação diária máxima na região de Lavras-M.G. e concluíram que os dados em questão se ajustaram bem a essa distribuição.

Para a estimação dos parâmetros, Serra (s/ano) fez uma dedução do método do momento-L que, até então, não tinha sido apresentada. Com a aplicação da distribuição de Pearson tipo III, em um estudo em hidrologia, além dessa dedução também apresentou os resultados obtidos para os estimadores da distribuição de Pearson tipo III.

Assim como Ferreira, Souza e Brasil (1999) também usaram e desenvolveram modelos de previsão para valores extremos. Eles utilizaram modelo linear dinâmico e a inferência Bayesiana em seu trabalho. A união desses dois modelos resultou num modelo dinâmico Bayesiano, generalizado para valores extremos.

Há muitos artigos desenvolvidos por hidrologistas que abordam as chamadas distribuições de extremos.

Tendo em vista os resultados obtidos por diversos pesquisadores com a aplicação dessas distribuições e métodos, nota-se que a utilização de uma ou de outra distribuição e de algum método específico depende do tipo de dados em estudo. Às vezes, uma distribuição ajusta-se melhor que outra, mas a grande

maioria opta pela distribuição de Gumbel tipo I por ser mais flexível e ajustar-se melhor aos dados.

Por isso, tratar-se-á, a seguir, mais detalhadamente, da distribuição de Gumbel.

### 2.6.1 Distribuição De Gumbel

A distribuição do tipo I, também conhecida como distribuição de Gumbel, é a mais utilizada e aprovada pelos pesquisadores em várias áreas, principalmente para a análise estatística de fenômenos meteorológicos, mas, para o presente estudo, essa distribuição terá uma aplicação para estimar os tempos e deslocamentos extremos.

A função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x; \beta, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ - \left( \frac{x - \beta}{\alpha} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right] \right\} \quad (2.46)$$

em que  $x$  é a variável aleatória individual da série de valores extremos,  $\beta$  é o parâmetro de posição e  $\alpha$  é o parâmetro de escala.

Seja a função de distribuição cumulativa para valores extremos definida como

$$F(x; \beta, \alpha) = \int_0^x f(x; \beta, \alpha) dx = \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right] \right\} . \quad (2.47)$$

Para o valor esperado tem-se a fórmula  $E(x) = \beta + \gamma\alpha$  (2.48)

e para a variância é dado  $SD(x) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \alpha$  (2.49)

sendo  $\gamma = 0,577216$  (constante de Euler).

Para o intervalo de recorrência (extremo provável), considera-se a variável aleatória  $x$  que representa o número de tempos máximos diários em uma dada região cuja distribuição pode ser dada como



$$P(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right]\right\} \quad (2.50)$$

com  $P(x)$ , a probabilidade de que o número máximo de tempos em cada dia seja menor ou igual a  $x$  em que  $P(x)$  é dado por

$$P(x) = 1 - \frac{1}{T}. \quad (2.51)$$

Substituindo (2.51) em (2.50), tem-se

$$1 - \frac{1}{T} = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right]\right\}. \quad (2.52)$$

Isolando-se  $x$  na equação (2.52), obtém-se

$$x_T = \beta - \alpha \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right) \quad (2.53)$$

que é a estimativa do tempo de deslocamento extremo  $x_T$  associada ao período de recorrência  $T$ .

Após ter-se mensurado o tempo de extremo provável, necessitam-se encontrar os estimadores  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\alpha}$ , que podem ser encontrados pelo método da máxima verossimilhança como em Silva e Zocchi (2006), Ferreira, Souza e Brasil (1999), Back (2006), pelo método dos momentos e seus derivados, utilizado por Valverde, Leite, Silva e Prusk (2004), Queiroz e Chaudhry (2006), Serra (s/ano), entre outros métodos de estimação de parâmetros.

Para a estimativa dos parâmetros, o método do momento e seus derivados e o da máxima verossimilhança são indicados por vários autores como Back (2006), Ferreira, Souza e Brasil (1999).

### 2.6.2 Método Dos Momentos Ponderados - *Probability-Weighted Moment Method*

Para o cálculo dos valores extremos, precisa-se calcular o valor de  $\beta$  e  $\alpha$ .

A partir da série de valores máximos, num determinado período ( $n$  tempo), são classificados em ordem crescente  $x_1^{\text{máx}}$ ,  $x_2^{\text{máx}}$ ,  $x_3^{\text{máx}}$ , ...,  $x_n^{\text{máx}}$ , calculando-se então o parâmetro  $\sigma$ .

$$\text{Para calcular } \lambda \text{ é dada a expressão } \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n-1} x_i^{\text{máx}}. \quad (2.54)$$

Os parâmetros  $\beta$  e  $\alpha$  são estimados pelas expressões

$$\alpha = \frac{1}{\ln 2} [2\sigma - x^{\overline{\text{máx}}}] \quad \text{e} \quad \beta = x^{\overline{\text{máx}}} - \gamma\alpha \quad (2.55)$$

sendo

$$x^{\overline{\text{máx}}} = \frac{x_1^{\text{máx}} + x_2^{\text{máx}} + \dots + x_n^{\text{máx}}}{n}, \quad (2.56)$$

o valor médio da série de valores extremos.

Segundo Back (2006), o método da verossimilhança é mais eficiente, mas, para pequenas amostras, pode gerar estimativas mais simples, por outro lado, quando a amostra é grande, o mais indicado é o método dos momentos. Para a adequação dos dados, normalmente é aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov.

### 2.6.3 Teste De Kolmogorov-Smirnov - K-S

O teste de Kolmogorov-Smirnov tem sido usado por muitos autores como Lucena, Andrés e Ness (2003), Back (2006), Queiroz e Chandhry (2006), Beijo, Muniz e Neto (2005), para verificar a normalidade, ou seja, a aderência de uma amostra.

O teste de K-S trata as observações individuais separadamente, não ocorrendo, assim, perda de informações como, às vezes, ocorre na prova  $\chi^2$  em razão do grupamento. No caso de uma variável contínua, se a amostra é pequena (pode-se ter de agrupar duas ou mais categorias para se aplicar  $\chi^2$ ), a prova  $\chi^2$  é menos poderosa que a de Kolmogorov-Smirnov.

O K-S, como é conhecido, é um teste de aderência que compara o grau de concordância entre a distribuição acumulada de um conjunto de valores de uma amostra (observados) com a distribuição teórica acumulada esperada. Ou seja, o

teste procura especificar distribuição de freqüência que ocorreria sob a distribuição teórica e comparando-a com a distribuição acumulada observada. A distribuição teórica representa o que se poderia esperar da hipótese nula  $H_0$ , determinando-se o ponto em que a distribuição teórica e observada mostra maior divergência, indicando se realmente pode ser possível ocorrer uma diferença significativa.

Seja  $F_0(x)$  uma distribuição de freqüência acumulada completamente especificada, isto é, a distribuição de freqüência acumulada, teórica, sob  $H_0$  (para qualquer valor de  $x$ , o valor de  $F_0(x)$  é a proporção de casos esperados com escores iguais ou menores do que,  $x$ ).

E seja  $S_n(x)$  a distribuição de freqüência acumulada de uma amostra aleatória de  $N$  observações. Quando  $x$  é qualquer escore possível,  $S_n(x) = k/n$ , em que  $k$  é o número de observações não superiores a  $x$ .

Assim, pela hipótese de nulidade de que a amostra tenha sido extraída da distribuição teórica especificada, espera-se que, para cada valor de  $x$ ,  $S_n(x)$ , seja suficientemente próximo de  $F_0(x)$ . Isto é, sob  $H_0$ , espera-se que as diferenças entre  $S_n(x)$  e  $F_0(x)$  sejam pequenas e estejam dentro dos limites dos erros aleatórios. A prova de  $K-S$  focaliza a maior dessas diferenças. O maior valor de  $F_0(x) - S_n(x)$  é chamado desvio máximo,  $D$  (Siegel, 1975).

Procedimento:

1°)Especificar a função acumulada teórica, isto é, a distribuição acumulada esperada sob  $H_0$ ;

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: F(x) = F_0(x) \text{ para todos os valores de } x; \\ H_1: F(x) \neq F_0(x) \text{ para algum valor de } x. \end{cases}$$

2°)Dispor os escores observados em uma distribuição cumulativa, fazendo corresponder cada intervalo  $S_n(x)$  com o intervalo comparável de  $F_0(x)$ ;

3°) Para cada posto da distribuição cumulativa, subtrair  $S_n(x)$  de  $F_0(x)$ ;

4°)Por meio da fórmula  $D = \max |S_n(x) - F_0(x)|$ , determinar  $D$ ;

5°)Tendo como referência a tabela do teste K-S, determinar a probabilidade associada à ocorrência, sob  $H_0$  de valores tão grandes quanto o observado de  $D$ .

Se o valor de  $p$  encontrado for menor ou igual ao tabelado, rejeita-se  $H_0$ , caso contrário, não se pode rejeitá-lo.

## 2.7 MÉTODO DE RESOLUÇÃO E OTIMIZAÇÃO SIMPLEX

Esse algoritmo baseia-se na álgebra linear. Ele parte de uma solução básica viável do sistema de equações que formam as restrições do problema. Iniciando por essa solução, ele vai achando outras viáveis, de mesmo valor do da inicial, ou melhor, a cada nova solução encontrada, melhora a resolução do problema, até que não seja mais possível otimizá-la.

Consiste em um método para resolver problemas de otimização com restrições; no caso, o tempo de deslocamento em que a função-objetivo é linear.

Para Nogueira, as variáveis de controle são dadas por

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (2.57)$$

Outro modo de representá-las (2.57) é dado por:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.58)$$

Precisa-se minimizar  $z$  obedecendo às  $m$  restrições impostas às  $n$  variáveis  $x_j$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ para } i=1, 2, \dots, m \quad (2.59)$$

$x_j \geq 0$  é a variável  $j$  a ser designada ou produzida;

em que:

$c_j$  é o coeficiente de lucro (ou de custo) para a variável  $x_j$ ;

$z$  é a função-objetivo a ser minimizada;

$a_{ij}$  é o coeficiente da variável  $x_j$  na restrição  $i$ ;

$b_i$  é o valor limite da restrição  $i$ ;

$j=1,2,\dots,n$  é o número de variáveis;  
 $i=1,2,\dots,m$  é o número de restrições impostas.

Utilizando-se notação matricial, o problema de otimização linear pode ser escrito como:

Minimizar

$$z = CX \quad (2.60)$$

sujeita às restrições

$$A \cdot X \leq B \quad (2.61)$$

$C = [c_j]$  é um vetor linha;

$X = [x_j]$  e  $B = [b_i]$  são vetores colunas;

$A = [a_{ij}]$  é uma matriz  $m \times n$ .

O Método Simplex é um algoritmo que sistematiza a solução de problemas de Programação Linear de maneira eficiente computacionalmente.

Para isso, devem-se introduzir quatro novas variáveis, utilizando os resultados de Bhattacharya, Rao e Tiwari (1992).

Para as variáveis  $p_i$ ,  $q_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  pode-se obter as condições:

$$p_i = \begin{cases} X_c - X_{vi}, & X_c \geq X_{vi} \\ 0, & X_c < X_{vi} \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} X_{vi} - X_c, & X_c < X_{vi} \\ 0, & X_c \geq X_{vi} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} Y_{vi} - Y_c, & Y_c < Y_{vi} \\ 0, & Y_c \geq Y_{vi} \end{cases}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} Y_c - Y_{vi}, & Y_c \geq Y_{vi} \\ 0, & Y_c < Y_{vi} \end{cases}$$



O algoritmo simplex é capaz de gerar novas soluções, melhores que as anteriores. Denomina-se solução os valores para as variáveis de decisão e solução viável, em que todas as restrições são satisfeitas. A solução ótima é a viável que tem o valor mais favorável da função-objetivo, podendo ser única ou não.

## **CAPÍTULO III**

### **3 METODOLOGIA PROPOSTA**

A proposta visa construir um método para otimização de localização de Estações de Emergência para cidades em que o número de habitantes, como regra, é grande. Por isso, o número de demandas (pontos de chamadas de emergência) também é elevado, pois se supõe que cada habitante seja um possível ponto de chamada. Nesse caso, é mais adequado considerar que a população tenha distribuição uniforme, visto que o método é aplicado para uma população com mais de um milhão de habitantes e a colocação dos pontos pode estar em qualquer lugar, por isso considera-se a demanda contínua.

A metodologia consiste, primeiramente, em determinar os parâmetros que serão utilizados para calcular o número de ambulâncias em cada Estação de Emergência. Obtendo-se assim os dados das chamadas de emergência, com o tempo de deslocamento e o número de ocorrências para cada Estação de Corpo de Bombeiros, procedendo-se a verificação se os dados têm distribuição de Poisson, por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov.

Em segundo lugar, por tratar-se de dados de emergência, neste trabalho serão utilizados somente os valores extremos para o cálculo dos parâmetros necessários para determinar o número de ambulâncias e a distribuição de Gumbel. Por meio dessa distribuição, devem-se calcular os valores extremos para o número de chamadas e o tempo extremo provável de deslocamento.



Em terceiro, calcular o número de ambulâncias, usando-se os parâmetros encontrados e a teoria das filas.

Em quarto, localizar, no plano cartesiano, cada ponto de Estação de Emergência do Corpo de Bombeiros e os vértices da região que aplicada a metodologia

Em quinto, encontrar os pesos proporcionais ao número de chamadas para cada região, com seus respectivos tempos de deslocamentos, para determinar as fronteiras de abrangência do Voronoi.

Em sexto, aplicando-se o algoritmo e o programa elaborado por Silva (2004), procede-se a divisão do diagrama de Voronoi ponderado

Em sétimo, feitas as divisões com seus respectivos pontos geradores (estações), verificam-se se suas posições estão localizadas de modo ótimo, satisfazendo a condição de tempo imposta de 5 minutos.

A otimização das localizações, em cada região, será realizada pelo método simplex com o modelo minmax.

Caso não se encontre a localização ótima, reposicionam-se os pontos, um à direita e/ou outro à esquerda (caso haja mais de uma unidade de ambulância naquele ponto) e aplica-se o modelo minmaxmin para a reotimização.

Se a nova otimização satisfizer a restrição de tempo de deslocamento, conclui-se a metodologia, caso contrário, redistribuir-se-ão os pontos de localização das estações em que a condição não foi satisfeita e aplica-se novamente o modelo para a nova otimização.

Se não houver mais de uma unidade de emergência naquela estação, deve-se acrescentar mais um ponto gerador e reaplicar o diagrama de Voronoi ponderado.

### **3.1 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DO SISTEMA DAS FILAS**

Tendo-se a Estação de Emergência do Corpo de Bombeiros e os dados estatísticos das chamadas telefônicas, faz-se necessário determinar o número de ambulâncias em cada estação. Para isso, precisa-se dos dados das chamadas telefônicas do serviço de emergência das ambulâncias.

São necessários os dados iniciais  $\lambda$  (taxa média de chegadas) e  $\mu$  (taxa média de serviço), números de servidores, número máximo de clientes que pode estar no bloco de espera e capacidade de origem das chamadas, segundo abordado na secção 2.5.

### 3.1.1 Cálculo Dos Valores Extremos.

Para Taha (1976), em virtude de recomendações em pesquisa operacional, quando se trata de sistemas emergenciais em que o tempo de atendimento é a principal restrição, é melhor escolher  $\lambda$  (taxa média de chegadas) e  $\mu$  (taxa média de serviço), para casos em que o sistema trabalhe com extremas condições. Por isso, devem-se considerar os dias em que o número de chamadas é maior que o valor médio. Para essa determinação, utilizar-se-á o tempo extremo das chamadas, ou seja, o período de maior concentração das chamadas, em cada mês, tanto para o número de chamadas como para o tempo de deslocamento.

Para determinar os valores extremos prováveis, deve-se proceder como exposto na secção 2.6.

Para cada dia da semana, toma-se somente o maior valor de deslocamento, a partir do momento da chamada até a ambulância chegar ao local da ocorrência e assim para os demais dias. Esse procedimento também é realizado para o número de ocorrências para cada dia da semana. Com esses valores extremos e por meio da distribuição de Gumbel, chega-se aos valores médios do deslocamento e das chamadas.

## 3.2 VERIFICAÇÃO DOS DADOS QUANTO À DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Primeiramente, demonstra-se que as chamadas possuem distribuição de Poisson, o procedimento dos cálculos do tempo médio da unidade é dado por:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n . x_n \quad (3.1)$$

A probabilidade de  $n$  chegadas em qualquer intervalo de tempo finito  $t$  é dada por:

$$P_n = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad (3.2)$$

em que,  $\lambda t$  é a média do número de chamadas.

Para a variável discreta, o número de ocorrências por unidade de tempo seguirá uma distribuição de Poisson quando se verificarem as quatro condições seguintes:

1) Os números de ocorrências registradas nos intervalos da partição são independentes entre si.

2) A distribuição do número de ocorrências, em cada intervalo, é a mesma para todos os intervalos.

3) A probabilidade de registrar-se uma ocorrência num intervalo qualquer de dimensão  $\Delta t$  é praticamente proporcional à dimensão do intervalo, ou seja,  $\Delta p_1 = \lambda \Delta t$ ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \lambda \quad (3.3)$$

em que,  $\Delta$  representa uma constante positiva. No limite, quando a dimensão do intervalo tende para zero, admite-se que:

4) A probabilidade de registrarem-se duas, três ou mais ocorrências num intervalo qualquer de dimensão  $\Delta t$  é desprezível quando comparada com a probabilidade  $\Delta p_1$ . No limite, quando a dimensão do intervalo tende para zero, admite-se que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p_n}{\Delta t} = 0 \quad (n \geq 2) \quad (3.4)$$

Normalmente as chamadas telefônicas de emergência satisfazem as condições de 1 até 4, Por meio da utilização do teste Kolmogorov-Smirnov, verifica-se a distribuição de Poisson.

### 3.3 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE UNIDADES DE EMERGÊNCIA

Para a determinação do número de ambulâncias, utiliza-se a teoria das filas, já apresentada anteriormente.

Para a análise do sistema de filas, tem-se o programa geral apresentado em Taha (1976), que está na linguagem Fortran e foi reescrito por Galiev para Pascal. Usam-se os dados citados anteriormente como, o código do modelo, dados iniciais ( $\mu$  e  $\lambda$ ), valores ou probabilidades  $P_i$  e valores cumulativos ou  $P_i$ . Esse programa resolve o problema da determinação do número de servidores (ambulâncias) para cada estação.

Como exposto na seção 3.2, as chamadas telefônicas para atendimento de socorro têm distribuição de Poisson e, para determinar o número de ambulâncias, pode-se usar, em particular o sistema  $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$  apresentado na seção 2.5.5.

Em seguida, elabora-se a análise estatística das chamadas de emergência na cidade escolhida, determinando-se a lei de distribuição dos intervalos de tempo entre chamadas próximas e a lei de distribuição de tempo de atendimento:

$$\mu = \frac{24}{\bar{t}} \quad (\text{chamadas/dia}). \quad (3.5)$$

em que  $\bar{t}$  – tempo médio de atendimento em horas (24 horas por dia).

### 3.3.1- Cálculo Do Número De Ambulâncias Em Cada Estação.

A principal restrição para a determinação do número de ambulâncias é a do tempo de chegada até o paciente. Segundo recomendações internacionais, esse tempo não deve ser maior que 5 minutos. Se a chamada está na fila, é evidente que o tempo nela deve ser menor que 5 minutos. Esse tempo, então, é igual  $t_0$  minutos, em que  $t_0 < 5$  minutos.

Dispondo-se dos dados, o algoritmo para determinar  $c$  (número de unidades) quando há a restrição  $t \leq t_0$ , será:

Passo 1: é dada a taxa média do número de chamadas ( $\lambda$ ), a taxa média de serviço ( $\mu$ ), tempo inicial de espera ( $t_0$ ) e o número de servidores ( $c$ ) igual a um.

Passo 2: calculam-se as probabilidades ( $P_0$ )

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1 - \frac{\rho}{c})} \right\}^{-1}. \quad (3.6)$$

Passo 3: calcula-se o tempo de espera na fila ( $Ws$ ) =  $t_{esp}$ , dado por

$$(Ws) = t_{esp} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad \text{se } c = 1 \quad (3.7)$$

$$(Ws) = t_{esp} = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \frac{p_0}{\lambda} \quad \text{se } c > 1 \quad (3.8)$$

Se esse tempo for menor ou igual ao tempo ( $t_0$ ) dado, então o número de servidores é igual a  $c$  e termina-se o cálculo. Caso contrário, soma-se um ao número de servidores ( $c$ ) e volta-se para o segundo passo.

Para a realização do passo 2, utilizar-se-á o programa 01, constante no apêndice 01. Para o algoritmo  $A_1$ , elaborou-se o programa 02 (que contém, como parte, o programa 01), descrito no apêndice 03. Esse programa determina o número de ambulâncias e depende de três parâmetros que são  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $t_0$ .

Utilizando-se o programa 02, obtêm-se o ( $N$ ) números de ambulâncias.

Tem-se, assim, que o número de ambulâncias depende dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $t_0$ , sendo que é necessário escolher  $t_0$ . Se  $t_0 \approx 5$ , então a condição de tempo de chegada até o paciente menor que 5 minutos, não é satisfeita. É evidente que  $t_0$  pode ser escolhido em nível de administração, levando-se em conta os recursos financeiros (para comprar ambulâncias, se necessário). Se  $t_0$  é escolhido, então o tempo de chegada até o paciente é igual a  $t_0 + t$ , em que  $t$  é o tempo para a ambulância ir da estação  $c$  até o paciente  $s$ , e esse tempo  $t$  depende da distância  $d(c, s)$ .

### 3.4 PARA LOCALIZAR OS HOSPITAIS E CORPO DE BOMBEIROS

Para a localização das Estações do Corpo de Bombeiros e dos hospitais, devem-se achar as coordenadas das estações de emergência ( $c_x, c_y$ ) e os vértices ( $x_k, y_k$ ) da região do mapa da cidade em estudo, assim como a distância entre as estações e vértices. Esse procedimento é para determinar a distância máxima com o tempo de deslocamento para atendimento e aplicação do método de localização e otimização.

### 3.5 DETERMINAÇÃO DAS FRONTEIRAS DAS REGIÕES DE VORONOI PONDERADO

Por meio da definição dos diagramas de Voronoi, estudada na seção 2.4, determinam-se as fronteiras dessas regiões para diferentes casos.

Além dos aspectos geográficos, a questão de acesso a estações de emergência tem sido analisada em termos dos fatores que limitam o deslocamento da ambulância até o paciente. A definição da área de abrangência de cada estação de emergência será feita pelo diagrama de Voronoi, em que os centróides de cada

região serão as localizações das estações já existentes, respeitando-se o tempo de espera na fila e de deslocamento. Após a otimização pelo modelo minmax, se houver necessidade, se pode acrescentar novos pontos geradores (centros) de estações ou apenas redistribuir novas localizações de ambulâncias na mesma área de atuação da estação que a originou. Na seção 3.6, será abordado mais detalhadamente esse procedimento.

Para determinar as fronteiras das regiões de Voronoi, devem-se:

Localizar no mapa os pontos de estações do Corpo de Bombeiros e possíveis pontos de chamadas. Determina-se a área de cobertura de cada estação de emergência e coordenadas dos vértices da região, das unidades de emergência.

Calcular os pontos limites das fronteiras, em que a distância do ponto de serviço  $c_i$  até o de chamada seja de igual distância a outro ponto de serviço  $c_j$ .

Primeiro, são dadas as coordenadas de  $v_i$ , escolhem-se as coordenadas de  $c_i$ .

Segundo, por meio de uma malha, calculam-se os pontos  $s(x,y)$ , com  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ .

$$\text{Quando: } \begin{matrix} y = c & \text{e} & y \leq d \\ x = a & \text{e} & x \leq b, \end{matrix} \text{ tem-se } s_1. \quad (3.9)$$

$$\text{Quando: } \begin{matrix} x = x + \Delta x, & x \leq b \\ y = y + \Delta y, & y \leq d, \end{matrix} \text{ tem-se } s_2 \quad (3.10)$$

Se  $x \leq b$  e  $y \leq d$ , continuam-se os cálculos de  $s$ ;

Se  $x > b$  e  $y > d$ , significa que  $s$  não está dentro da região de estudos, então, toma-se outro valor para  $s$ .

Após, calculam-se as distâncias  $D_i$  de modo que  $d(s, c_i) + d(s, v_i) \leq t_0$ , sendo  $d_0 = t_0$ .

Se  $|D_1 - D_2| \leq \varepsilon$ , então  $s$  é solução de ponto de fronteira.

Se  $|D_1 - D_2| > \varepsilon$ , então  $s$  não é solução de ponto de fronteira e volta-se para o segundo passo.

A construção das regiões de Voronoi pode ser feita por métodos analíticos utilizando a definição 2.4.

Pela região de Voronoi com pesos estudada na seção 2.4.3, considerá-se o número de chamadas e o tempo extremo de deslocamento das unidades.

A partir desses dados, o percentual das chamadas de cada região será calculado sobre o total de chamadas da área em estudo. O resultado desse procedimento multiplicado pelo respectivo tempo de deslocamento, que será representado por  $t_d$ , e esse valor recebendo a denominação de “peso” ( $W$ ), ou seja:

$$W = \text{peso} = \frac{\text{número de chamadas estimadas para a estação}}{\text{total de chamadas estimadas para a área}} * 100 * t_d, \quad (3.11)$$

Calculam-se, então, as coordenadas e raios, ou seja, as distâncias máximas de abrangência de cada ponto gerador dos novos diagramas de Voronoi, tomando-se em conta as vizinhanças determinadas pelos diagramas originalmente gerados.

A partir desses valores, serão construídas as circunferências ponderadas. Quando o ponto gerador está contido na dominância estudada, ou seja, a circunferência construída contém o ponto em sua área, realiza-se a intersecção de polígonos. Em caso contrário, quando o ponto está fora da circunferência, sua dominância é considerada toda a área restante. Assim, serão construídas as áreas de abrangência, obtendo-se, ao final, um mapa com os pontos das estações e suas áreas respectivas, como mostra a figura 11

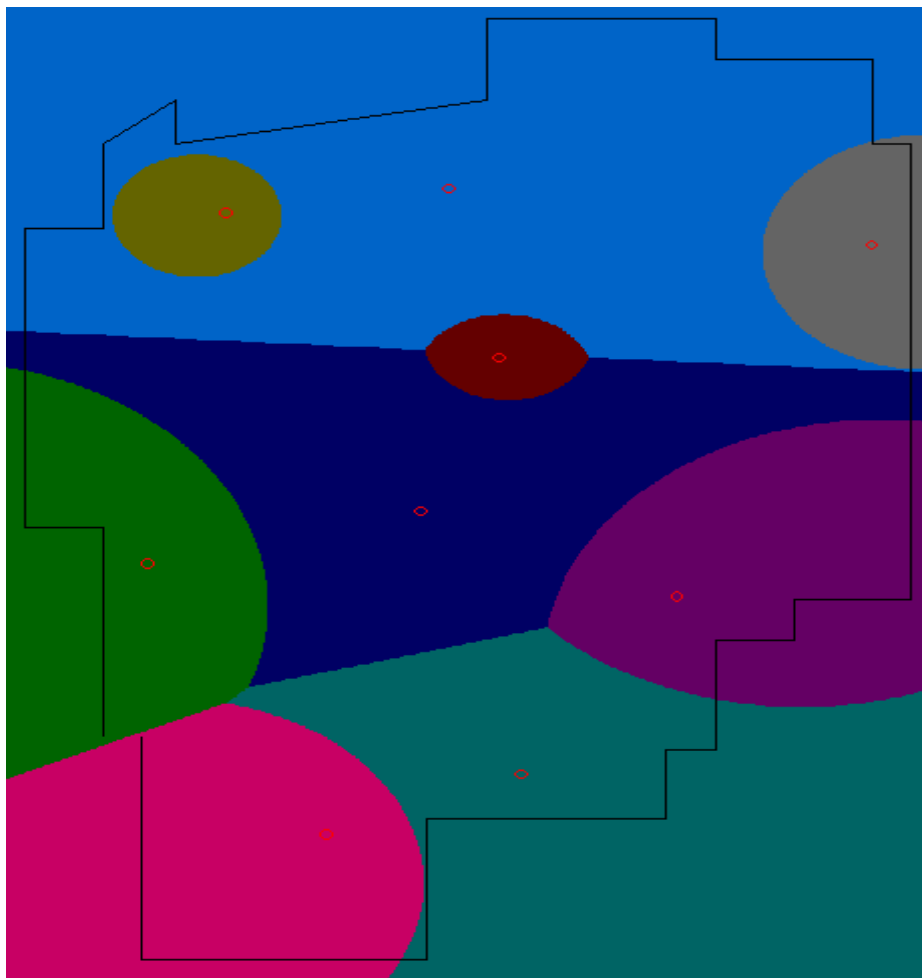


Figura 11- Representação das fronteiras de Voronoi por pesos

### 3.6 DETERMINAÇÃO DA LOCALIZAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DOS POSTOS DE ESTAÇÕES

Segundo Galiev (1993, 1994), por meio dos modelos matemáticos minmaxmin e minmax, do problema de recobrimento de  $G$  pelas  $n$  regiões, com a distância euclidiana ou retangular, as regiões podem assumir o maior tamanho possível. Utilizando-se essa propriedade de Galiev e Satarov (1996), será obtido o algoritmo para a otimização das colocações de Estações de Emergência, o qual equivale à otimização de cobertura  $G$  pela elipse com tamanho máximo possível.

Galiev (1995) propôs um algoritmo de otimização dos recobrimentos e suas modificações que serão expostas a seguir:

Algoritmo  $A_2$



Passo 1: Escolhe-se o deslocamento inicial dos centros das regiões  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , isto é, o vetor  $\varepsilon$ ;

Passo 2: Constroem-se as regiões  $k$ -múltiplas de Voronoi ( $D_j$ ) para o conjunto dos pontos  $\{s_j, 1 \leq j \leq N\}$  e o tipo de distância;

Passo 3: Para cada região  $D_j$  localiza-se o centro  $c_i^*$  da região mínima  $K_j^*$  cobrindo a região total  $D_j$ . Esses pontos  $c_i^*$  criam o novo vetor  $\xi$ ;

Passo 4: Se a distância euclidiana entre  $\xi$  e  $\xi^*$  for menor que a dada, conclui-se a busca e  $\xi^*$  é a solução, caso contrário, toma-se  $\xi = \xi^*$  e volta-se para o passo 2.

Seja  $S_i$  um subconjunto de conjunto  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ , em que  $S$  é um conjunto de todos os possíveis pontos da região de estudo, de forma tal que as unidades de ambulâncias  $c_i$  consigam chegar a um ponto  $s_j$  de  $S_i$ , em particular para o modelo minmax,  $S_i = \{s_j\}$ , mas para o problema minmaxmin tem-se que  $S_i = S$ .

Escolhem-se somente as regiões  $D_{ij}(\xi)$  para as quais os valores das  $\max d(s, c_i)$  sejam os máximos possíveis. Para cada uma dessas regiões, escolhe-se o ponto  $c_i^*$  de modo que o máximo das regiões  $D_{ij}$  com os centros  $c_i^*$  (ponto da estação otimizada) e  $S_j \in S_i$ , seja o mínimo possível que contém  $D_{ij}(\xi)$ . Os pontos obtidos  $c_i^*$ , juntamente com os demais, determinam o vetor  $\eta$ .

Para essa otimização, procuram-se usar modelos de programação linear, seguindo as características dos modelos minmax e minmaxmin conforme exposto na seção 2.7.

Segundo Winston e Venkataramanan (2004), por meio de programação linear, reduz-se um problema real a um conjunto de equações ou inequações, cuja finalidade é otimizar a função-objetivo. Para essa otimização, o algoritmo simplex é muito eficiente, pois a cada iteração ele acha a melhor solução.

Os algoritmos não garantem o encontro do extremo global, devendo-se calcular para os diferentes pontos iniciais. Além disso, a otimização de cobertura  $G$  pela elipse, com tamanho mínimo, pode ser feita utilizando-se métodos numéricos para os modelos matemáticos minmaxmin e minmax.

### 3.6.1 Otimização Da Localização Dos Postos De Serviços Considerando o Modelo Minmax

Levando-se em conta o problema de colocação ótima das Estações de Emergência quando as suas localizações são conhecidas, considera-se o modelo:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq i \leq n} [d(c_i, s_i)] \quad (3.12)$$

em que  $c_i$  são os pontos de colocação das estações,  $s_i$  são os pontos das chamadas.

Primeiro, considerar o caso com uma estação  $c(x, y)$  ou  $ns = 1$ . Nesse caso, não é necessária a operação min para  $i$ , resultando:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} [d(c_i, s_i)] \quad (3.13)$$

É evidente que a função  $[d(c_i, s_i)]$  atinge o valor máximo somente nos pontos das fronteiras da região  $G$ . Seja a região  $G$  de forma tal que  $G$  é um polígono com  $nv$  vértices  $v_i, 1 \leq i \leq nv$ . Então, em vez de máximo para  $s_i \in G$ , pode-se escrever o máximo somente por  $v_i, 1 \leq i \leq p$ . Obtendo-se:

$$\min_{\xi} \max_{1 \leq i \leq nv} [d(v_i, c_i)] \quad (3.14)$$

O problema minmax pode ser escrito como:

$$\begin{cases} t \rightarrow \min \\ d(v_i, c_i), & 1 \leq i \leq nv, \end{cases}$$

em que  $t$  é uma nova variável e a distância do vértice até o ponto de localização de estação é dada por:

$$d(v_i, c_i) = |x_{vi} - x_{ci}| + |y_{vi} - y_{ci}|.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} t \rightarrow \min \\ |x_{vi} - x_{ci}| + |y_{vi} - y_{ci}| + d_i^* \leq t, & 1 \leq i \leq nv. \end{cases} \quad (3.15)$$

Utilizando o modelo (3.15), chega-se aos valores absolutos, no entanto, tem-se um problema de programação linear com restrições não diferenciáveis, por isso, deve-se transformá-lo de tal maneira que as restrições tornem-se diferenciáveis.

Nesse ponto, pode-se utilizar o programa solver, no Excel, para resolver o problema (2.62) com variáveis  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n_i$ .

### 3.6.2 Otimização Da Localização Dos Postos De Serviços Considerando o Modelo Minmaxmin

Para considerar-se esse modelo, ou seja, para reduzir o tempo de atendimento, em que a solução otimizada ainda não satisfaz a restrição do tempo  $t_0 \leq 5$ , é preciso escolher novas estações à direita ou à esquerda. Considerando-se o caso de novas estações para resolver esse problema de colocações ótimas de estações novas utiliza-se o algoritmo  $A_3$ .

Algoritmo  $A_3$ .

Passo 1-Escolhe-se o vetor  $\xi$  (colocações dos pontos  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ )

Passo 2- Para os pontos  $c_i$  e  $s_j \in S_i$  constroem-se as regiões de Voronoi  $D_{ij}(\xi)$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Passo 3- Para cada  $s_j$  acha-se o ponto  $c_i^*$  de tal forma que o máximo das regiões  $D_{ij}$  com os focos  $c_i^*$  e  $s_j \in S_i$  sejam o mínimo possível que contenha  $D_{ij}(\xi)$ . Os pontos obtidos  $c_i^*$ ,  $1 \leq i \leq n_i$  determinam o vetor  $\eta$ .

Paso 4- Se a diferença de  $\eta$  e  $\xi$  é menor que o valor dado de  $\varepsilon$  (na métrica dada), então  $\eta$  é a solução aproximada, caso contrário,  $\eta = \xi$ , volta-se para o passo 2.

Para a realização do passo 2, determinam-se os pontos limites das fronteiras em que a distância percorrida do servidor  $c_i$ , até a chamada  $s$ , é equidistante de outro servidor  $c_j$ . Por meio de métodos numéricos, constrói-se uma rede de nós e, para cada um deles, os valores são dados por:

Seja  $d_i = d(s_i, c_i)$ , com  $i=1, 2, \dots, n$ .

Ordenam-se os valores de  $d$ , sendo  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ .

i) Se  $s$  é vértice da região  $G$ , então  $s$  é vértice das regiões de Voronoi  $D_{ij}$  de tal forma que  $d=d_1$ ;

ii) Se  $s$  é um ponto de fronteira da região  $G$ , então  $s$  é algum vértice  $D_{ij}$ , se e somente se  $|d_2 - d_1| < \varepsilon$ . Sendo  $\varepsilon$  uma precisão de determinação dos vértices;

Se a condição (2) é satisfeita, então  $s$  é vértice  $D_{ij}$  de tal modo que  $|d(s, c) - d_1| < \varepsilon$ .

iii) Se  $s$  é um ponto interior de  $G$ , então  $s$  é algum vértice  $D_{ij}$  se  $|d_3 - d_1| < \varepsilon$ ;

Se a condição (3) é satisfeita, então  $s$  é vértice para  $D_{ij}$ .

iv) Se  $s$  é um ponto interior de  $G$ , então  $s$  é um ponto de fronteira de alguma região de Voronoi se e somente se  $|d_2 - d_1| < \varepsilon$ .

Se as condições indicadas forem satisfeitas, então tem-se os pontos de fronteiras e os vértices de Voronoi.

Para a realização do passo 3 do algoritmo das regiões  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , é necessário determinar os novos pontos  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de tal maneira que as distâncias do ponto  $s$  (paciente) até  $c_2$  ou  $c_3$  seja a mínima possível. Esse é o problema de recobrimento da região de Voronoi por outras com tamanho mínimo.

Para resolver esse problema, utiliza-se o procedimento para uma estação já usado anteriormente.

### 3.7 CASO GERAL

Na seção 3.3.1, determina-se o número de ambulâncias para o caso de se ter Estações de Emergência e serem localizadas no Corpo de Bombeiros.

Se a escolha da estação for em outro lugar, por exemplo, pela otimização, então para determinar o número de ambulâncias é necessário determinar de novo os valores de  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $t_0$ . É evidente que  $\lambda$  e  $t_0$  não dependem da colocação de uma estação, mas o valor de  $\mu$  está sujeito ao tempo médio de atendimento, por isso depende da distância de estações até a ocorrência.

Como o número de estações é maior que um, então, para determinar-se a quantidade de ambulâncias, é necessário delimitar, de novo, os valores de  $\lambda$ ,  $\mu$ , procedendo-se da forma a seguir descrita.

Por exemplo, se há duas estações  $c_1$  e  $c_2$ , têm-se duas regiões  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente. Os dados estatísticos das chamadas possuem os endereços dessas chamadas e, por isso, podem-se dividi-las em regiões  $D_1$  e  $D_2$ . Considerando-se separadamente as chamadas  $D_1$ , determinam-se os parâmetros  $\lambda$ ,  $\mu$  de  $D_1$  e analogamente para  $D_2$ . Utilizando-se o programa 02, pode-se determinar o número de unidades para a estação  $c_1$  e, em separado, para a estação  $c_2$ .

Para mais estações, o procedimento de determinação do número de unidades é o mesmo como para o caso de  $c=2$  ( $c$  = número de estações e  $N$ = número de ambulâncias).

Se a colocação de estação  $c_1$  não é otimizada (onde já existe), então usa-se  $c_1^{fix}$ . Quando  $c=2$  e  $c_1$  é fixado, pode-se escolher a colocação de estação nova à esquerda ou à direita de  $c_1$ .

O número de unidades depende, principalmente, do tempo possível de espera da chamada na fila. Há recomendações internacionais para esse tempo de chegada até a vítima, dependendo, antes de tudo, das distâncias máximas entre vítima e estação (este é equivalente ao tempo de chegada até a ocorrência).

Gargano (2000) constatou, em sua pesquisa realizada para a cidade de Santa Maria, RS, que a cada 5 km, o tempo de deslocamento está entre 4 e 6 minutos, para uma velocidade média de 60km/h e uma população de 260.000 habitantes. No presente trabalho, como a população é de mais de um milhão de habitantes (aproximando-se dos dois milhões de habitantes) e a velocidade média dos carros oscila em torno de 20 km/h a 60 km/h, dependendo das vias e horários de picos.

Apesar de alguns critérios, como limitações econômicas, esses resultados são base para decisão de quantas estações são necessárias e de que maneira escolher as suas colocações.

## **CAPÍTULO IV**

### **4 ESTUDO DE CASO**

Para a aplicação do método proposto, será considerada a cidade de Curitiba.

Curitiba possui, atualmente, nove Estações de Corpo de Bombeiros e dez Unidades de Emergência (*SIATE*-Serviço Integrado de Atendimento ao Trauma e Emergência) para uma população de aproximadamente 2.000.000 habitantes e conta com um efetivo de 400 homens para o seu atendimento.

Na cidade de Curitiba, cada Posto do Corpo de Bombeiros, é responsável pelo atendimento de centenas de bairros e região metropolitana.

Todas as chamadas referentes a incêndio, salvamentos, acidentes de trânsito, quedas, ferimentos, entre outros, chegam à central de operações no Corpo de Bombeiros-*COBOM*, pelo telefone de número 193, onde é feita a triagem do tipo de ocorrência, determinada a sua localização, o tipo de emergência, se há necessidade de atendimento pré-hospitalar, sendo logo encaminhada à unidade mais próxima de onde aconteceu o fato.

Segundo informações obtidas no Corpo de Bombeiros, o atendimento da chamada se dá por dez unidades de emergência. Mas nem sempre essa unidade estará disponível, devendo outra, de diferente Estação do Corpo de Bombeiros, ou até mesmo uma unidade requerida do SAMU, atender à chamada na fila, sendo a disponibilidade o critério para atendimento da chamada.

Mesmo com nove Estações do Corpo de Bombeiros e dez unidades de ambulâncias, Curitiba, hoje, muitas vezes não consegue atender as chamadas da

população com a restrição de tempo de cinco minutos de espera na fila. Procurar-se-á apontar possíveis soluções para amenizá-lo.

A situação atual da localização das Estações de Emergência está representada na figura 12.

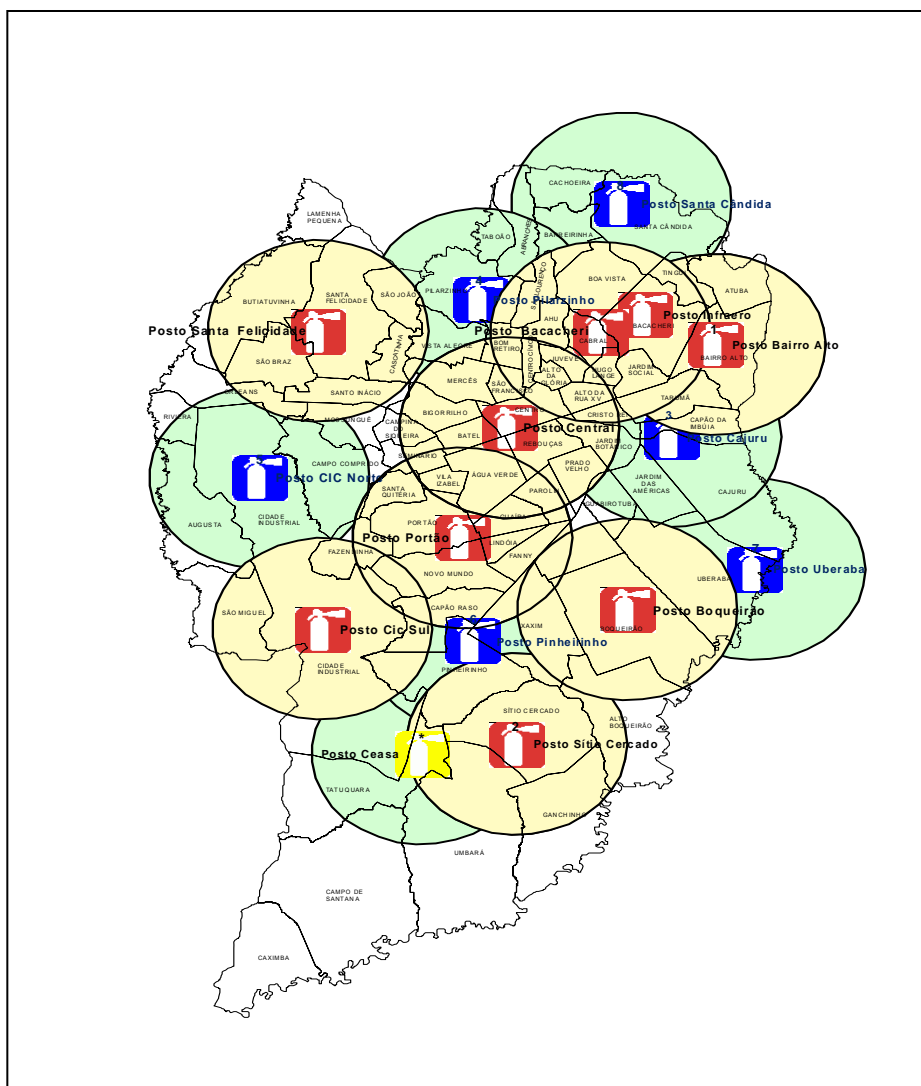


Figura 12 -Localização das Estações de Emergência existentes e possíveis locais de instalações

As regiões circulares que estão em amarelo, são as estações que estão em atividade, com exceção da região do posto do Bacacheri. As que estão em verde, são possíveis locais de instalação de novas estações, com exceção do posto Pilarzinho, que já está funcionando.

#### 4.1 LOCALIZAÇÃO DOS HOSPITAIS E DO CORPO DE BOMBEIROS

Para a cidade de Curitiba, pode-se utilizar a distância retangular com os eixos  $x$  e  $y$ , mostrados na figura 13. Considere-se para tanto, o mapa de Curitiba, representado no plano cartesiano, quando a distância entre dois pontos da cidade podem ser calculados pela métrica retangular.

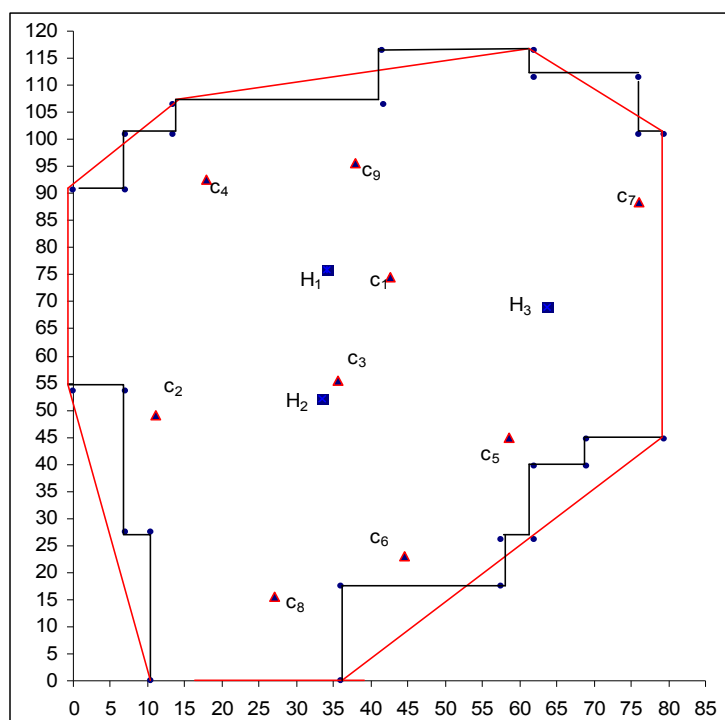


Figura 13- Representação de Curitiba: localização dos hospitais e Estações do Corpo de Bombeiros

Por meio de uma escala, determinam-se as coordenadas dos hospitais e as estações do Corpo de Bombeiros. Para esse procedimento, adota-se a escala de  $4,25\text{cm} = 1\text{km}$ , o que representa uma escala de 1:23.500.

Os triângulos em vermelho representam as Estações de Emergência do Corpo de Bombeiros e os quadrados em azul, as localizações dos hospitais.

Traçou-se uma linha em vermelho, demarcando os vértices aproximados da região, que será estudada para facilitar os cálculos.

Das onze unidades, uma está localizada no aeroporto e atende somente às ocorrências dentro dessa área. As demais unidades estão dispostas em nove estações, cujas localizações são:

Central: Duas unidades. As unidades AA 5870 e AA 5874.



Rua Nunes Machado, 100. Centro, de coordenadas  $C_1(42;75)$ .

CIC: Uma unidade. A unidade AA 5877.

Rua Arthur Martins Franco, 180. Bairro Portão, de coordenadas  $C_2(11;49)$ .

Portão: Uma unidade. A unidade AA 5878.

Av. Wenceslau Brás, 69. Bairro Portão, de coordenadas  $C_3(35;55)$ .

Santa Felicidade: Uma unidade. A unidade AA 5871.

Av. Vereador Toaldo Túlio, 708. Bairro Santa Felicidade, de coordenadas  $C_4(18;92)$ .

Boqueirão: Uma unidade. A unidade AA 6180.

Praça do Carmo, sala 47. Bairro Boqueirão, de coordenadas  $C_5(58;45)$ .

Bairro Novo: Uma unidade. A unidade AA 4388.

Rua Lupionópolis, 1250. Próximo à Vila Tecnológica. Sítio Cercado, de coordenadas  $C_6(44;23)$ .

Bairro Alto: Uma unidade. AA 4348

Avenida da Integração, 1120, Bairro Alto, de coordenadas  $C_7(76;88)$

Posto Ceasa: Uma unidade. A unidade AA 6182.

Ceasa, BR 116, km 110, 288. Bairro Tatuquara, de coordenadas  $C_8(27;15)$ .

Pilarzinho: Uma unidade. A unidade AA 6184.

Rua Profº Amauri Lange Silvério esq. Com Jornalista Alípio Miranda, de coordenadas  $C_9(38;95)$ .

Infraero: Uma unidade.

Av. Erasto Gaertner, no aeroporto do Bacacheri. Essa unidade não será considerada por atender somente chamadas do aeroporto.

As ocorrências podem ser encaminhadas para apenas três hospitais, que são:

Hospital 1: Hospital Universitário Evangélico de Curitiba, localizado na rua Augusto Stelfeld, nº 1908. Bairro Stelfeld.  $H_1(34;76)$

Hospital 2: Hospital do Trabalhador, localizado na avenida Argentina, nº 4406.  $H_2(33,5;52)$

Hospital 3: Hospital Cajuru, localizado na avenida São José, nº 300.  $H_3(64;69)$

As distâncias para esses pontos, podem ser calculadas pela distância retangular ou euclidiana. Os quadros, apresentam valores pela distância retangular com eixos  $0x$  e  $0y$  e pela escala adotada, introduzida anteriormente e analogamente para outras distâncias.

Procurou-se representar o mapa da cidade, o mais próximo de seus contornos reais, de forma retangular por um polígono de vinte e seis vértices, que estão representados na figura 13 e cujas coordenadas são apresentadas no quadro 01.

Quadro 01- Coordenadas dos vértices da região retangular mapeada

$V_1(10,5;0)$	$V_6(62;26)$	$V_{11}(79,5;101)$	$V_{16}(41,5;116,5)$	$V_{21}(7;90,5)$
$V_2(36;0)$	$V_7(62;39,5)$	$V_{12}(76;101)$	$V_{17}(41,5;106,5)$	$V_{22}(0;90,5)$
$V_3(36;17,5)$	$V_8(69;39,5)$	$V_{13}(76;111,5)$	$V_{18}(13,5;106,5)$	$V_{23}(0;53,5)$
$V_4(57,5;17,5)$	$V_9(69;44,5)$	$V_{14}(62;111,5)$	$V_{19}(13,5;101)$	$V_{24}(7;53,5)$
$V_5(57,5;26)$	$V_{10}(79,5;44,5)$	$V_{15}(62;116,5)$	$V_{20}(7;101)$	$V_{25}(7;27,5),$ $V_{26}(10,5;27,5)$

No quadro 02, estão dispostos os vértices mais próximos de suas Estações de Corpo de Bombeiros.

Quadro 02- Proximidade dos vértices com a Estação do Corpo de Bombeiros mais próxima

$V_1$ e $c_8$	$V_2$ e $c_8$	$V_3$ e $c_6$	$V_4$ e $c_6$	$V_5$ e $c_6$
$V_6$ e $c_6$	$V_7$ e $c_5$	$V_8$ e $c_5$	$V_9$ e $c_5$	$V_{10}$ e $c_5$
$V_{11}$ e $c_7$	$V_{12}$ e $c_7$	$V_{13}$ e $c_7$	$V_{14}$ e $c_7$	$V_{15}$ e $c_7$
$V_{16}$ e $c_9$	$V_{17}$ e $c_9$	$V_{18}$ e $c_4$	$V_{19}$ e $c_4$	$V_{20}$ e $c_4$
$V_{21}$ e $c_4$	$V_{22}$ e $c_4$	$V_{23}$ e $c_2$	$V_{24}$ e $c_2$	$V_{25}$ e $c_2$
$V_{26}$ e $c_2$				

Observa-se que as estações  $c_4$  e  $c_7$  são as que mais estão próximas de alguns vértices.

No quadro 03, estabelece-se a distancia dos vértices da região mapeada, com a estação mais próxima a eles.

Quadro 03- Distância, em cm, dos vértices até a estação mais próxima

$V_1$ e $c_8$ =32	$V_2$ e $c_8$ =16	$V_3$ e $c_6$ =22,5	$V_4$ e $c_6$ =19,5	$V_5$ e $c_6$ =16,5
$V_6$ e $c_6$ =20	$V_7$ e $c_5$ =9,5	$V_8$ e $c_5$ =16,5	$V_9$ e $c_5$ =11	$V_{10}$ e $c_5$ =21
$V_{11}$ e $c_7$ =14,5	$V_{12}$ e $c_7$ =12	$V_{13}$ e $c_7$ =21,5	$V_{14}$ e $c_7$ =33,5	$V_{15}$ e $c_7$ = 38,5
$V_{16}$ e $c_9$ =24,5	$V_{17}$ e $c_9$ =14	$V_{18}$ e $c_4$ =19	$V_{19}$ e $c_4$ =14	$V_{20}$ e $c_4$ =20,5
$V_{21}$ e $c_4$ =12	$V_{22}$ e $c_4$ =19	$V_{23}$ e $c_3$ =33	$V_{24}$ e $c_2$ =26	$V_{25}$ e $c_2$ =9
$V_{26}$ e $c_2$ = 5,5				

Pelos resultados apresentados no quadro 03, percebe-se que, mesmo com a menor distância dos vértices até a estação de Corpo de Bombeiros mais próxima, tem-se uma distância, muito elevada, (aproximadamente 38,5cm) , como mostra o valor encontrado para o vértice  $V_{15}$  com a estação  $c_7$ , que se localiza na Avenida da Integração, 1120, Bairro Alto. Transformando-se esse valor para a escala real, tem-se uma distância de 9km.

Pelas informações obtidas no Corpo de Bombeiros de Curitiba, a velocidade média de deslocamento das viaturas é de aproximadamente 40km/h. Contando as paradas nos semáforos e possíveis congestionamentos. Pode-se ainda ter de se considerar o tempo que essa ambulância está ocupada em outra chamada de emergência. Em razão disso, há necessidade de aumentar-se o número de ambulâncias e/ou realocar as já existentes.

## 4.2 VERIFICAÇÃO DO NÚMERO DE CHAMADAS QUANTO À DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

O nível de confiança usado pela maioria dos pesquisadores é de 5%, por se tratar de um bom grau de confiabilidade. Então será usado o nível de 5% de confiança e com o teste de *K-S*, testar-se-á o ajuste dos valores das ocorrências.

Introduzem-se as seguintes hipóteses:

$H_0: S_n(x) = F_0(x)$ : os dados das chamadas possuem distribuição de probabilidade de Poisson.

$H_1: S_n(x) \neq F_0(x)$ : os dados das chamadas não possuem tal distribuição de probabilidade.

Considerando-se os dados de chamadas de emergência, tem-se 3592 ocorrências (observações) compreendidas entre o dia 01/09/2006 e 30/10/2006 para todas as Estações de Emergência. A partir desse ponto serão apresentados somente os cálculos relativos à estação CIC, sendo que os resultados encontrados nas demais estações serão apresentados sem demonstração.

O cálculo da frequência (absoluta) de observações encontra-se no apêndice A e os resultados para a Estação CIC, estão apresentados na tabela 01 e, para as demais estações, os cálculos foram realizados, mas não serão aqui detalhados, para não haver repetição de procedimentos.

A representação do número de chamadas, no sistema de coordenadas da Estação CIC, encontra-se no gráfico 01.

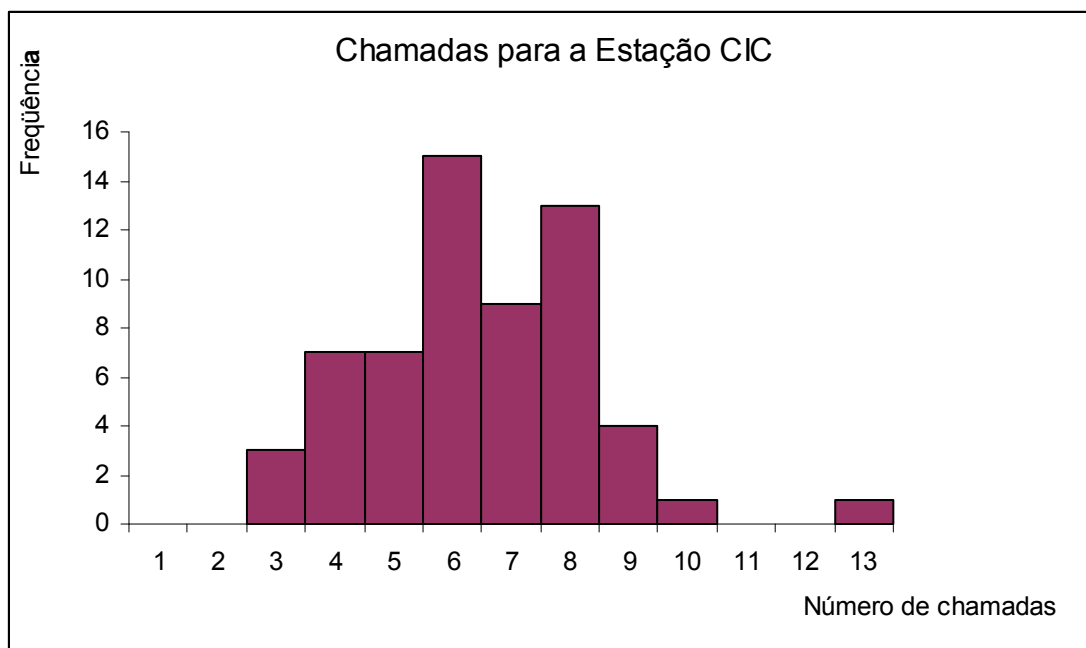


Gráfico 01- Histograma do número de ocorrências na Estação CIC

As regras para a aplicação do teste *K-S* seguem as condições sugeridas por Guimarães & Cabral (1998) e Siegel (1975), mostradas na seção 2.6.3:

Alguns dos cálculos desse teste, foram realizados pelo *software* estatístico *Bioestat 2.0* abordado por Ayres (2000).

Tabela 01-Freqüências observadas nas chamadas para a Estação CIC

$x_i$	$f_i$
0	0
1	0
2	3
3	7
4	7
5	15
6	9
7	13
8	4
9	1
10	0
11	0
12	1
Total	60

A probabilidade de  $n$  chegadas em qualquer intervalo de tempo finito  $t$  é dada pela fórmula (3.2):

$$P_n = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!},$$

em que,  $\lambda t$  é a média do número de chamadas.

Por meio da fórmula  $D = \max |S_n(x) - F_0(x)|$ , determinar  $D$ , em que  $F_0(x)$  é a distribuição teórica acumulada e  $S_n(x)$  a observada acumulada, conforme demonstrado na tabela 02.

Com referência à tabela do teste *K-S*, determinou-se a probabilidade associada à ocorrência, sob  $H_0$  de valores tão grandes quanto o observado de  $D$ .

O valor encontrado de  $D$  máximo =0,2818 foi menor que o tabelado de  $p=0,433$ . Com isso, não se pode rejeitar  $H_0$ , com um nível de 1% e também para 5 %

com um valor de  $p=0,361$ . Conclui-se, então, que para essa Estação de Emergência e para as demais, constatou-se que os valores correspondentes a chamadas de emergência formam uma distribuição de Poisson.

Tabela 02- Valores das probabilidades para o teste de Kolmogorov-Smirnov

$n_i$	$f_i$	$F_o(x)$		$S_n(x)$		$D$	$D$
					0.0000	esq	direita
0	0	0.00424	0.00424	0.0769	0.0769	-0.0042	0.0727
1	0	0.02311	0.02742	0.0769	0.15385	0.0496	0.1265
2	3	0.06314	0.09046	0.0769	0.23077	0.0634	0.1403
3	7	0.11505	0.20551	0.0769	0.30769	0.0253	0.1022
4	7	0.15723	0.36274	0.0769	0.38462	-0.0550	0.0219
5	15	0.17191	0.53464	0.0769	0.46154	-0.1500	-0.0731
6	9	0.15663	0.69126	0.0769	0.53846	-0.2297	-0.1528
7	13	0.12232	0.81358	0.0769	0.61538	-0.2751	-0.1982
8	4	0.08358	0.89716	0.0769	0.69231	-0.2818	-0.2049
9	1	0.05078	0.94794	0.0769	0.76923	-0.2556	-0.1787
10	0	0.02777	0.97569	0.0769	0.84615	-0.2065	-0.1295
11	0	0.01379	0.98948	0.0769	0.92308	-0.1433	-0.0664
12	1	0.00629	1.0000	0.0769	1.00000	-0.0727	0.0042
5.47	60	1.0000		1.00000			

No apêndice B, apresentam-se as probabilidades realizadas pelo teste K-S.

#### 4.3 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DOS SISTEMAS DE FILAS

Para determinar as probabilidades de que  $n$  clientes estejam na fila aplica-se o programa 01 (apêndice C). Para esse programa, são necessários os dados iniciais  $\lambda$  e  $\mu$ , os números de servidores e o número máximo de clientes que pode estar no bloco de espera e a capacidade de origem das chamadas.

Esse programa determina o código do modelo, os dados iniciais ( $\lambda$  e  $\mu$ ), os valores ou probabilidades  $P_i$  e os valores cumulativos ou  $P_i$ .

No apêndice D, apresentam-se os resultados obtidos por esse programa o qual também é utilizado para resolver outro problema, ou seja, o da determinação do número de servidores.

#### 4.4 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE AMBULÂNCIAS

Tendo-se nove estações de Corpo de Bombeiros, num total de dez ambulâncias para a cidade de Curitiba e os dados estatísticos das chamadas telefônicas, é necessário determinar o número de ambulâncias para cada estação.

#### 4.4.1 Cálculo Dos Valores Extremos

Utilizando-se os dados, das chamadas disponibilizadas pelo Corpo de Bombeiros de Curitiba, que estão no apêndice E, determinou-se os valores dos parâmetros principais,  $\lambda$  e  $\mu$ , do sistema de filas da unidade.

O parâmetro  $\lambda$  do sistema, como indicado no item 2.5.5, é igual ao número médio das chamadas extremas, por isso utilizando-se a tabela 01, tem-se  $\lambda = \lambda \bar{t} = 5,47$ (chamadas telefônicas/dia e o cálculo das probabilidades são apresentadas na tabela 03.

Tabela 03 Probabilidades para o número de chamadas

$x_i$	$f_i$	$P(x)$
0	0	0,0000000
1	0	0,0000000
2	3	0,0004087
3	7	0,0014549
4	7	0,0040116
5	15	0,0090189
6	9	0,0172260
7	13	0,0288841
8	4	0,0436473
9	1	0,0606979
10	0	0,0000000
11	0	0,0000000
12	1	0,1153256
Total	60	

Segundo recomendações internacionais deve-se trabalhar com os valores extremos. Como a média de chamadas foi de 5,47, trabalhar-se-á com os valores maiores iguais aos da média. Nesse caso utiliza-se a tabela 01 obtendo as probabilidades de cada chamada.

Como a função densidade de probabilidade é dada pela fórmula

$$f(x; \beta, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ - \left( \frac{x - \beta}{\alpha} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right] \right\}$$

em que  $x$  é a variável aleatória individual da série de valores extremos,  $\beta$  é o parâmetro de posição e  $\alpha$  é o parâmetro de escala. Os resultados obtidos das probabilidades encontram-se dispostos na tabela 03.

Para o valor esperado, tem-se a fórmula

$$E(x) = \beta + \gamma\alpha \rightarrow E(x) = 4,5976 + (0,577 * 1,5054) = 5,466$$

e para a variância  $SD(x) = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\alpha \rightarrow SD(x) = \frac{3,14}{\sqrt{6}} * 1,5054 = 1,929$ , sendo  $\gamma = 0,577216$  (constante de Euler).

A partir da série de valores máximos, num determinado período ( $n$  tempo), são classificados em ordem crescente  $x_1^{\text{máx}}$ ,  $x_2^{\text{máx}}$ ,  $x_3^{\text{máx}}$ , ...,  $x_n^{\text{máx}}$ , calculando-se então o parâmetro  $\sigma$ . Para calcular  $\sigma$ , é dada a expressão,  $\sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n-1} x_i^{\text{máx}}$ , sendo igual a 3,2550847 e os parâmetros  $\beta$  e  $\alpha$  são estimados pelas expressões

$$\beta = x^{\overline{\text{máx}}} - \gamma\alpha \rightarrow \beta = 5,4667 - (0,577 * 1,5054) = 4,5967 \text{ e}$$

$$\alpha = \frac{1}{\ln 2} [2\sigma - x^{\overline{\text{máx}}}] \rightarrow \alpha = \frac{1}{\ln 2} [2 * 3,255 - 5,4667] = 1,5054 \text{ ,}$$

sendo  $x^{\overline{\text{máx}}} = \frac{x_1^{\text{max}} + x_2^{\text{max}} + \dots + x_n^{\text{max}}}{n}$ , o valor médio da série de valores extremos.

Para  $\beta$ , obteve-se o valor de 4,5976932 e para  $\alpha$ , 1,5054564

Para o intervalo de extremo provável (período de retorno), considera-se a variável aleatória  $x$  que representa o número de tempos máximos diários em uma dada região, a distribuição é dada pela fórmula,  $P(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right]\right\}$ , com  $P(x)$ , a probabilidade de que o número máximo de tempos em cada dia seja menor ou igual a  $x$  em que  $P(x)$  é dado por,

$$x_T = \beta - \alpha \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right) \rightarrow x_T = 4,5967 - 1,5054 * \ln\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{60}\right)\right) = x_T = 10,74$$



Para a estimação do número de chamadas extremas  $x_T$ , associada ao período de extremo provável  $T$ , obteve-se o resultado de 10,74 chamadas.

Quanto ao parâmetro  $\mu$ , é igual ao número das chamadas servindo o sistema, em que se utilizou o procedimento análogo do número de chamadas realizado anteriormente.

Para  $\sigma$ , obteve-se o valor de 7,925706, para  $\beta$ , o de 10,79785 e para  $\alpha$  o de 4,450347, sendo o valor de extremo provável igual a 28,38 minutos.

Para  $\bar{t}$  utilizaram-se também valores extremos para cada dia dos meses de setembro e outubro de 2006, resultando, como média desses tempos, aproximadamente  $t = 28,38$  minutos (0,473 horas). Tendo-se, assim:

$$\mu = \frac{24}{0.473} = 50,74$$

Com o algoritmo  $A_3$  constante na seção 3.6.2 e, o programa determinou-se o número de ambulâncias, constante na tabela 04, que dependem de três parâmetros:  $\mu$ ,  $\lambda$  e  $t_0$ .

Sendo que  $\lambda$  (taxa média de chegadas) é de 10,75 e  $\mu$  (taxa média de serviço) é de 50,74.

#### 4.4.2 Cálculo Do Número De Ambulâncias Em Cada Estação

Os resultados detalhados obtidos por meio do programa 02, que está no apêndice F, estão demonstrados no apêndice G e H.

Utilizando-se esse programa, obtêm-se os seguintes números ( $N$ ) de ambulâncias, que estão na tabela 04.

Tabela 04-Resultados de  $\lambda$ ,  $\mu$  e o número de ambulâncias

$\lambda$	$\mu$	$t_0$ (min.)	$N$
10,75	50,74	1	2
10,75	50,74	7	2
10,75	50,74	8	1

Para a cidade de Curitiba, onde há nove estações conhecidas do Corpo de Bombeiros e dez unidades de ambulâncias, o tempo médio de deslocamento  $d(c, s)$ , máximo possível, é de aproximadamente 28 minutos para a Estação CIC. Esse tempo foi calculado com uma única ambulância de atendimento e considerando  $\mu$  e  $\lambda$  para essa estação.

A Estação Central possui um tempo extremo provável de deslocamento de 17 minutos e um tempo máximo de retorno de deslocamento de aproximadamente 34 minutos, portanto, essa estação deverá ter três unidades de ambulâncias.

A Estação CIC possui um tempo médio de deslocamento de 13 minutos e um tempo extremo provável de deslocamento de aproximadamente 28 minutos, deduz-se, então, que essa estação deverá ter duas unidades de ambulâncias.

Já a Estação de Portão possui um tempo médio de deslocamento de 14 minutos e um tempo extremo provável de deslocamento de aproximadamente 31 minutos, assim, essa estação deverá ter duas unidades de ambulância.

Também a Estação de Santa Felicidade possui um tempo médio de deslocamento de 14 minutos e um tempo extremo provável de deslocamento de 37 minutos e deverá também ter duas unidades.

A Estação do Boqueirão possui um tempo médio de deslocamento de 15 minutos e um tempo extremo provável de deslocamento de aproximadamente 31 minutos, logo, essa estação deverá ter duas unidades de ambulâncias.

A Estação do Bairro Novo possui um tempo médio de deslocamento de 13 minutos e um tempo extremo provável de deslocamento de aproximadamente 29 minutos, assim, essa estação deverá ter duas unidades de ambulâncias.

Também a Estação do Bairro Alto possui um tempo médio de deslocamento de 24 minutos e um tempo extremo provável de deslocamento de 50 minutos e terá três unidades.

A Estação situada no CEASA tem um tempo médio de deslocamento de 15 minutos um tempo extremo provável de deslocamento de 32 minutos e deverá contar com duas unidades.

Por último, a Estação do Pilarzinho, que com um tempo médio de deslocamento de 17 minutos e um tempo extremo provável de aproximadamente 40 minutos, precisa de três unidades.

Na seqüência dessa análise, é apresentado o resultado do tempo máximo de deslocamento para as demais unidades. Esse procedimento será análogo ao realizado anteriormente com uma estação.

Observa-se que, para cada estação de emergência, o número de ambulâncias está disposto conforme na tabela 05.

Tabela 05-Resultados do número de ambulâncias para cada estação

<i>Estações</i>	$\lambda$	$\mu$	$N$
Central	24,36	42,45	3
CIC	10,75	50,74	2
Portão	13,17	46,51	2
Santa Felicidade	8,73	38,91	2
Boqueirão	13,96	45,62	2
Bairro Novo	9,73	49,18	2
Bairro Alto	14,67	29,09	3
Ceasa	9,64	44,44	2
Pilarzinho	12,71	36,13	3

Esses resultados estão baseados num tempo de espera na fila de 1 minuto, ou seja,  $t_0 = 1$ .

Os referidos tempos foram calculados a partir dos dados (número de chamadas em cada estação e respectivos tempos de deslocamentos) fornecidos pelo Corpo de Bombeiros de Curitiba.

É importante lembrar que o tempo de espera na fila compreende também o tempo até o despacho da ambulância para o local da ocorrência, tendo-se que considerar, ainda, o tempo de deslocamento do veículo.

Se forem considerados outros valores para os tempos de espera na fila, o número de ambulâncias em cada estação de emergência fica alterado.

A seguir são considerados outros valores de tempos de espera, para as referidas estações, como mostra a tabela 06.

Tabela 06- Resultado do número de ambulâncias em cada estação, para outros valores de tempos de espera na fila.

<i>Estações</i>	<i>Central</i>	<i>CIC</i>	<i>Portão</i>	<i>Santa Felicidad.</i>	<i>Boqu.</i>	<i>B. Novo</i>	<i>B. Alto</i>	<i>Ceasa</i>	<i>Pilarz.</i>
1 min	3	2	2	2	2	2	3	2	3
2 min	3	2	2	2	2	2	3	2	2
3 min	3	2	2	2	2	2	3	2	2
4 min	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7 min	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8 min	2	1	2	2	2	1	2	2	2
9 min	2	1	2	2	2	1	2	2	2
10 min	2	1	2	2	2	1	2	1	2

As unidades de emergência devem ser localizadas de modo que a restrição de  $t_0 = 1$  minuto de espera na fila e  $t = 5$  minutos máximos de deslocamento seja satisfeita, num total de vinte e uma ambulâncias.

Se o tempo  $t_0 = 4$  minutos, o número de ambulâncias reduz para 18, e se  $t_0 = 10$  minutos, tem-se um resultado de 15 ambulâncias para atender a população de Curitiba, para esses valores estimados de chamadas.

#### 4.4.3 Análise Dos Resultados Comparativos Dos Tempos De Deslocamentos

Percebe-se que não adianta ter qualquer número de ambulâncias se ficarem todas num ponto  $c$  para satisfazer a restrição de 5 minutos. A dependência das distâncias máximas entre as ocorrências e a estação é equivalente ao tempo de chegada até a vítima.

Para Curitiba, há nove estações de emergência com dez unidades de ambulâncias, sem considerar a estação que está localizada no aeroporto, todas representadas na tabela 06 com suas localizações em coordenadas cartesianas, seus respectivos tempos médios de deslocamentos e o número de chamadas num período de dois meses do ano de 2006.

Os valores dos tempos de deslocamentos, estão representados no gráfico 02 a seguir.

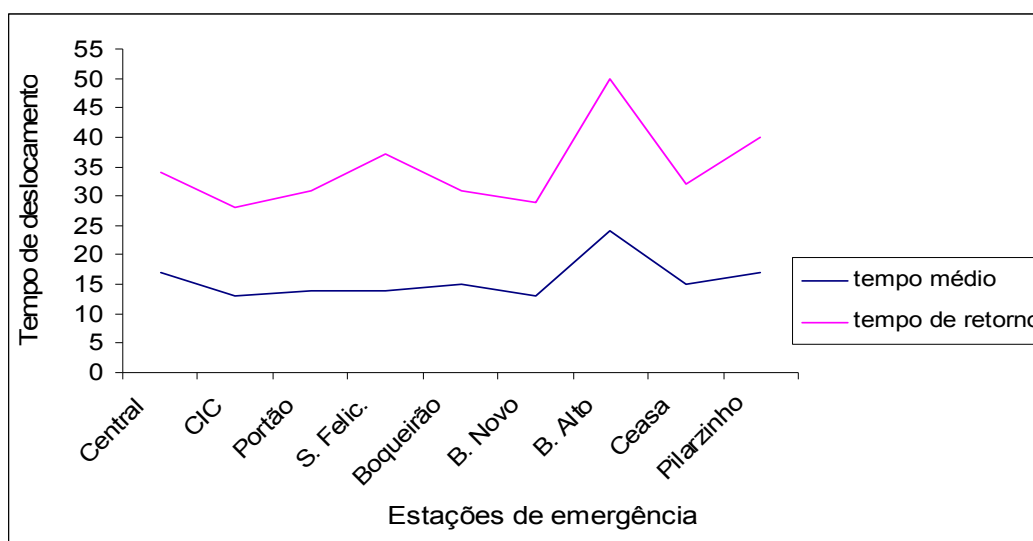


Gráfico 02- Comparação entre o tempo médio e o tempo extremo provável das unidades de emergência.

Para esses tempos médios de deslocamentos, usou-se os valores extremos em cada dia e observou-se que a Estação Central, mesmo com duas unidades de ambulâncias, possui um tempo médio extremo muito elevado em comparação com as outras que possuem apenas uma unidade. A Estação do Bairro Alto demonstrou um tempo muito mais elevado que as demais que também possuem o mesmo número de ambulâncias. Essa diferença pode ocorrer em razão da localização em que se encontra, ou de outro fator que procurar-se-á identificar mais adiante.

Tabela 07-Resultados dos tempos médios de deslocamentos das ambulâncias

<i>Estações existentes</i>	<i>Coordenadas das Estações</i>	<i>Tempo / desloc.</i>	<i>Número de chamadas</i>	<i>Ambulâncias existentes</i>	<i>Ambulâncias necessárias</i>
Central	(42;75).	17	851	2	3
CIC	(11;49).	13	328	1	2
Portão	(35;55).	14	405	1	2
Santa Felicidade	(18;92).	14	201	1	2
Boqueirão	(58;45).	15	413	1	2
Bairro Novo	(44;23).	13	260	1	2
Bairro Alto	(76; 88)	24	606	1	3
Ceasa	(27;15).	15	224	1	2
Pilarzinho	(38;95).	17	304	1	3

Como abordado anteriormente, se for considerado o peso igual para todas as regiões, têm-se as fronteiras de Voronoi ordinário, ou seja, a divisão da área será igual para todas as regiões como ilustra a figura 14.

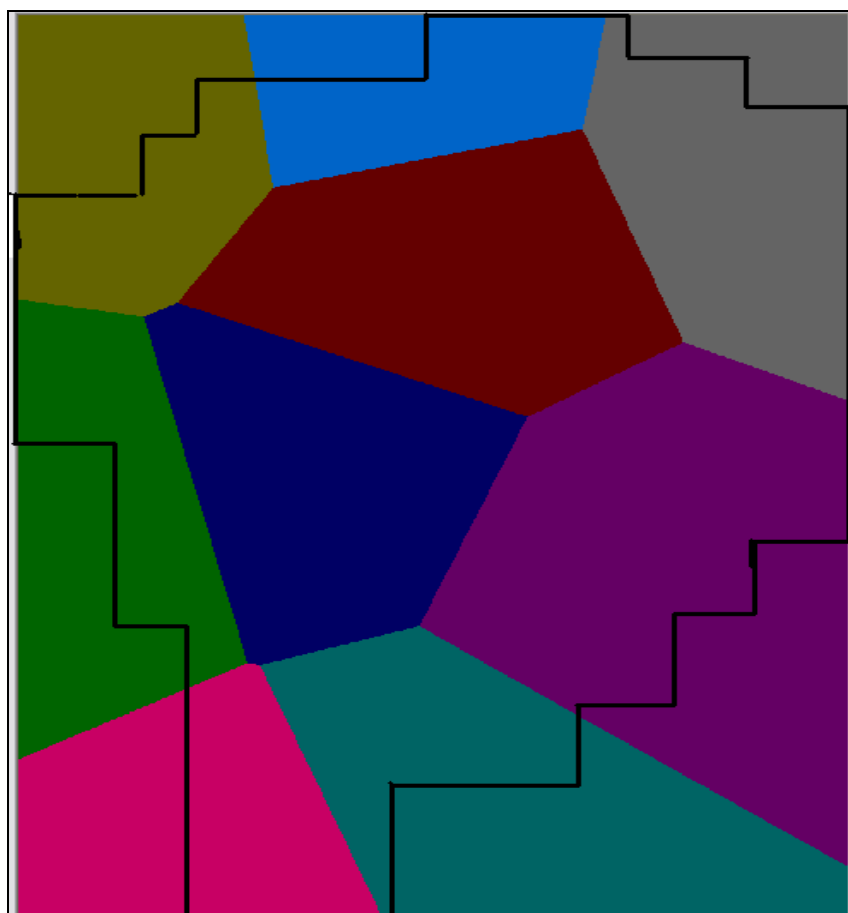


Figura 14- Divisão das regiões por Voronoi ordinário

#### **4.5 DETERMINAÇÃO DAS FRONTEIRAS DAS REGIÕES DE VORONOI PONDERADO**

Pela definição das regiões de Voronoi, estudada na seção 2.4.3, determina-se as suas fronteiras para diferentes casos. Com o programa 03, desenvolvido por Silva (2004), determinaram-se às regiões.

A atribuição dos pesos não pode ser feita de qualquer maneira. Como visto anteriormente, para o equilíbrio das regiões, os pesos devem ser distribuídos de tal forma que quando aumentados em uma região, devem ser diminuídos em outra.

A seguir, será abordado como é realizada essa atribuição dos pesos conforme visto em Silva (2004).

Para um diagrama de Voronoi com nove regiões, como representado na tabela 08, e  $N_i^k$ , o número de chamadas da  $i$ -ésima região na iteração  $k$ , sendo esses números dispostos numa certa ordem.

Tabela 08- Número de chamadas para cada estação de emergência

$N_i = c_i$	Região	Número de Chamadas
$N_1 = c_1$	Central	851
$N_2 = c_2$	CIC	328
$N_3 = c_3$	Portão	405
$N_4 = c_4$	Santa Felicidade	201
$N_5 = c_5$	Boqueirão	413
$N_6 = c_6$	Bairro Novo	260
$N_7 = c_7$	Bairro Alto	606
$N_8 = c_8$	Ceasa	224
$N_9 = c_9$	Pilarzinho	304

$$N_{i1}^k \geq N_{i2}^k \geq \dots \geq N_{in}^k = 851 > 606 > 413 > 405 > 328 > 304 > 260 > 224 > 201$$

com o número médio de chamadas  $m^{-k}$  sendo dado por:

$$m^{-k} = \frac{\sum_{i=1}^9 N_i^k}{9} = \frac{851 + 606 + \dots + 201}{9} = 399,1$$

e o desvio padrão por:

$$\partial^k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (m^{-k} - N_i^k)^2}{9-1}}$$

$$\partial^k = \sqrt{\frac{(399.11 - 851)^2 + (399.11 - 606)^2 + \dots + (399.11 - 201)^2}{8}} = 209,3$$

O valor de  $d$  foi testado para vários valores iniciais e constatou-se que quando  $d = 128$ , tem-se uma menor dispersão dos dados.

$$v_i^{k+1} = \frac{N_i^k - m^{-k}}{128} = \frac{328 - 399.11}{128} = \frac{-71.11}{128} = -0,6$$

Para a alteração no peso de cada região, utiliza-se a fórmula:

$$w_i^{k+1} = w_i^k \pm v_i^{k+1}$$

Nos maiores valores, diminui-se o peso  $w_i$  e nos menores valores acrescenta-se o valor do peso.

Para o cálculo do primeiro peso, no caso, para a Estação CIC, tem-se o percentual do número de chamadas pelo produto do tempo de deslocamento, em horas.

$$w_1 = \frac{328}{3592} * 100 * 0,2166 = 1,9$$

Então, para a Estação CIC, o peso  $w$  será igual a  $w = 1,97 - (-0,6) = 2,5$ . Os resultados dos pesos das demais Estações de Emergência, estão na tabela 09 e demonstração dos pesos das outras no apêndice I.

Tabela 09- Resultados dos pesos para cada estação

	$v_i$	$w_i$	peso
$c_1$	3,5	6,71	3,2
$c_2$	-0,6	1,97	2,5
$c_3$	0,0	2,63	2,6
$c_4$	-1,5	1,3	2,8
$c_5$	0,1	2,87	2,8
$c_6$	-1,1	1,56	2,6
$c_7$	1,6	6,74	5,1
$c_8$	-1,4	1,56	2,9
$c_9$	-0,7	2,4	3,1



Os pontos geradores assumirão pesos diferenciados como mostra a figura 15.

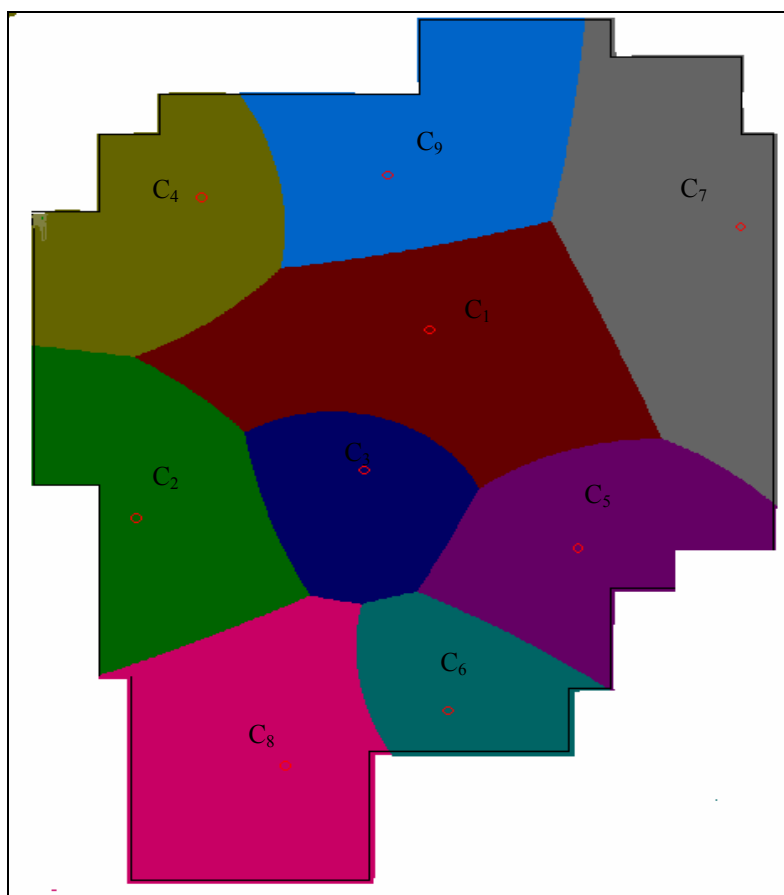


Figura 15-Localização das Estações de Emergência por Voronoi ponderado

#### 4.6 OCALIZAÇÃO OTIMIZADA DOS POSTOS DE AMBULÂNCIAS

Os postos de serviços serão localizados de acordo com os já existentes, utilizando-se do método simplex e de modelos adotados neste trabalho.

Considera-se o problema de colocação ótima das Estações de Emergência quando essas localizações são conhecidas. Para tanto, podem-se conceber dois modelos:

\*1-Modelo minmaxmin;

\*2-Modelo minmaxmin, que para  $n=1$  é um modelo minmax.

Para o caso de ter-se apenas uma estação de emergência, pode-se aplicar o segundo modelo.

Neste estudo, não serão consideradas as distâncias até um hospital.

#### 4.6.1 Determinação Da Localização Dos Postos De Ambulâncias Usando o Modelo Minmax

Considerar-se-á o problema de otimização das colocações das estações de ambulâncias utilizando o modelo minmaxmin como indicado. Para  $n=1$  podendo este ser escrito da seguinte forma:

$$\min_{c \in G} \max_{s \in G} d(s, c),$$

em que  $c$  é o ponto de estação de ambulância e  $s$  o ponto de chamada.

Escolhem-se somente os vértices das regiões para as quais os valores das distâncias  $d(v_i, c_{ij})$  sejam os máximos possíveis. Para cada uma das regiões formadas, escolhe-se o ponto de estação  $c_i^*$ , nesse caso a Estação CIC, de tal modo que a máxima distância das regiões  $D_{ij}$  com o centro  $c_i^*$  (ponto da estação otimizada) seja a mínima possível que contém  $D_{ij}(\xi)$ . Os pontos  $c_i^*$  obtidos, juntamente com os demais, determinam o vetor  $\eta$ . O vetor  $\eta$  é formado pelo conjunto de vértices que contornam a região de abrangência de cada estação.

Para a aplicação do modelo, devem-se ter os vértices que limitam as regiões. Surge, então, o problema de como encontrar os vértices das áreas de abrangências, pois se tratando de regiões ponderadas, não se têm os vértices explicitamente.

A resolução do problema exposto, para a determinação desses vértices, dar-se-á pela utilização de polígonos. Para isso, será adotado um polígono de oito lados em cada região.

Utilizando-se o programa *Solver* para solucionar esse problema com variáveis  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq 35$ , obtêm-se os coeficientes para esse sistema, os quais foram apresentados no apêndice J.

O resultado dos vértices encontrados, para cada uma das regiões, está disposto no quadro 04.

Quadro 04- Coordenadas dos vértices das regiões ponderadas

Estações	Coordenadas dos vértices			
Central	$v_1(13;73)$	$v_2(24;62)$	$v_3(37;65)$	$v_4(47;55)$
	$v_5(67;62)$	$v_6(60;77)$	$v_7(55;89)$	$v_8(27;87)$
CIC	$v_1(5;27)$	$v_2(3;41)$	$v_3(0;55)$	$v_4(0;75)$
	$v_5(12;72)$	$v_6(20;32)$	$v_7(24;62)$	$v_8(30;39)$
Portão	$v_1(24;62)$	$v_2(37;65)$	$v_3(40;62)$	$v_4(47;55)$
	$v_5(42;39)$	$v_6(35;37)$	$v_7(30;39)$	$v_8(27;50)$
Santa Felicidade	$v_1(0;75)$	$v_2(0;90)$	$v_3(7;101)$	$v_4(12;106)$
	$v_5(25;109;)$	$v_6(28;86)$	$v_7(23;79)$	$v_8(12;74)$
Boqueirão	$v_1(42;39)$	$v_2(61;22)$	$v_3(69;37)$	$v_4(78;45)$
	$v_5(78;54)$	$v_6(66;62)$	$v_7(47;55)$	$v_8(57;63)$
Bairro Novo	$v_1(37;18)$	$v_2(47;12)$	$v_3(58;18)$	$v_4(62;22)$
	$v_5(49;35)$	$v_6(42;40)$	$v_7(35;37)$	$v_8(34;29)$
Bairro Alto	$v_1(54;89)$	$v_2(59;80)$	$v_3(68;63)$	$v_4(78;54)$
	$v_5(78;77)$	$v_6(78;101)$	$v_7(74;114)$	$v_8(58;116)$
CEASA	$v_1(10;0)$	$v_2(23;0)$	$v_3(36;0)$	$v_4(36;18)$
	$v_5(34;36)$	$v_6(30;38)$	$v_7(18;31)$	$v_8(5;27)$
Pilarzinho	$v_1(27;85)$	$v_2(42;87)$	$v_3(55;90)$	$v_4(57;103)$
	$v_5(58;104)$	$v_6(40;115)$	$v_7(25;109)$	$v_8(27;97)$

Para cada estação, o procedimento será análogo ao realizado para a Estação CIC.

Os resultados encontrados para o número de ambulâncias em cada Estação de Emergência e as distâncias máximas obtidas da região, em km, após ter-se aplicado o modelo de otimização, estão relacionados na tabela 10 e ilustrados na figura 16.

Tabela 10- Resultado da otimização com modelo minmax

Estações	Coordenadas das Estações	Número de Ambulâncias	Distância máxima de deslocamento
Central	(47;73)	2	13,6 km para 8 km
CIC	(12; 55)	1	15 km para 8 km
Portão	(40; 55)	1	9,8 km para 6 km
Santa Felicidade	(25;101)	1	12,4 km para 12 km
Boqueirão	(61;54)	1	12,4 km para 8 km
Bairro Novo	(49;29)	1	7,5 km para 5,5 km
Bairro Alto	(78;89)	1	15 km para 11 km
CEASA	(30;31)	1	15 km para 12 km
Pilarzinho	(42;115)	1	12 km para 10,5 km

Por meio da tabela 10, observam-se os resultados da otimização das Estações de Emergência em que a distância máxima de deslocamento das Estações não satisfaz a restrição do tempo de deslocamento de 5 minutos, aproximadamente de 5 km, considerando uma velocidade média de 60 km/h.

Se houver outra chamada para a unidade da estação, esta não poderá atender e outra deverá ser acionada para atender a ocorrência. Às vezes, a estação fica muito distante, aumentando o tempo de atendimento, devendo-se realocar sua posição para diminuir o tempo de resposta.

Portanto, deve-se proceder a resolução pelo modelo minmaxmin.

O ponto de localizações das estações otimizadas está representado pelas regiões triangulares e  $c^*$  pelas existentes, como mostra a figura 16.

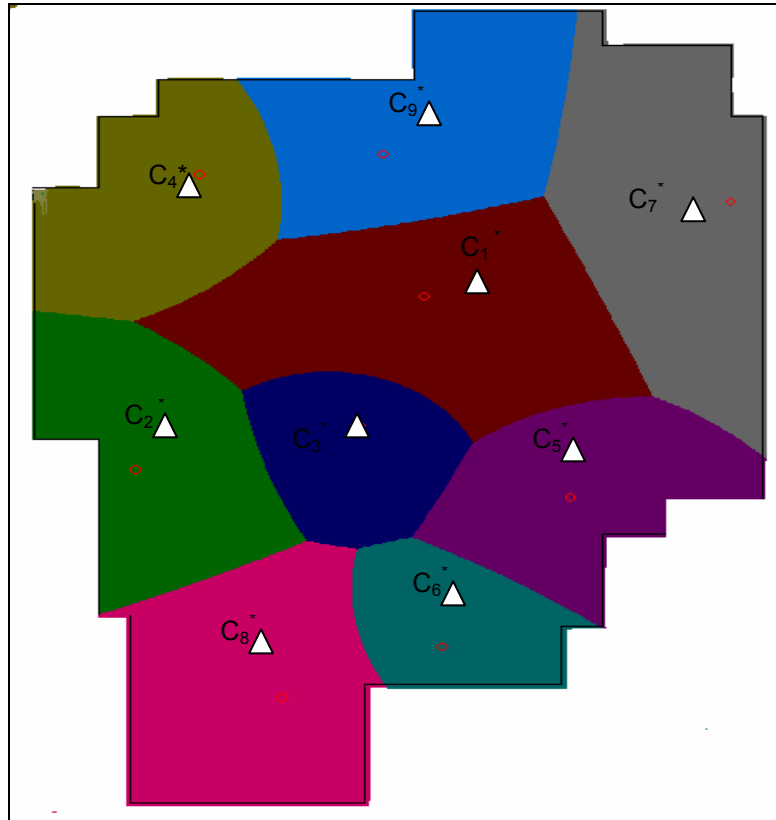


Figura 16-Localização otimizada das Estações de Emergência  
pelo modelo minmax

#### 4.6.2 Determinação Da Localização Dos Postos De Ambulâncias Usando o Modelo Minmaxmin

Nesse item, considerar-se-á o primeiro modelo:

$$\min_{\xi} \max_{s \in G} \min_{1 \leq i \leq n} [d(c_i, s)]$$

em que  $c_i$  são os pontos de colocação das estações e  $s_j$  são os pontos das possíveis chamadas.

Devem-se determinar quantas Estações de Corpo de Bombeiros serão necessárias para que nenhuma pessoa fique sem atendimento e que o tempo de deslocamento da unidade de emergência seja, no máximo, de 5 minutos.

O número total de Estações do Corpo de Bombeiros é dado pela soma das variáveis  $x_i$  com a função-objetivo de minimizar o tempo de deslocamento, segundo Goldbarg (2000).

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_i$$

$$\min \sum_{i=1}^n x_i$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 1$$

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_i = 0 \text{ ou } 1 \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Para reduzir o tempo de atendimento, é preciso escolher novas estações. Considerou-se, então, o caso geral de mais estações novas ( $c_1$  e  $c_n$ ). Para resolver o problema de colocações ótimas de estações novas, utilizam-se o algoritmo  $A_1$  da seção 3.6.1 e o mesmo procedimento para uma estação já usado anteriormente.

Para a realização do algoritmo, utiliza-se o método simplex e obtêm-se os resultados para a colocação de estações de ambulâncias que estão dispostos na tabela 12.

Para as estações de emergência em que foram determinadas três unidades (ambulâncias), Central, Bairro Alto e Pilarzinho, far-se-á a colocação em locais diferentes. Primeiro, mantendo-se duas unidades na estação existente e depois com a colocação de uma estação à direita, seguida de outra à esquerda da posição inicial existente.

Posteriormente, distribuir-se-á uma unidade à esquerda e outra à direita, formando novos pontos de localização de Estações de Emergência.

Os resultados encontrados, para o número de ambulâncias em cada uma dessas Estações de Emergência e as distâncias máximas obtidas após ter-se aplicado o modelo de otimização, estão relacionados na tabela 11 e ilustrados na figura 17 e 18.

Tabela 11- Resultado da otimização com modelo minmaxmin

Estações	Coordenadas das Estações fixas	Número de Ambulâncias	Tempo máximo
Central	(47;73)	3	8 km
	(42;75) e (59;70)	2 + 1 (direita)	7 km
	(42;75) e (32;72)	2 + 1 (esquerda)	5 km
	(59;70) e (43;75) e (32;72)	1 + 1 + 1	7 km; 6 km; 5 km
CIC	(12;55)	2	8 km
Portão	(40;55)	2	6 km
Santa Felicidade	(25;101)	2	12 km
	(25;101) e (14;92)	1 + 1 (esquerda)	7 km
Boqueirão	(61;54)	2	8 km
Bairro Novo	(49;29)	2	5,5 km
Bairro Alto	(78;89)	3	11 km
	(76;88) e (73;67)	2 + 1 (direita)	6 km
	(76;88) e (76;103)	2 + 1 (esquerda)	8,5 km
	(73;68) e (76;88) e (76;103)	1 + 1 + 1	6 km; 7 km; 8,5 km
CEASA	(30,31)	2	12 km
Pilarzinho	(42;115)	3	10,5 km
	(38;95) e (48;103)	2 + 1 (direita)	7 km
	(38;95)	2	9 km 7 km

Observa-se que para a Estação Central, com três unidades de emergência, quando todas as ambulâncias estão na mesma estação, a distância máxima é de aproximadamente 8 km.

Para a aplicação do modelo minmaxmin, acham-se as coordenadas dos vértices para essa região, relacionadas no quadro 05.

Quadro 05- Coordenadas dos vértices da região à esquerda da Estação Central

Central	$v_1(13;72)$	$v_2(18;66)$	$v_3(24;61)$	$v_4(32;65)$
V(25; 73)	$v_5(33;75)$	$v_6(30;86)$	$v_7(27;86)$	$v_8(23;80)$

Quando as estações estão localizadas à esquerda da estação existente, observa-se que a distância máxima de deslocamento fica em 5 km.

Para a localização à direita da estação existente, procede-se o cálculo dos vértices para a aplicação da otimização.

Quadro 06- Coordenadas dos vértices da região à direita da Estação Central

Central	$v_1(55;90)$	$v_2(48;73)$	$v_3(47;51)$	$v_4(48;65)$
V(57;67)	$v_5(57;60)$	$v_6(69;61)$	$v_7(59;70)$	$v_8(59;78)$

Se a localização for à direita da estação, a distância máxima de deslocamento é de 7 km.

Para a localização à direita e à esquerda da estação existente, procede-se o cálculo dos vértices que está demonstrado no quadro 07.

Quadro 07- Coordenadas dos vértices da região da Estação Central

Direita	$v_1(55;90)$	$v_2(48;73)$	$v_3(47;51)$	$v_4(48;65)$
V(57;67)	$v_5(57;60)$	$v_6(69;61)$	$v_7(59;70)$	$v_8(59;78)$
Centro	$v_1(32;65)$	$v_2(33;75)$	$v_3(30;86)$	$v_4(39;60)$
V(42;75)	$v_5(47;51)$	$v_6(48;73)$	$v_7(55;90)$	$v_8(43;8)$
Esquerda	$v_1(13;72)$	$v_2(18;66)$	$v_3(24;61)$	$v_4(32;65)$
V(25; 73)	$v_5(33;75)$	$v_6(30;86)$	$v_7(27;86)$	$v_8(23;80)$



Se, as unidades localizam-se uma à direita e a outra à esquerda da estação existente, obtêm-se as distâncias de 7 km e 5 km para cada uma, e de 8 km para a estação que permanecer no centro. Suas localizações estão demonstradas na figura 17.

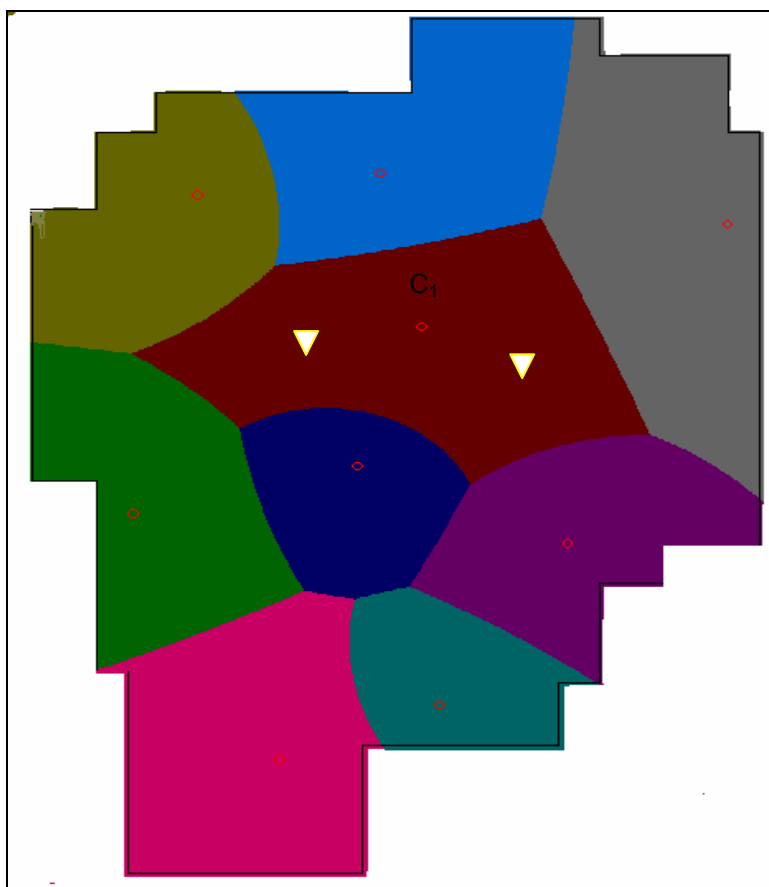


Figura 17-Localização otimizada das unidades de Emergência da Central pelo modelo minmaxmin pela esquerda e pela direita

A aplicação do modelo minmaxmin para a Estação Central está demonstrada no apêndice K.

Observa-se que, para as Estações do Bairro Alto e do Pilarzinho, os quais foram calculadas para três unidades de emergência, quando todas as ambulâncias estão na mesma estação, a distância máxima de deslocamento é de 14 km. Portanto, para essas estações é necessário aplicar o procedimento realizado para a Estação Central.

A aplicação e os procedimentos de otimização, para essas estações, foram análogos aos realizados anteriormente para a Estação Central.

Tanto a Estação Central como a do Bairro Alto e a do Pilarzinho apresentam características comuns. Elas possuem o número de chamadas e o tempo de deslocamento elevado.

O resultado obtido para o número de estações e a distância máxima de deslocamento, após a otimização, são iguais a 3 e 14 km, respectivamente. Então, se a otimização servir para elas, servirá para as outras também.

Observa-se que as otimizações realizadas para as estações foram melhoradas com um tempo de deslocamento entre 5 e 9 minutos. Mas isso não resolve o problema da distância máxima para 5 km, ou seja, para um tempo de 5 minutos.

Se acrescentarem novas estações de localizações  $c_{10}$  (58;76),  $c_{11}$  (57;95),  $c_{12}$ (65;60),  $c_{13}$  (17;72) e  $c_{14}$  (23;33), e aplicar-se o diagrama de Voronoi ponderado para a área em estudo, verifica-se que a restrição de tempo pode ficar dentro do valor esperado.

Para a estação Central, Bairro Alto e Pilarzinho, em que foram encontradas três unidades de ambulância, deixam-se duas na mesma estação e uma é realocada para formar as estações  $c_{10}$ ,  $c_{11}$  e  $c_{12}$ .

Para as Estações da Santa Felicidade e da CEASA, foi encontrado um número de duas unidades para cada uma, o que pode considerar-se não tão elevado. Sendo o da primeira de 201 ocorrências e o da segunda de 224. Então, dessas unidades, serão redistribuídas duas ambulâncias, originando-se as estações  $c_{13}$  e  $c_{14}$ .

Tanto para as novas estações como para as já existentes, foi aplicado o modelo minmax, cujos resultados estão apresentados na tabela 12 e ilustrados na figura 18.

Tabela 12- Resultado da otimização com novas estações para o modelo minmax

Estações	Coordenadas das Estações	Número de Ambulâncias	Distância máxima de deslocamento
Central- $c_1$	(42;75)	2	4,8 km
CIC- $c_2$	(11;49)	2	4,7 km
Portão- $c_3$	(35;55)	2	4,2 km
Santa Felicidade- $c_4$	(18;92)	1	4,8 km
Boqueirão- $c_5$	(58;45)	2	4,2 km
Bairro Novo- $c_6$	(44;23)	2	3,3 km
Bairro Alto- $c_7$	(76;88)	2	3,5 km
CEASA- $c_8$	(27;15)	1	3 km
Pilarzinho- $c_9$	(38;95)	2	3 km
$c_{10}$	(58;76)	1	2,8 km
$c_{11}$	(57;95)	1	3,3 km
$c_{12}$	(65;60)	1	3,4 km
$c_{13}$	(17;72)	1	4,2 km
$c_{14}$	(23;33)	1	4,9 km

Para o peso gerador das regiões de cada estação, considerou-se somente o número de estações, pois para as novas não se conhece o número de chamadas.

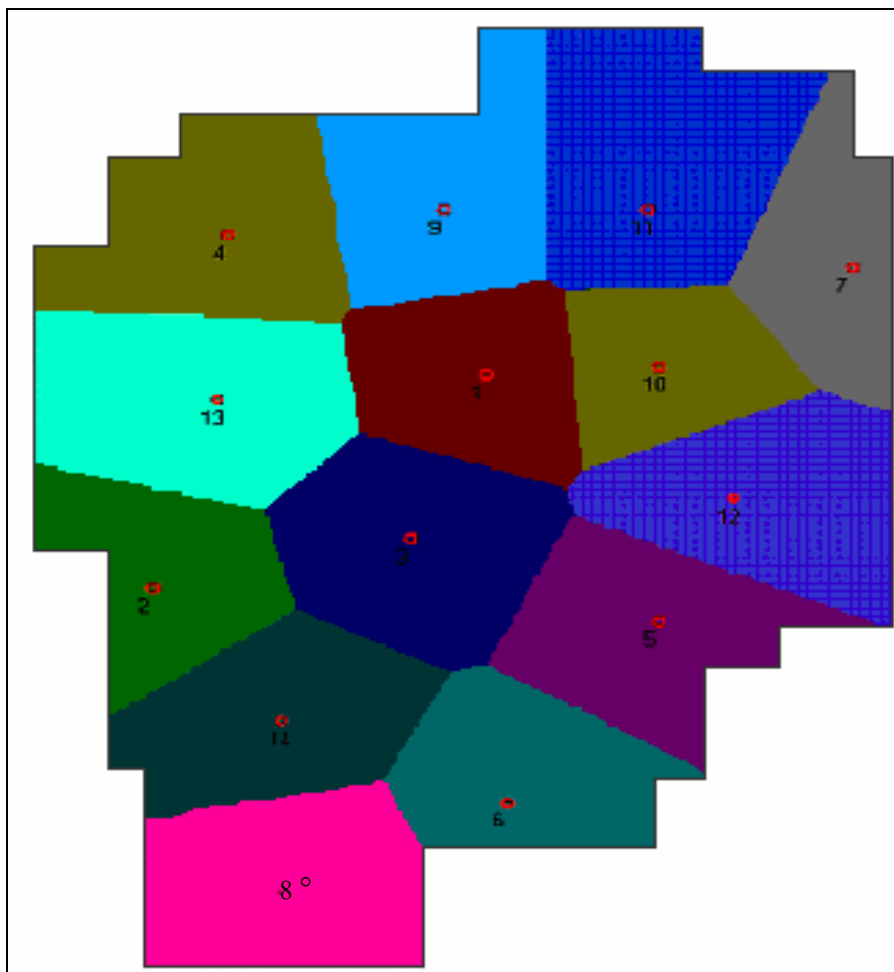


Figura 18- Localização otimizada das Estações de Emergência

Observa-se que as otimizações realizadas para as estações novas e antigas, foram melhoradas com um tempo de deslocamento de até 5 minutos. O que parece ter resolvido o problema da distância máxima para 5 km, ou seja, para a restrição de tempo de 5 minutos.

Os resultados obtidos para o número de estações e as distâncias máximas de deslocamentos, após a otimização, mostraram-se satisfatórios.

## **CAPÍTULO V**

### **5 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A falta de planejamento na localização de Estações de Emergência de Corpo de Bombeiros é um dos fatores recorrentes no atendimento emergencial de socorro que apontam a necessidade de se propor um método de localização para encurtar distâncias e reduzir o tempo de atendimento.

Outro fator que pode interferir, é a ocorrência de fluxo viário lento ou até mesmo bloqueado em situações de congestionamento nos horários de pico, de rua interditada para tráfego de veículos, os quais fogem ao alcance do método apresentado.

Pensando em diminuir o tempo de deslocamento e conseqüentemente o tempo de espera, este trabalho, propôs uma metodologia para determinar o número necessário de Estações de Emergência do Corpo de Bombeiros, utilizando a teoria das filas para o cálculo do número de ambulâncias e o diagrama de Voronoi ponderado para a divisão da área em estudo.

Até o momento as pesquisas realizadas utilizaram modelos que apresentavam um fator como limitação, o número de ambulâncias necessárias para atender a população de uma determinada região, em que muitas vezes, necessitavam recorrer ao uso de simulação para sanar essa restrição.

A metodologia consistiu, primeiramente, em determinar os parâmetros que foram utilizados para calcular o número de ambulâncias em cada Estação de Emergência. Obtido os dados das chamadas de emergência, com o tempo de deslocamento e o número de ocorrências para cada Estação de Corpo de Bombeiros, procedeu-se a verificação se os dados têm distribuição de Poisson, por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov, em que tal distribuição foi confirmada.

Em segundo lugar, por tratar-se de dados de emergência, foram utilizados somente os valores extremos para o cálculo dos parâmetros. Pela distribuição de Gumbel, calcularam-se os valores extremos para o número de chamadas e o tempo extremo provável de deslocamento. Concluindo-se que para esses valores, o tempo de deslocamento ficou muito acima do desejado.

Em terceiro, calculou-se o número de ambulâncias, usando-se os parâmetros encontrados e teoria das filas. Para os valores utilizados, o número de ambulâncias dobrou em relação ao existente.

Com esses resultados procedeu-se a aplicação da metodologia, em que foi necessário localizar cada ponto de Estação de Emergência do Corpo de Bombeiros e os vértices da região em estudo no plano cartesiano.

Em outra etapa, encontraram-se os pesos que serão usados para determinar as fronteiras do diagrama de Voronoi. Os pesos foram obtidos proporcionalmente ao número de chamadas para cada região, com seus respectivos tempos de deslocamentos. Por meio do algoritmo e o programa elaborado por Silva (2004), procedeu-se à divisão da área de cobertura em regiões de abrangência para cada estação.

Na etapa seguinte, após serem realizados as divisões da área, com seus respectivos pontos geradores (estações), aplicou-se o modelo minmax pelo método simplex para a otimização das localizações, em cada região, e os resultados obtidos mostraram que a quantidade de ambulâncias permanecendo todas na mesma estação de cada região, sem serem redistribuídas, não satisfaz à recomendação internacional do tempo de espera de cinco minutos. Por isso, para que se encontrasse a localização ótima, foi necessário que se redistribuísse os pontos um à direita e outro à esquerda (caso haja mais de uma unidade de ambulância naquela base) e aplicou-se o modelo minmaxmin para a reotimização. O modelo considera uma estação, em que uma ou mais unidades são distribuídas dentro da zona de

abrangência da referida base. As chamadas recebidas são encaminhadas para a unidade que esteja mais próxima da ocorrência, fazendo com que o tempo de deslocamento seja reduzido sem precisar acrescentar novos postos de estações.

A utilização desse modelo, dentre as estações analisadas, mostrou-se satisfatório apenas para algumas unidades, se for considerado um tempo de espera de até nove minutos. Portanto para esse caso, somente a aplicação desses modelos não foi suficiente, devendo-se acrescentar novos postos de emergência.

Se com a aplicação dos modelos citados, a restrição do tempo de deslocamento tivesse sido satisfatória, concluíria-se a metodologia.

A partir desses resultados, ficou clara a necessidade de acrescentarem-se novas Estações de Emergência, para diminuir o tempo de espera.

A preocupação com a necessidade de se acrescentar novas instalações para suprir a demanda excedente é algo que pode ser previsto mediante o uso de critérios de alocação temporal, já abordado por Souza (1996) e portanto, não tratados nesse estudo.

Acrescentando-se novas estações, houve uma redução da distância de deslocamento das ambulâncias e, conseqüentemente, diminuição do tempo de espera da vítima, mas sendo considerado somente o tempo como fator de quantas estações acrescentar. Quanto ao número de chamadas, nada se pode dizer pois nos pontos acrescentados, não se tem conhecimento desses valores.

A aplicação dos modelos e métodos, supondo-se que a população seja uniformemente distribuída, demonstrou bons resultados para a localização de Estações de Emergência, sem considerar a distância da ocorrência até um hospital, mas que para o número de ambulâncias após serem acrescentadas outras estações, não ficou muito claro.

Diante desse quadro, pode ser que as ambulâncias anteriormente determinadas pela teoria das filas, possam ser reduzidas em número. Entretanto a metodologia proposta não indica quantas unidades poderão ser suprimidas e em quais estações isso ocorrerá.

Contudo a abordagem permitiu calcular, para um determinado conjunto de dados, o número suficiente de ambulâncias sem que houvesse limitação com relação à quantidade de unidades, o que dispensou o uso de simulação.

Sendo assim, a metodologia apresentada é um instrumento que pode ser aplicado para qualquer região, desde que se tenham os dados relativos às ocorrências e os tempos de deslocamento, registrados num período considerado.

Acredita-se que o método desenvolvido possa auxiliar na otimização dos postos de serviços emergenciais de socorro, sendo uma ferramenta útil ao planejamento das cidades, no que diz respeito à localização e quantificação das Estações do Corpo de Bombeiros e à determinação do número de ambulâncias em cada estação. O uso da metodologia possibilita avaliar por exemplo, se a quantidade de ambulâncias existentes é insuficiente ou satisfatória, devendo-se acrescentar ou não novas Estações de Emergência.

Os algoritmos elaborados e os programas computacionais utilizados como *Pascal*, *Solver*, *Bioestat 2.0* e *Visual Basic 6.0*, demonstraram ser eficiente para a resolução do problema exposto.

## **RECOMENDAÇÕES**

Durante a pesquisa para a realização do presente trabalho constatou-se que o tempo de utilização e deslocamento de uma unidade de emergência aumenta em razão de não existir, muitas vezes, um hospital próximo ao local das chamadas. Segundo informações obtidas junto ao Corpo de Bombeiros de Curitiba, apenas três hospitais dos inúmeros existentes, recebem as vítimas atendidas pela equipe de resgate.

Talvez se houvessem mais hospitais conveniados para o encaminhamento das vítimas, o tempo de utilização das ambulâncias diminuísse consideravelmente, e conseqüentemente, estariam disponíveis mais rapidamente, pois a unidade só está liberada quando retorna a base. É possível que o tempo considerado na aplicação dessa metodologia pudesse ser menor se as vítimas fossem encaminhadas a um hospital mais próximo às ocorrências.



Sendo assim, sugere-se que em outros trabalhos sejam consideradas as distâncias da ocorrência até um hospital mais próximo e que o fator de utilização das unidades possa ser levado em conta, para melhorar a eficiência de modelos ou métodos elaborados.

Acredita-se que novas pesquisas possam ser desenvolvidas com outras abordagens, capazes de apontar soluções com relação à determinação da redução ou não do número de ambulâncias encontradas pelo modelo e a indicação das estações em que isso seria necessário.

Fica também a sugestão para futuros trabalhos, considerando a distribuição não uniforme da população, o que nessa metodologia não foi contemplada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBINO, J. C. Quantificação e Localização de Unidades Móveis de Atendimento de Emergência e Interrupção de Redes de Distribuição de Energia Elétrica;: Aplicação do Modelo Hipercubo, dissertação de Mestrado, PPGE/UFSC. 1994
- ALY, A A; MARUCHECK, A. **Generalized Weber Problem With Rectangular Regions**. Journal Operational Research Soc. v.33, p. 983-989, 1982.
- AYRES, M.; JR., M. A. **Software Bioestat. 2.0. Aplicações Estatísticas nas Áreas das Ciências Biológicas e Médicas**. Brasília: CNPq, 2000.
- BACK, Álvaro José. **Relações Intensidade-Duração-Freqüência de Chuvas Intensas de Chapecó-S.C.** v.28, n.4, p.575-581, 2006.
- BEIJO, L. A.; MUNIZ, J. A.; NETO, P. C. **Tempo de Retorno das Precipitações Máximas em Lavras (M.G.) Pela Distribuição de Valores Extremos do Tipo I**. Ciência Agrotécnica de Lavras. v.29, n.3, p.657-667, 2005.
- BHATTACHARYA, U; RAO, J. R.; TIWARI, R. N. **Fuzzy multicriteria facility location problem, Fuzzy Sets and Systems**. v.51, p.277-287, 1992.
- BOFFEY, B.; NARULA, S. **Multiobjective Covering and Routing Problems**. Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional. v.17, n.1, 1997.
- CARRIZOSA, E.; MUÑOZ-MÁRQUEZ, M.; PUERTO, J. A. **Note on the Optimal Positioning of Service Units**. Operations Research. v.46, n.1, p.155-156, 1998.
- CHIYOSHI, F. Y.; GALVÃO, R. D.; MORABITO, R. **O Uso do Modelo Hipercubo na Solução de Problemas de Localização Probabilísticos**. Gestão e Produção, v.7, n.2, p.146-174, ago. 2000.
- CHURCH, R.; REVELLE, C. **The Maximal Covering Location Problem**. Paper of the Regional Science Association. v.32, p.101-118, 1974.

- CHUNG, R.; REVELLE, C. *MCLP- maximum covering location problem* In: GOLDBARG, M. C. **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 2000.
- CONTRI, R. F. F. **Um Método para Determinação do Número de Ambulâncias para Santa Maria**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - UFSM, Santa Maria, 2000.
- CONVEY, J. S.; SLOANE, N. J. A. **Sphere packings, lattices and groups**. Pergamon Mac-Millan New York. v.1 e v.2, 1990.
- COSTA, D. M. B. **Uma Metodologia Iterativa para Determinação de Zonas de Atendimento de Serviços Emergenciais**. 2003. 120 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - UFSC. Florianópolis, 2003.
- DREZNER, Z. **Facility location: A survey of applications and methods**. New York: Springer, 1995.
- DREZNER, Z. **The p-center problem-Heuristic and optimal algorithms**. Journal of Operational Research Societ. v.35, n.8, p. 741-748, 1984.
- \_\_\_\_ **Regular Figures**. New York: Pergamon Macmillan, 1964.
- FERREIRA, M. J.; SOUZA, R. C.; BRASIL, G. H. **Modelos Dinâmicos Bayesianos Para Extremos**. Investigação Operacional, APDIO-CESUR-IST, Portugal, v.19, n.1, p.95-121, jun.1999.
- FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. **Curso de Estatística**. São Paulo:Atlas, 6ª edição, 1996.
- FURASTÉ, P. A. **Normas Técnicas para o Trabalho Científico: Elaboração e Formatação**. Explicitação das Normas da ABNT. 14 ed. Porto Alegre, 2006.
- GALIEV, Sh. I.; SATAROV, A Z. **Problems of the arrangement of emergency ambulance services with the use of continuous models**. Vestnik KGTU, (Kazan, Russia). n.6, p.39-44, 1996.
- GALIEV, Sh. I. **Directions of decrease for minmax problems**. Comput. Maths Math. Phys. v.33, p.19-28, 1993.
- \_\_\_\_ **The directions of decrease for minmaxmin problems**. Comp. Maths. Match. Phys. v.34, n.3, p.271-286, 1994.
- \_\_\_\_ **Computational algorithms for the optimum covering of plane domains by a prescribed number of ellipses**. Comput. Maths Math. Phys. v.35, n.35, p.609-617, 1995.

- \_\_\_\_ **Multiple packing and covering of sphere.** Diskretnaja matematika (na Russia). v.8, n. 3, p.148-160, 1996.
- GALIEV, S. I.; CAMARGO, M. E.; ARASLANOV, A. M. **Alguns Métodos de Investigação dos Problemas *Minmaxmin* e Otimização dos Recobrimentos Múltiplos.** In: Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha, 1, Rio de Janeiro. 1997. Anais SPOLM. 1997.
- GALIEV, Sh. I.; CAMARGO, M. E.; ARASLANOV, A. M. **Distribuição de Estações e Serviços de Ambulância.** Universidade Federal de Santa Maria. 1998.
- GALVÃO, Lauro César. **Dimensionamento de Sistemas de Distribuição Através do Diagrama Multiplicativo de Voronoi com Pesos.** 2003. 162 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - UFSC, Florianópolis, 2003.
- GALVÃO, L. C.; SOUZA, J. C.; NOVAES, A. G. N. **Partição Espacial com Diagramas de Voronoi Associada a Problemas Logísticos.** In: Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes. 14, 2000. Gramado. Anais ANPET, 2000. v.2, p. 43-46.
- GALVÃO, L. C.; NOVAES, A. G.; de CURSI, J. E. S. e SOUZA, J. C. **A Multiplicatively Weighted Voronoi Diagram Approach to Logistics Disticting.** Computers Operations Research, v.33, p.93-114. 2006
- GALVÃO, R. D.; CHIYOSHI, F. Y.; ESPEJO, L.G. A. e RIVAS, M. P. A. **Solução do Problema de Localização de Máxima Disponibilidade Utilizando o Modelo Hipercubo.** Pesquisa Operacional v. 23, n. 1, p.61-78. jan.–abr. 2003.
- GARGANO, Furia. **Análise estatística do serviço de ambulância da cidade de Santa Maria.** 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – UFSM, Santa Maria, 2000.
- GOLDBARG, Marco Cesar. **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos.** Rio de Janeiro: Ed. Campus, 2000.
- GUIMARÃES, R.C.; CABRAL, J. A. S. **Estatística.** Lisboa. Portugal: Ed. McGRAW-HILL de Portugal, 1998.
- HILLIER, F.; LIBERMAN, G. **Introdução À Pesquisa Operacional.** São Paulo: Ed. Campus Ltda, 1988
- IANNONI, A. P. **Otimização da Configuração e Operação de Sistemas Médicos Emergenciais em Rodovias Utilizando o Modelo Hipercubo.** 2005. 229 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – UFSCar, São Carlos, 2005.
- KLEIN, R.; WOOD, D. **Voronoi diagrams based on general metrics in the plane.** Proc. 5-th Symp. on Theoretical Aspects of Computer Science (R. Cori and M. Wirsing, eds.) LNCS 294, Springer-Verlag, Berlin. p. 281-291, 1998.

- LARSON, R. C.; ODoni, A. R. **Urban Operations Research**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 1981.
- LEDOUX, H. ; GOLD, C. **Modelling Oceanographic Data With the Three-dimensional Voronoi Diagram**. [http://www.voronoi.com/pdf/2000-2003/modellingoceanografc.data\\_data\\_3d\\_voronoi.pdf](http://www.voronoi.com/pdf/2000-2003/modellingoceanografc.data_data_3d_voronoi.pdf) > Acesso em 01/03/2007.
- LEE, D.T. **Two-dimensional Voronoi diagrams in the  $L_p$ -metric**. J. Association for Comput. Mach. v.27, p. 604-618, 1980.
- LEE, D.T.; WONG, C.K. **Voronoi diagrams in  $L_1(L_\infty)$  metrics with 2-dimensional storage application**. SIAM J. Comput. v.9, p.200-211, 1980.
- LOBO, D. da Silva. **Dimensionamento e Otimização Locacional de Unidades de Educação Infantil**. 2003. 155 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) –UFSC , Florianópolis, 2003.
- LOVE, R. F.; MORRIS, J. G. **Facilities location models and methods**. N. Y.: Elsevier Science Publishing Co, 1988.
- LUCENA, P.; ANDRES, T. ; NESS, W. **Não-Normalidade, Auto-correlação dos Retornos e Existência de Caudas Densas: Um Estudo Empírico na BOVESPA**. In: Patricia Tomej; Ursula Wetzel. (Org.). Estudos em Negócios 2. Rio de Janeiro: Mauad, 2003.
- MARIANOV, V; REVELLE, C. S. **Sitting emergency services**. Chapter 10 in Z. Drezner. **Facility location: A survey of applications and methos.**, N. Y.: Springer-Verlag, 1995.
- **The Queueing Maximal Availability Location Problem: A model for the siting of emergency vehicles**. European Journal of Operational Research. v.93, p.110-120, 1996.
- MENDONÇA, F. E.; MORABITO, R. **Aplicação do modelo Hipercubo para análise de um sistema médico-emergencial em rodovias**. Gestão & Produção. v.7, n.1, p.73-91, 2000.
- MENDONÇA, F. E.; MORABITO, R. **Analysing emergency service ambulance deployment on a Brazilian highway using the hipercube model**. Journal of the Operational Research Society. v.52, p.261-268, 2001.
- NOVAES, A. G. **Métodos de Otimização: Aplicações aos Transportes**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda, 1978.
- NOVAES, A. G.; de CURSI, J. E. S.; da SILVA, A. L. e SOUZA, J. C. **Solving Continuous Location-Districting Problems with Voronoi Diagrams**. Computers Operations Research (paper aceito para publicação). 2007
- ODONI, A. R. **Sistemas de Filas**. Outubro, 2001.

- OKABE, A.; BOOTS, B.; SUGIHARA, K. ***Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams***. New York: John Wiley & Sons, Chichester, 1992.
- OLIVEIRA, L. K. de. **Uma Aplicação do Modelo Hipercubo de Filas para Avaliação do Centro de Emergência da Polícia Militar de Santa Catarina**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – UFSC, Florianópolis, 2003.
- OLIVEIRA, J. F. **Filas de Espera**. Investigação Operacional. FEUP. 1998. Disponível em: [www.fe.up.pt/si/file-get.publ-relatório? P-id=740](http://www.fe.up.pt/si/file-get.publ-relatório?P-id=740). Acesso em 05/02/07.
- PANICO, J. A. ***Queuing Theory: A Study of Waiting Lines for Business, Economics, and Science***-New Jersey. New Jersey: Prentice-Hall. INC., Englewood Clieffs, 1969.
- POLYAK, R. A. ***Smooth optimization methods for minmax problems***. SIAM J. Control and Optimization. v.26, n.6. p.1274-1286, 1988.
- QUEIROZ, M. F. de; CHAUDHRY, F. H. **Análise de Eventos Hidrológicos Extremos Usando-se a Distribuição GEV e Momentos LH**. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. v.10, n.2, p. 381-389. Campina Grande, 2006.
- PREPARATA, F.P.; SHEIMOS, M.I. ***Computational geometry. The Introduction***. New York: Springer-Verlag, 1985.
- REVELLE, C.; MARKES, D.; LIEBERMAN, J. ***An analysis of private and public sector location models***. Management Science. v.16, n.11, p.692-707, 1970.
- REZENDE, F. A.; ALMEIDA, R. M.; NOBRE, F. R. **Diagramas de Voronoi para a definição de áreas de abrangência de hospitais públicos no município do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Cad. Saúde Pública. p. 467-465, 2000.
- SERRA, Pedro Cunha. **Momentos-L Para Distribuição Log-Pearson Tipo III**. Revista Recursos Hídricos, v.27, n.2. s/ ano.
- SIEGEL, Sidney. **Estatística Não-Paramétrica Para as Ciências do Comportamento**. São Paulo: Ed. McGRAW-HILL do Brasil, Ltda, 1975.
- SILVA, A. C. L. **Estratégias para Divisão de Áreas de Estudo em Problemas Logísticos- uso do Diagrama de Voronoi com Obstáculos**. 2004. 132 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - UFSC, Florianópolis. 2004.
- SILVA, Renato R.; ZOCCHI, Silvio S. **A Distribuição Generalizada de Pareto-Poisson no Estudo da Precipitação Pluvial Total Diária Máxima em Piracicaba, S.P.** Revista Matemática e Estatística. São Paulo, v.24, n.3, p. 77-94, 2006.

SILVA, Benedito C. da L. e CLARKE, Robin T. **Análise Estatística de Chuvas Intensas na Bacia do Rio São Francisco**. Revista Brasileira de Meteorologia. v.19, n.3, p.265-272. 2004.

SOUZA, J. C. **Dimensionamento, Localização e Escalonamento de Serviços de Atendimento Emergencial**. 1996. 108 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - UFSC, Florianópolis, 1996.

SOUZA, J. C. **Acidentes em Rodovias- Localização de Viaturas de Socorro**. In: Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha, 3, Rio de Janeiro. 1999. Anais SPOLM. 1999.

SOUZA, J. C. **Análise de sistemas logísticos**. Pautas de aula. UFSC, 2002.

TAHA, H. A. **Operations research. An introduction**. New York: Ed. Macmillan, 3ª ed., 1976.

TAKEDA, R. A.; WINDMER, J. A.; MORABITO R. **Aplicação do Modelo Hipercubo de Filas para Avaliar a Descentralização de Ambulâncias e um Sistema Urbano de Atendimento de Urgência**. Pesquisa Operacional. v.24, n.1, p.39-71. jan.- abr., 2004.

TOREGAS, C.; SWAIN, C.; REVELLE, C.; BERGMAN, L. **The Location of Emergency Service Facilities**. Operations Research. v.19, p.1363-1373, 1971.

VALVERDE, A. E. L.; LEITE, H. G.; SILVA, D. D.; PRUSK, F. F. **Momentos-L: Teoria e Aplicação em Hidrologia**. SIF-Sociedade de Investigações Florestais. Viçosa. M.G. v. 28, n.6, p.927-933, 2004.

WEBER, A. UBERDEN. **Standart der Industrien, Tubingen**. 1909, Translated as Alfred Weber's Theory of Location of Industries by C. J. Friedrich, Chicago. 1929.

WESOLOWSKI, G. O.; LOVE, R. **Rectangular distance location under the minmax optimality criterion**. Transportation Sci. v.6, p.103-113, 1971.

WINSTON, L. Wayne; VENKATARAMANAN, Munirpallam. **Introduction to Mathematical Programming**. Operations Research: v.1. Ed. Thomson, 4ª edição, 2004.

### **Bibliografia Complementar**

BERTSEKAS, D. **Conditional optimization and methods of lagrange multiplicadors**. New York, 1982.

BRANDEAU, M. L.; CHIU, S. S. **An overview of representative problems in location**. Reserch. Management Science. v.35, n. 6, p.645-674, 1989.

BRONSON, R. **Pesquisa Operacional**. Tradução: Bernardo Severo da Silva Filho, Othan Guilherme Pinto Bravo. São Paulo, Ed. McHill do Brasil. 1985.

- BRUSOV, V. S.; PIAYSKII, S. **À Algoritmos para otimização recobrimentos de regiones de plane.** Comput. Maths Math. Phys. v.11, n.2, p.304-313, 1971.
- CAMPONOGARA, E. **Métodos de Otimização: Teoria e prática.** Florianópolis: UFSC, 2004.
- CARRIZOSA, E. et al. **The generalized Weber problem with expected distances.** Operations vehicles. European Journal of Operational Research. v.29, n.1, p.35-57, 1995.
- CLARKE, F. M. **Optimization and non-smooth analysis.** Nauka, Moscow **optimization.** Moscow: Springer-Verlag, 1988.
- CORMEN, T. H.; et al. **Introduction to Algorithms.** Mc Grow-Hill. 1989.
- CUNHA, C. B. **Aspectos Práticos da Aplicação de Modelos de Roteirização de Veículos a Problemas Reais.** 2000. Disponível em:  
<[http://www.ptr.usp.br/docentes/cbcunha/files/roteirizacao\\_aspectos\\_praticos\\_CBC.pdf](http://www.ptr.usp.br/docentes/cbcunha/files/roteirizacao_aspectos_praticos_CBC.pdf)> Acesso em 16/10/06
- DREZNER, Z; WESOLOWSKY, G.O. **Optimum Location probabilities in the Lp Distance Weber Problem.** Transportation Science. v.15, n.2, p. 85-97, 1981.
- DREZNER, Z. **Location of Regional Facilities.** Naval Research Logistics Quartely. v.33, p.523-529, 1986.
- FEJES Tóth, G. **New results in the theory of packing and covering. Convexity and its Applications.** Birkhauser, Basel. 1983.
- **Finding an approximate solution of maxmin with coupled variables and a mulytiple maximin.** Comp. Maths Math. Phys. v.26, n.10, p.1455-1465, 1986.
- **Multiple packing and covering of sphere.** Sibirskii matem. Journal. (na Rússia). v.30. n.3, p.202-203, 1989.
- **Finding an approximate solution for some maxmin problems.** Comput. Maths Math. Phys. v.37, n.11, 1997
- **Propriedades da integral sobre domínio variável.** In: Resumo de 51-ª Reunião Anual da SBPC-1999. Porto Alegre. 1999.
- GALIEV, S. I.; CAMARGO, M. E. **Agrupamentos Múltiplos da Esfera num Espaço, Euclidiano Tridimensional.** In: Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha, 2, Rio de Janeiro. 1998. Anais SPOLM. 1998.
- GALVÃO, Roberto D.; ESPEJO, Luis Gonzalo C.; BOFFEY, Brian. **A Hierarchical Model for the Localization of Perinatal Facilities in the Municipality of Rio de Janeiro.** European Journal of Operational Research. v.138, p.495-517, 2002.



- JANDL, H.; WIEDER, K. A. **Continuous set covering problem as a quasidifferentiable optimization problem**. Optimization J. of math. progr. and operat. res. v.19, n.6, p.781-802, 1988.
- HOFFMAN, E. H.; et al. **Sistema de Roteirização Urbana**. 2006. Disponível em: <[http://www. Conged.deinfo.uepq.br/artigo1.pdf](http://www.Conged.deinfo.uepq.br/artigo1.pdf)> Acesso em 15/10/06.
- KIMURA, Toshikazu. **Approximating the Mean Waiting Time in the GI/G/s Queue**. Journal of the Operational Research Society. v. 42, n.11, p.954-970, 1991.
- KISELEVA, E. M; SHOR, N. Z. **Pesquisa dos algoritmos de um problema de partição de um conjunto Kibernética**. Russia. n.1, p.85-96, 1994.
- KUHN, M.; KUENNE, R. **Anefficient algorithm for the numerical solutions of the generalized weber problem in spatial economics**. Regional Science. v.4, n.2, p.21, 1962.
- LACHTERMACHER, Gerson. **Pesquisa Operacional na Teoria de Decisões**. Rio de Janeiro: Campus. 2002.
- LAPORTE, G. **Modelling and SOLVING Several Classes of Arc Problens as Travelling Salesman Problens**. Computers & Operations Research. v.24, n.11, p. 1057-1061, 1997.
- LARSEN, A. **The Dinamic Vehicle Routing Problem**. Lyngby, IMM-PHD. 2001.
- MACKAY, A. G. **The packing of three-dimensional spheres on the surface of a four dimensional hipersphere**. J. Phis. A. Math. Gen. v.13, p. 3373-3379, 1980.
- NOGUEIRA, F. M. A. **Programação Linear**. Departamento de Engenharia de Produção. Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: [www.engprod.ufjf.br/fernando/epd015/programa%E7%E3o\\_linear.pdf](http://www.engprod.ufjf.br/fernando/epd015/programa%E7%E3o_linear.pdf) . Acesso em 12/05/07.
- NOVAES, A. G. **Logistics Districting With Multiplicatively Weithted Voronoi Diagrams**. In: Congresso Panamericano de Ingenieria de Tránsito y Transporte. 11, 2000, Gramado. Anais, ANPET, nov. 2000.
- NOVAES, A. G.; CURSI, J. E. S.; GRACIOLLI, O. D. **A Continuous Approach to the Design of Physical Distributions Systems**. Computers Operations Research. 2000.
- PAGE, E. **Tables of Waiting Times for M/M/n, M/D/n and D/M/n and their Use to Give Approximate Waiting Times in More General Queues**. Journal of the Operational Research Society. v.33, n.5, p.453, 1982.
- RABUSKE, M. A. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Florianópolis: UFSC, 1992.
- ROSING, K. E. Na **Optimal Method for Solving the (generalized) Multi-Weber Problem**. European Journal of Operational Research. v.58, p.414-426, 1992.

- SAMPAIO, R. N.; YANASSE, H. H. **Estudo e Implementação de Algoritmos de Roteamento Sobre Grafos em um Sistema de Informação Geográficas**. 2005. Disponível em: <<http://www.arxiv.org/ftp/cs/papers/0505/050531.pdf>> Acesso em 16/10/06.
- SHIODE, S.; ISHII, H.; NISHIDA, T. **A Minimax Location Problem For Ambulance Service Station**. Math Japonica. v.37, n.3, p.499-502, 1992.
- SHOR, N. Z. **Minimization Methods for Nondifferentiable Functions**. Lecture Notes in Computat Math. New York: Springer Verlag, 1985.
- TARNAI, T.; GÁSPÁR, Zs. **Improved packing of equal circles on a sphere and rigidity of its graph**. Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc. v.93, p.191-218, 1982.
- \_\_\_\_\_. **Covering a sphere by equal circles and the rigidity of its graph**. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. v.110, n.1, p.71-89, 1991.
- WAGNER, Harvey M. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1986.

## **APÊNDICES**

APÊNDICE A - Cálculo da freqüência (absoluta) de observações para a Estação CIC.

tempos	cic	p(x)	p(x)		
1	5	0.040137	0.00902		
2	5	0.040137	0.00902		
3	6	0.076662	0.01723		
4	6	0.076662	0.01723		
5	6	0.076662	0.01723		
6	7	0.128544	0.02888		
7	7	0.128544	0.02888		
8	7	0.128544	0.02888		
9	7	0.128544	0.02888		
10	8	0.194246	0.04365		
11	8	0.194246	0.04365		
12	8	0.194246	0.04365		
13	8	0.194246	0.04365		
14	8	0.194246	0.04365		
15	9	0.270127	0.0607		
16	9	0.270127	0.0607		
17	9	0.270127	0.0607		
18	10	0.35153	0.07899		
19	10	0.35153	0.07899		
20	10	0.35153	0.07899		
21	10	0.35153	0.07899		
22	10	0.35153	0.07899		
23	10	0.35153	0.07899		
24	10	0.35153	0.07899		
25	10	0.35153	0.07899		
26	10	0.35153	0.07899		
27	11	0.433845	0.09749		
28	11	0.433845	0.09749		
29	11	0.433845	0.09749		
30	11	0.433845	0.09749		
31	11	0.433845	0.09749		
32	11	0.433845	0.09749		
33	12	0.513239	0.11533		
34	12	0.513239	0.11533		
35	12	0.513239	0.11533		
36	12	0.513239	0.11533		
37	13	0.586971	0.13189		
38	13	0.586971	0.13189		
39	14	0.653403	0.14682		
40	14	0.653403	0.14682		
41	14	0.653403	0.14682		
42	14	0.653403	0.14682		
43	14	0.653403	0.14682		
44	15	0.711828	0.15995		
45	15	0.711828	0.15995		

46	15	0.711828	0.15995		
47	16	0.762227	0.17127		
48	18	0.840947	0.18896		
49	18	0.840947	0.18896		
50	18	0.840947	0.18896		
51	19	0.87078	0.19567		
52	19	0.87078	0.19567		
53	20	0.895368	0.20119		
54	20	0.895368	0.20119		
55	21	0.915506	0.20572		
56	21	0.915506	0.20572		
57	23	0.945234	0.2124		
58	25	0.964704	0.21677		
59	26	0.971705	0.21834		
60	34	0.995255	0.22364		
v médio=	12.76667				
			chamadas		p(x)
	0		2	0	0.0004087
	0.084746		2	0.0338983	0.0004087
	0.20339		2	0.0677966	0.0004087
	0.305085		3	0.1525424	0.0014549
	0.40678		3	0.2033898	0.0014549
	0.59322		3	0.2542373	0.0014549
	0.711864		3	0.3050847	0.0014549
	0.830508		3	0.3559322	0.0014549
	0.949153		3	0.4067797	0.0014549
	1.220339		3	0.4576271	0.0014549
	1.355932		4	0.6779661	0.0040116
	1.491525		4	0.7457627	0.0040116
	1.627119		4	0.8135593	0.0040116
	1.762712		4	0.8813559	0.0040116
	2.135593		4	0.9491525	0.0040116
	2.288136		4	1.0169492	0.0040116
	2.440678		4	1.0847458	0.0040116
	2.881356		5	1.440678	0.0090189
	3.050847		5	1.5254237	0.0090189
	3.220339		5	1.6101695	0.0090189
	3.389831		5	1.6949153	0.0090189
	3.559322		5	1.779661	0.0090189
	3.728814		5	1.8644068	0.0090189
	3.898305		5	1.9491525	0.0090189
	4.067797		5	2.0338983	0.0090189
	4.237288		5	2.1186441	0.0090189
	4.847458		5	2.2033898	0.0090189
	5.033898		5	2.2881356	0.0090189
	5.220339		5	2.3728814	0.0090189

	5.40678		5	2.4576271	0.0090189
	5.59322		5	2.5423729	0.0090189
	5.779661		5	2.6271186	0.0090189
	6.508475		6	3.2542373	0.017226
	6.711864		6	3.3559322	0.017226
	6.915254		6	3.4576271	0.017226
	7.118644		6	3.559322	0.017226
	7.932203		6	3.6610169	0.017226
	8.152542		6	3.7627119	0.017226
	9.016949		6	3.8644068	0.017226
	9.254237		6	3.9661017	0.017226
	9.491525		6	4.0677966	0.017226
	9.728814		7	4.8644068	0.0288841
	9.966102		7	4.9830508	0.0288841
	10.9322		7	5.1016949	0.0288841
	11.18644		7	5.220339	0.0288841
	11.44068		7	5.3389831	0.0288841
	12.47458		7	5.4576271	0.0288841
	14.33898		7	5.5762712	0.0288841
	14.64407		7	5.6949153	0.0288841
	14.94915		7	5.8135593	0.0288841
	16.10169		7	5.9322034	0.0288841
	16.42373		7	6.0508475	0.0288841
	17.62712		7	6.1694915	0.0288841
	17.9661		7	6.2881356	0.0288841
	19.22034		8	7.3220339	0.0436473
	19.57627		8	7.4576271	0.0436473
	21.83051		8	7.5932203	0.0436473
	24.15254		8	7.7288136	0.0436473
	25.55932		9	8.8474576	0.0606979
	34		12	12	0.1153256
somatorio	475.5424	v médio	5.4667	195.30508	1.0559158
lambida=	7.925706			3.2550847	
alfa=	4.450347			1.5054564	
euler=	0.577216			0.577216	
beta=	10.19785			4.5976932	
Vt=	28.38176			10.748917	
E(x)=	12.76667				
SD(x)=	5.704899				

APÊNDICE B- Resultados dos cálculos das probabilidades para a distribuição de Poisson.

x!		x	p(x)	p(x)ac	Fo(x)	Fo(x) ac	D
40320	1	8	0.02812	0.02812	0.0304	0.03	0.0023
40320	2	8	0.02812	0.05623	0.0304	0.06	0.0046
40320	3	8	0.02812	0.08435	0.0304	0.09	0.0069
40320	4	8	0.02812	0.11247	0.0304	0.12	0.0091
362880	5	9	0.04431	0.15678	0.0473	0.17	0.0121
362880	6	9	0.04431	0.20109	0.0473	0.22	0.0151
3628800	7	10	0.06285	0.26393	0.0663	0.28	0.0186
3628800	8	10	0.06285	0.32678	0.0663	0.35	0.0220
39916800	9	11	0.08103	0.40781	0.0844	0.43	0.0254
39916800	10	11	0.08103	0.48884	0.0844	0.52	0.0288
39916800	11	11	0.08103	0.56988	0.0844	0.60	0.0321
39916800	12	11	0.08103	0.65091	0.0844	0.69	0.0355
4.79E+08	13	12	0.09578	0.74669	0.0984	0.78	0.0381
4.79E+08	14	12	0.09578	0.84246	0.0984	0.88	0.0407
4.79E+08	15	12	0.09578	0.93824	0.0984	0.98	0.0434
4.79E+08	16	12	0.09578	1.03402	0.0984	1.08	0.0460
4.79E+08	17	12	0.09578	1.12979	0.0984	1.18	0.0486
4.79E+08	18	12	0.09578	1.22557	0.0984	1.28	0.0512
4.79E+08	19	12	0.09578	1.32134	0.0984	1.38	0.0539
4.79E+08	20	12	0.09578	1.41712	0.0984	1.47	0.0565
4.79E+08	21	12	0.09578	1.51290	0.0984	1.57	0.0591
4.79E+08	22	12	0.09578	1.60867	0.0984	1.67	0.0617
6.23E+09	23	13	0.10449	1.71317	0.1060	1.78	0.0632
6.23E+09	24	13	0.10449	1.81766	0.1060	1.88	0.0647
6.23E+09	25	13	0.10449	1.92216	0.1060	1.99	0.0662
6.23E+09	26	13	0.10449	2.02665	0.1060	2.09	0.0677
6.23E+09	27	13	0.10449	2.13115	0.1060	2.20	0.0693
6.23E+09	28	13	0.10449	2.23564	0.1060	2.31	0.0708
6.23E+09	29	13	0.10449	2.34014	0.1060	2.41	0.0723
6.23E+09	30	13	0.10449	2.44463	0.1060	2.52	0.0738
6.23E+09	31	13	0.10449	2.54913	0.1060	2.62	0.0753
8.72E+10	32	14	0.10586	2.65499	0.1060	2.73	0.0754
8.72E+10	33	14	0.10586	2.76085	0.1060	2.84	0.0755
8.72E+10	34	14	0.10586	2.86671	0.1060	2.94	0.0757
1.31E+12	35	15	0.10010	2.96681	0.0989	3.04	0.0745
1.31E+12	36	15	0.10010	3.06691	0.0989	3.14	0.0733
1.31E+12	37	15	0.10010	3.16701	0.0989	3.24	0.0721
2.09E+13	38	16	0.08873	3.25575	0.0866	3.33	0.0700
2.09E+13	39	16	0.08873	3.34448	0.0866	3.41	0.0678

2.09E+13	40	16	0.08873	3.43321	0.0866	3.50	0.0657
2.09E+13	41	16	0.08873	3.52195	0.0866	3.59	0.0636
2.09E+13	42	16	0.08873	3.61068	0.0866	3.67	0.0614
3.56E+14	43	17	0.07403	3.68471	0.0713	3.74	0.0587
3.56E+14	44	17	0.07403	3.75875	0.0713	3.81	0.0560
3.56E+14	45	17	0.07403	3.83278	0.0713	3.89	0.0532
3.56E+14	46	17	0.07403	3.90681	0.0713	3.96	0.0505
3.56E+14	47	17	0.07403	3.98084	0.0713	4.03	0.0478
6.4E+15	48	18	0.05833	4.03918	0.0554	4.08	0.0448
6.4E+15	49	18	0.05833	4.09751	0.0554	4.14	0.0419
6.4E+15	50	18	0.05833	4.15584	0.0554	4.19	0.0390
6.4E+15	51	18	0.05833	4.21418	0.0554	4.25	0.0360
1.22E+17	52	19	0.04355	4.25773	0.0409	4.29	0.0334
1.22E+17	53	19	0.04355	4.30127	0.0409	4.33	0.0307
1.22E+17	54	19	0.04355	4.34482	0.0409	4.37	0.0281
1.22E+17	55	19	0.04355	4.38836	0.0409	4.41	0.0254
1.22E+17	56	19	0.04355	4.43191	0.0409	4.45	0.0228
2.43E+18	57	20	0.03088	4.46279	0.0286	4.48	0.0205
2.43E+18	58	20	0.03088	4.49367	0.0286	4.51	0.0182
2.43E+18	59	20	0.03088	4.52455	0.0286	4.54	0.0159
5.11E+19	60	21	0.02086	4.54541	0.0191	4.56	0.0142
		14.18333					

lambda	14.18	n=	60	e=	2.718282	
p(x)=						
				p=	0.175575	
				D=	0.0757	
				D<p	é distrib de Poisson	



APÊNDICE C- Programa 01 para determinação dos parâmetros dos diferentes sistemas de filas.

```

PROGRAMA FILTAHA;{ xlam-coeficiente lam;
    xmu-coeficiente mu;
    c-número dos servidores;
    xn-número máximo das demandas na fila;
    xk- número limite}
uses crt,dos;
label 5,210,350,60,30,25,20,150,160,50,51,
    56,80,70,75,120,115,100,145,110,117,
    95,155,45,240,220,230,205,250,500;
type mas1=array[1..1000] of real;
var i,j,nc,n,k,nn,it,max,ll,c,xn,xk,m:integer;
    xlam,xmu,rho,elam,rc,pz,ptol,ql,r,x,sl,ws,wq,
    srho,src:real;
    p,cp:mas1;
    filath:text;
    {PROGRAMA PRINCIPAL}
begin
    clrscr;
    assign(filath,'filath');
rewrite(filath);
m:=1000;
ptol:=0.00001;
        xlam:= 10.75000;
        xmu:= 50.74000;
        c:=1;
        xn:=9999;
        xk:=9999;
    nc:=c;
    n:=xn;
    k:=xk;
    it:=1;

```

```

nn:=m;
if n<nn then nn:=n;
if k<nn then nn:=k;
writeln(filath,'-----');
writeln(filath,'  Dados iniciais');
writeln(filath,'lam=',xlam:10:5,' mu=',xmu:10:5,' c=',c:5);
writeln(filath,' N=',xn:8,'  K=',xk:8);
writeln(filath,'-----');
writeln(filath,'-----');
writeln(filath,'  Dados dos cálculos');
  for i:=1 to nn do begin
    p[i]:=0.0;
  end;
  if (xlam*xmu=0.0) then goto 210;
  rho:=xlam/xmu;
  elam:=xlam;
  writeln(filath,'(M/M',nc:2,')',(GD',n:3,','k:3,')');
  if (k<9999) and (k>m) and (n>m) then goto 350;
  rc:=rho/nc;
  if (nc>1) then goto 60;
  if (k<9999) then goto 30;
  if (rho>=1) and (n=9999) then goto 350;
      { (M/M/1):(GD/*/*) }
  if (rho=1.0) then goto 25;
  pz:=1.0-rho;
      { (M/M/1):(GD/N/*) }

  srho:=1;
  for i:=1 to n+1 do begin
    if (srho>9999) then goto 5;
    srho:=srho*rho;
  end;
5:  if (n<9999) then pz:=pz/(1.0-srho);
    p[1]:=pz*rho;
    for i:=2 to nn do begin

```

```

    p[i]:=p[i-1]*rho;
    if (p[i]<ptol) then begin
      if (it=0) then goto 150;
      goto 20;
    end;
    it:=0;
20:   it:=it;
      end;
      i:=nn+1;
      goto 150;
25:   pz:=1.0/(n+1);
      for i:=1 to n do begin
        p[i]:=pz;
      end;
      i:=n+1;
      elam:=xlam*pz*n;
      ql:=n/2.0-elam/xmu;
      goto 160;

                                     { (M/M/1):(GD/K/K) }
30:   p[1]:=k*rho;
      pz:=1.0+p[1];
      for i:=2 to nn do begin
        p[i]:=p[i-1]*rho*(k-i+1);
        pz:=pz+p[i];
      end;
45:   pz:=1.0/pz;
      for i:=1 to nn do begin
        p[i]:=pz*p[i];
        if (p[i]<ptol) then begin
          if (it=0) then goto 51;
          goto 50;
        end;
        it:=0;
50:   it:=it;

```

```

end;
i:=nn+1;
51:  ll:=i-1;
     ql:=0.0;
     for j:=nc to ll do begin
       ql:=ql+p[j]*(j-nc);
     end;
     r:=nc*pz;
     if (i>=nc) then goto 56;
     for j:=i to nc do begin
       p[j]:=0.0;
     end;
56:  for j:=1 to nc do begin
     r:=r+p[j]*(nc-j);
     end;
     elam:=xmu*(nc-r);
     goto 160;
60:  if (nc<9999) then goto 80;
           { (M/M/):(GD/*/*) }
pz:=exp(-rho);
p[1]:=pz*rho;
for i:=2 to nn do begin
  p[i]:=p[i-1]*rho/i;
  if (p[i]<ptol) then begin
    if (it=0) then goto 75;
    goto 70;
  end;
  it:=0;
70:  it:=it;
     end;
     i:=nn+1;
75:  ql:=0.0;
     goto 160;
80:  pz:=1.0;

```

```

if (k<9999) then goto 120;
if (rc>=1.0) and (n=9999) then goto 350;
      { (M/M/C):(GD/*/*) }

p[1]:=rho;
for i:=2 to nc do begin
  p[i]:=p[i-1]*rho/i;
  pz:=pz+p[i-1];
end;
if (rc=1.0) then goto 115;
x:=p[nc]/(1.0-rc);
      { (M/M/C):(GD/N/*) }

src:=1;
for i:=1 to n-nc+1 do begin
  src:=src*rc;
end;
if (n<9999) then x:=x*(1.0-src);
95:  pz:=pz+x;
    pz:=1.0/pz;
    for i:=1 to nc do begin
      p[i]:=pz*p[i];
      if (p[i]<ptol) then begin
        if (it=0) then goto 145;
        goto 100;
      end;
      it:=0;
100:  it:=it;
      end;
      for i:=nc to nn do begin
        p[i]:=p[i-1]*rc;
        if (p[i]<ptol) then begin
          if (it=0) then goto 150;
          goto 110;
        end;
        it:=0;

```

```

110:  it:=it;
      end;
      i:=nn+1;
      if (rc=1.0) then goto 117;
      goto 150;
115:  x:=p[nc]*(n-nc+1);
      goto 95;
117:  ql:=p[nc]*(n-nc)*(n-nc+1)/2;
      goto 155;
                                     { (M/M/R):(GD/K/K) }
120:  p[1]:=k*rho;
      for i:=2 to nc do begin
        p[i]:=p[i-1]*rho*(k-i+1)/i;
        pz:=pz+p[i-1];
      end;
      for i:=nc to nn do begin
        p[i]:=p[i-1]*rc*(k-i+1);
        pz:=pz+p[i];
      end;
      goto 45;
145:  p[nc]:=0.0;
150:  ql:=rc*p[nc]/((1.0-rc)*(1.0-rc));
      if (n=9999) then goto 160;
          src:=1.0;
          for i:=1 to n-nc do begin
            src:=src*rc;
          end;
          ql:=ql*(1.0-src-(n-nc)*src*(1.0-rc));
155:  elam:=xlam*(1.0-p[nn]);
160:  sl:=ql+elam/xmu;
      ws:=sl/elam;
      wq:=ql/elam;
      writeln(filath,'lam=',xlam:10:5,'    lam    eff=',elam:10:5,'    mu=',xmu:10:5,'
rho=',rho:10:5);

```

```

writeln(filath,'ws=',ws:10:5,' wq=',wq:10:5,' ls=',sl:10:5,' lq=',ql:10:5);
205:  max:=i-1;
      cp[1]:=pz+p[1];
      for i:=2 to max do begin
        cp[i]:=cp[i-1]+p[i];
      end;
      writeln(filath,'values de P(n) para n=0 até,máx:4,' otherwise P(n) < 0.00001');
      writeln(filath,' P(0)=' ,pz:10:5);
      for i:=1 to max do begin
        writeln(filath,'i=',i:2,' , P[' ,i:2,']=',p[i]:10:5);
      end;
      writeln(filath,'comulative values de P(n)');
      writeln(filath,' P(0)=' ,pz:10:5);
      for i:=1 to max do begin
        writeln(filath,'i=',i:2,' , CP[' ,i:2,']=',cp[i]:10:5);
      end;
      goto 500;
210:  if (xmu=0.0) then goto 240;
          { PURE DEATH MODEL }
      writeln(filath,' PURE DEATH MODEL  mu*t=' ,xmu:10:5,' n=' ,nn:5);
      p[nn]:=exp(-xmu);
      pz:=p[nn];
      ll:=nn-1;
      for i:=1 to ll do begin
        p[nn-i]:=p[nn-i+1]*xmu/i;
        pz:=pz+p[nn-i];
        if (p[nn-i]<ptol) then begin
          if (it=0) then goto 230;
          goto 220;
        end;
        it:=0;
220:  it:=it;
      end;
230:  pz:=1.0-pz;

```

```

i:=nn+1;
goto 205;
                { PURE BIRTH MODEL }
240:  writeln(filath,' PURE BIRTH MODEL  lam*t=',xlam:10:5);
      pz:=exp(-xlam);
      p[1]:=pz*xlam;
      for i:=2 to nn do begin
        p[i]:=p[i-1]*xlam/i;
        if (p[i]<ptol) then begin
          if (it=0) then goto 205;
          goto 250;
        end;
        it:=0;
250:  it:=it;
      end;
      i:=nn+1;
      goto 205;
                { INVALID INPUT DATA}
350:  writeln(filath,'lam=',xlam:10:5,' lam  eff=',elam:10:5,' mu=',xmu:10:5,'
rho=',rho:10:5);
      writeln(filath,'INVALID DATA ');
      goto 500;
500:  close(filath);
      end.

```



## APÊNDICE D- Resultados das probabilidades

---

### Dados iniciais

lam= 10.75000 mu= 50.74000 c= 1

N= 9999 K= 9999

---

### Dados dos cálculos

(M/M/ 1):(GD/9999/9999)

lam= 10.75000 lam eff= 10.75000 mu= 50.74000 rho= 0.21186

ws= 0.02501 wq= 0.00530 ls= 0.26882 lq= 0.05695

values de P(n) para n=0 ate 7 otherwise P(n) < 0.00001

P(0)= 0.78814

i= 1, P[ 1]= 0.16698

i= 2, P[ 2]= 0.03538

i= 3, P[ 3]= 0.00750

i= 4, P[ 4]= 0.00159

i= 5, P[ 5]= 0.00034

i= 6, P[ 6]= 0.00007

i= 7, P[ 7]= 0.00002

comulative values de P(n)

P(0)= 0.78814

i= 1, CP[ 1]= 0.95511

i= 2, CP[ 2]= 0.99049

i= 3, CP[ 3]= 0.99799

i= 4, CP[ 4]= 0.99957

i= 5, CP[ 5]= 0.99991

i= 6, CP[ 6]= 0.99998

i= 7, CP[ 7]= 1.00000

## APÊNDICE E- Algumas chamadas de emergência com horários de atendimentos.

Endereço	Posto	Hora saída	Hora chegada
Estados Unidos s/nº Rua Joviano do Rosário	Pilarzinho	00:04	00:11
Amador Bueno próx. a igreja	B. Alto	01:05	01:12
Hipólito César Sobrinho próx. Creche Uberaba	Boqueirão	01:54	02:03
Jovenílson Américo de Oliveira, 273	Ceasa	02:30	02:40
Joaquim Theodoro Portugal próx. Rua Omar Pidet	Boqueirão	03:26	03:31
Av. Manoel Ribas	Sta. Felicidade	04:37	04:45
Desembargador Otávio do Amaral esq. Pe. Agostinho	Central	04:48	04:58
P. Carlos Cavalcanti próx. Panificadora América	Central	05:00	05:08
Rodovia BR 476 próx. a emp. Milli	Ceasa	07:20	07:28
Guilherme Afonso Martins próx. Chácara Milano	B. Alto	07:34	07:50
Em frente ao Hospital Vita	Central	07:44	07:47
Av. Anita Garibaldi, 604	Pilarzinho	08:00	08:10
Estephano Reva c/ esq. Antonio Escarsin	Sta. Felicidade	08:00	08:05
João Laerte Bochmia esq. Isaac Ferreira da Luz	B. Novo	09:55	10:00
Av. Silva Jardim esq. Brigadeiro Franco	Central	10:35	10:38
Jornalista Caio Machado esq. Coronel Airton Plaissant	Portão	10:50	10:56
Estados Unidos s/nº Rua Joviano do Rosário	Pilarzinho	00:04	00:11
Amador Bueno próx. a igreja	B. Alto	01:05	01:12
Hipólito César Sobrinho próx. Creche Uberaba	Boqueirão	01:54	02:03
Jovenílson Américo de Oliveira, 273	Ceasa	02:30	02:40
Joaquim Theodoro Portugal próx. Rua Omar Pidet	Boqueirão	03:26	03:31
Av. Manoel Ribas	Sta. Felicidade	04:37	04:45
Desembargador Otávio do Amaral esq. Pe. Agostinho	Central	04:48	04:58
P. Carlos Cavalcanti próx. Panificadora América	Central	05:00	05:08
Rodovia BR 476 próx. a emp. Milli	Ceasa	07:20	07:28
Guilherme Afonso Martins próx. Chácara Milano	B. Alto	07:34	07:50
Em frente ao Hospital Vita	Central	07:44	07:47
Av. Anita Garibaldi, 604	Pilarzinho	08:00	08:10
Estephano Reva c/ esq. Antonio Escarsin	Sta. Felicidade	08:00	08:05

APÊNDICE F- Programa 02 para determinação do número de ambulâncias.

```

PROGRAMA FILATAH2;{ t0- ;
    xlam-coeficiente lam;
    xmu-coeficiente mu;
    c-número dos servidores;
    xn-número máximo das demandas na fila;
    xk- número limite}

uses crt,dos;
label 1,2,3,5,210,350,60,30,25,20,150,160,50,51,
    56,80,70,75,120,115,100,145,110,117,
    95,155,45,240,220,230,205,250,500,550;
type mas1=array[1..1000] of real;
var i,j,nc,n,k,nn,it,max,ll,c,xn,xk,m:integer;
    xlam,xmu,rho,elam,rc,pz,ptol,ql,r,x,sl,ws,wq,
    srho,src,t0,sr,vc,fc,tesp:real;
    p,cp:mas1;
    filath2:text;
    {PROGRAMA PRINCIPAL}
begin
    clrscr;
    assign(filath2,'filath2');
    rewrite(filath2);
    m:=1000;
    ptol:=0.00001;
        t0:=0.0007;
        xlam:= 10.75000;
        xmu:= 50.74000;
        c:=1;
1:        xn:=9999;
        xk:=9999;

        nc:=c;
        n:=xn;
        k:=xk;

```

```

        it:=1;
nn:=m;
if n<nn then nn:=n;
if k<nn then nn:=k;
writeln(filath2,'-----');
writeln(filath2,'  Dados iniciais');
writeln(filath2,'lam=',xlam:10:5,' mu=',xmu:10:5,' c=',c:2,' t0=',t0:10:5);
writeln(filath2,' N=',xn:8,'  K=',xk:8);
writeln(filath2,'-----');
writeln(filath2,'-----');
writeln(filath2,'  Dados dos cálculos');
  for i:=1 to nn do begin
    p[i]:=0.0;
  end;
  if (xlam*xmu=0.0) then goto 210;
  rho:=xlam/xmu;
  elam:=xlam;
  writeln(filath2,'(M/M',nc:2,')',':(GD',n:3,',',k:3,')');
  if (k<9999) and (k>m) and (n>m) then goto 350;
  rc:=rho/nc;
  if (nc>1) then goto 60;
  if (k<9999) then goto 30;
  if (rho>=1) and (n=9999) then goto 350;
      { (M/M/1):(GD/*/*) }
  if (rho=1.0) then goto 25;
  pz:=1.0-rho;
      { (M/M/1):(GD/N/*) }

  srho:=1;
  for i:=1 to n+1 do begin
    if (srho>9999) then goto 5;
    srho:=srho*rho;
  end;
5:  if (n<9999) then pz:=pz/(1.0-srho);
    p[1]:=pz*rho;

```

```

for i:=2 to nn do begin
  p[i]:=p[i-1]*rho;
  if (p[i]<ptol) then begin
    if (it=0) then goto 150;
    goto 20;
  end;
  it:=0;
20:  it:=it;
    end;
    i:=nn+1;
    goto 150;
25:  pz:=1.0/(n+1);
    for i:=1 to n do begin
      p[i]:=pz;
    end;
    i:=n+1;
    elam:=xlam*pz*n;
    ql:=n/2.0-elam/xmu;
    goto 160;

                                { (M/M/1):(GD/K/K) }
30:  p[1]:=k*rho;
    pz:=1.0+p[1];
    for i:=2 to nn do begin
      p[i]:=p[i-1]*rho*(k-i+1);
      pz:=pz+p[i];
    end;
45:  pz:=1.0/pz;
    for i:=1 to nn do begin
      p[i]:=pz*p[i];
      if (p[i]<ptol) then begin
        if (it=0) then goto 51;
        goto 50;
      end;
      it:=0;

```

```

50:  it:=it;
      end;
      i:=nn+1;
51:  ll:=i-1;
      ql:=0.0;
      for j:=nc to ll do begin
        ql:=ql+p[j]*(j-nc);
      end;
      r:=nc*pz;
      if (i>=nc) then goto 56;
      for j:=i to nc do begin
        p[j]:=0.0;
      end;
56:  for j:=1 to nc do begin
      r:=r+p[j]*(nc-j);
    end;
      elam:=xmu*(nc-r);
      goto 160;
60:  if (nc<9999) then goto 80;
           { (M/M/):(GD/*/*) }

      pz:=exp(-rho);
      p[1]:=pz*rho;
      for i:=2 to nn do begin
        p[i]:=p[i-1]*rho/i;
        if (p[i]<ptol) then begin
          if (it=0) then goto 75;
          goto 70;
        end;
      end;
      it:=0;
70:  it:=it;
      end;
      i:=nn+1;
75:  ql:=0.0;
      goto 160;

```

```

80:  pz:=1.0;
      if (k<9999) then goto 120;
      if (rc>=1.0) and (n=9999) then goto 350;
          { (M/M/C):(GD/*/*) }

p[1]:=rho;
for i:=2 to nc do begin
p[i]:=p[i-1]*rho/i;
pz:=pz+p[i-1];
end;
if (rc=1.0) then goto 115;
x:=p[nc]/(1.0-rc);
          { (M/M/C):(GD/N/*) }

src:=1;
for i:=1 to n-nc+1 do begin
src:=src*rc;
end;
if (n<9999) then x:=x*(1.0-src);
95:  pz:=pz+x;
      pz:=1.0/pz;
      for i:=1 to nc do begin
          p[i]:=pz*p[i];
          if (p[i]<ptol) then begin
              if (it=0) then goto 145;
              goto 100;
          end;
          it:=0;
100:  it:=it;
      end;
      for i:=nc to nn do begin
          p[i]:=p[i-1]*rc;
          if (p[i]<ptol) then begin
              if (it=0) then goto 150;
              goto 110;
          end;

```

```

        it:=0;
110:   it:=it;
        end;
        i:=nn+1;
        if (rc=1.0) then goto 117;
        goto 150;
115:   x:=p[nc]*(n-nc+1);
        goto 95;
117:   ql:=p[nc]*(n-nc)*(n-nc+1)/2;
        goto 155;

                                { (M/M/R):(GD/K/K) }

120:   p[1]:=k*rho;
        for i:=2 to nc do begin
            p[i]:=p[i-1]*rho*(k-i+1)/i;
            pz:=pz+p[i-1];
        end;
        for i:=nc to nn do begin
            p[i]:=p[i-1]*rc*(k-i+1);
            pz:=pz+p[i];
        end;
        goto 45;
145:   p[nc]:=0.0;
150:   ql:=rc*p[nc]/((1.0-rc)*(1.0-rc));
        if (n=9999) then goto 160;
            src:=1.0;
            for i:=1 to n-nc do begin
                src:=src*rc;
            end;
            ql:=ql*(1.0-src-(n-nc)*src*(1.0-rc));
155:   elam:=xlam*(1.0-p[nn]);
160:   sl:=ql+elam/xmu;
        ws:=sl/elam;
        wq:=ql/elam;

```



```

        writeln(filath2,'lam=',xlam:10:5,' lam    eff=',elam:10:5,' mu=',xmu:10:5,'
rho=',rho:10:5);
        writeln(filath2,'ws=',ws:10:5,' wq=',wq:10:5,' ls=',sl:10:5,' lq=',ql:10:5);
205:   max:=i-1;
        cp[1]:=pz+p[1];
        for i:=2 to max do begin
        cp[i]:=cp[i-1]+p[i];
        end;
        writeln(filath2,'values de P(n) para n=0 ate',max:4,' otherwise P(n) < 0.00001');
        writeln(filath2,' P(0)=',pz:10:5);
        for i:=1 to max do begin
        writeln(filath2,'i=',i:2,' P['',i:2,']=',p[i]:10:5);

        writeln(filath2,'comulative values de P(n)');
        writeln(filath2,' P(0)=',pz:10:5);
        for i:=1 to max do begin
        writeln(filath2,'i=',i:2,' CP['',i:2,']=',cp[i]:10:5);
        end;
        goto 500;
210:   if (xmu=0.0) then goto 240;
            { PURE DEATH MODEL}
        writeln(filath2,' PURE DEATH MODEL mu*t=',xmu:10:5,' n=',nn:5);
        p[nn]:=exp(-xmu);
        pz:=p[nn];
        ll:=nn-1;
        for i:=1 to ll do begin
        p[nn-i]:=p[nn-i+1]*xmu/i;
        pz:=pz+p[nn-i];
        if (p[nn-i]<ptol) then begin
        if (it=0) then goto 230;
        goto 220;
        end;
        it:=0;
220:   it:=it;

```

```

end;
230:  pz:=1.0-pz;
      i:=nn+1;
      goto 205;
      { PURE BIRTH MODEL }
240:  writeln(filath2,' PURE BIRTH MODEL  lam*t=',xlam:10:5);
      pz:=exp(-xlam);
      p[1]:=pz*xlam;
      for i:=2 to nn do begin
        p[i]:=p[i-1]*xlam/i;
        if (p[i]<ptol) then begin
          if (it=0) then goto 205;
          goto 250;
        end;
        it:=0;
250:  it:=it;
      end;
      i:=nn+1;
      goto 205;
      { INVALID INPUT DATA}
350:  writeln(filath2,'lam=',xlam:10:5,' lam  eff=',elam:10:5,' mu=',xmu:10:5,'
rho=',rho:10:5);
      writeln(filath2,'INVALID DATA ');
      goto 500;
500:  sr:=1;
      for i:=1 to c+1 do begin
        sr:=sr*rho;
      end;
      vc:=c-1;
      fc:=1;
      if vc=0 then goto 2;
      for i:=1 to c-1 do begin
        fc:=fc*i;
      end;

```

```

    if c=1 then begin
    tesp:=xlam/(xmu*(xmu-xlam));
    goto 3;
    end;
2:    tesp:=sr*pz/(fc*(c-rho)*(c-rho)*xlam);
3:    if tesp<=t0 then goto 550;
    c:=c+1;
    if c<10 then goto 1;
550:  writeln(filath2,'-----');
    writeln(filath2,'-----');
    writeln(filath2,'      Número de servidores = ',c:2);
    writeln(filath2,'-----');
    writeln(filath2,'-----');
    close(filath2);
    end.

```

APÊNDICE G- Resultados do número de servidores para um minuto.

-----  
 Dados iniciais

lam= 10.75000 mu= 50.74000 c= 1 t0=0.00069

N= 9999 K= 9999  
 -----

Dados dos cálculos

(M/M/ 1):(GD/9999/9999)

lam= 10.75000 lam eff= 10.75000 mu= 50.74000 rho= 0.21186

ws= 0.02501 wq= 0.00530 ls= 0.26882 lq= 0.05695

values de P(n) para n=0 ate 7 otherwise P(n) < 0.00001

P(0)= 0.78814

i= 1, P[ 1]= 0.16698

i= 2, P[ 2]= 0.03538

i= 3, P[ 3]= 0.00750

i= 4, P[ 4]= 0.00159

i= 5, P[ 5]= 0.00034

i= 6, P[ 6]= 0.00007

i= 7, P[ 7]= 0.00002

comulative values de P(n)

P(0)= 0.78814

i= 1, CP[ 1]= 0.95511

i= 2, CP[ 2]= 0.99049

i= 3, CP[ 3]= 0.99799

i= 4, CP[ 4]= 0.99957

i= 5, CP[ 5]= 0.99991

i= 6, CP[ 6]= 0.99998

i= 7, CP[ 7]= 1.00000  
 -----

Dados iniciais

lam= 10.75000 mu= 50.74000 c= 2 t0=0.00069

N= 9999 K= 9999  
 -----

Dados dos cálculos

(M/M/ 2):(GD/9999/9999)

lam= 10.75000 lam eff= 10.75000 mu= 50.74000 rho= 0.21186

ws= 0.01993 wq= 0.00022 ls= 0.21427 lq= 0.00240

values de P(n) para n=0 ate 5 otherwise P(n) < 0.00001

P(0)= 0.80843

i= 1, P[ 1]= 0.17128

i= 2, P[ 2]= 0.01814

i= 3, P[ 3]= 0.00192

i= 4, P[ 4]= 0.00020

i= 5, P[ 5]= 0.00002

comulative values de P(n)

P(0)= 0.80843

i= 1, CP[ 1]= 0.97971

i= 2, CP[ 2]= 0.99785

i= 3, CP[ 3]= 0.99977

i= 4, CP[ 4]= 0.99998

i= 5, CP[ 5]= 1.00000

---

Numero dos servidores = 2

APÊNDICE H- Resultados do número de servidores para oito minutos.

-----  
 Dados iniciais

lam= 10.75000 mu= 50.74000 c= 1 t0=0.00550

N= 9999 K= 9999  
 -----

Dados dos cálculos

(M/M/ 1):(GD/9999/9999)

lam= 10.75000 lam eff= 10.75000 mu= 50.74000 rho= 0.21186

ws= 0.02501 wq= 0.00530 ls= 0.26882 lq= 0.05695

values de P(n) para n=0 ate 7 otherwise P(n) < 0.00001

P(0)= 0.78814

i= 1, P[ 1]= 0.16698

i= 2, P[ 2]= 0.03538

i= 3, P[ 3]= 0.00750

i= 4, P[ 4]= 0.00159

i= 5, P[ 5]= 0.00034

i= 6, P[ 6]= 0.00007

i= 7, P[ 7]= 0.00002

comulative values de P(n)

P(0)= 0.78814

i= 1, CP[ 1]= 0.95511

i= 2, CP[ 2]= 0.99049

i= 3, CP[ 3]= 0.99799

i= 4, CP[ 4]= 0.99957

i= 5, CP[ 5]= 0.99991

i= 6, CP[ 6]= 0.99998

i= 7, CP[ 7]= 1.00000  
 -----

Numero dos servidores = 1

## APÊNDICE I- Cálculos dos pesos para as estações de Curitiba.

chamadas de cada região		$c_i$	cálculo do peso de cada região		
			$v_i$	$w_i$	peso
851		$c_1$	3.5	6.71	3.2
606		$c_7$	1.6	6.74	5.1
413		$c_5$	0.1	2.87	2.8
405		$c_3$	0.0	2.63	2.6
328		$c_2$	-0.6	1.97	2.5
304		$c_9$	-0.7	2.4	3.1
260		$c_6$	-1.1	1.56	2.6
224		$c_8$	-1.4	1.56	2.9
201		$c_4$	-1.5	1.3	2.8
média	= 399				
		204203.57			
		42803.01			
		192.90			
		34.68			
		5056.79			
		9046.12			
		19351.90			
		30663.90			
		39248.01			
		350600.89			
		43825.11			
	desvio	= 209.34			
d=	128				







