Cálculo I (2015/1) – IM – UFRJ

Lista 4: Aplicações de Derivadas

Prof. Milton Lopes e Prof. Marco Cabral

Versão 01.05.2015

1 Exercícios de Aplicações da Derivada

1.1 Exercícios de Fixação

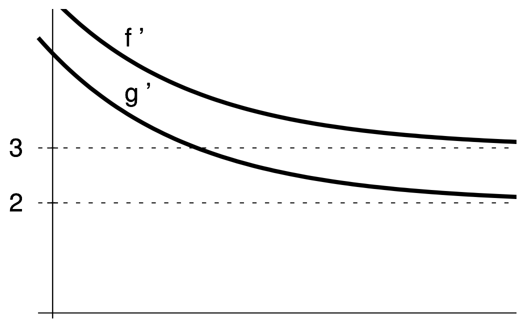
Fix 1.1: Suponha que $f(0) = 0$, f' é contínua e que $f'(0) = 5$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.

Fix 1.2: Vamos calcular o limite $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^x - e}$ aplicando L'Hospital duas vezes. Assim,

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^x - e} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{e^x} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^2}.$$

Na realidade o limite é zero. Qual o erro?

Fix 1.3: Determine $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ sabendo que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ e que os gráficos de f' e g' são dados na figura abaixo.



Fix 1.4: Sabe-se que $f'(2) = 4$ e que $f(2) = 5$. Aproxime: (a) $f(2.1)$; (b) $f(1.95)$.

Fix 1.5: Sabe-se que $p(x)$ é o polinômio do segundo grau que melhor aproxima $f(x) = \cos(x)$ perto do ponto $x = \pi$. Determine: (a) $p(\pi)$; (b) $p'(\pi)$; (c) $p''(\pi)$.

Fix 1.6: Determine se $x_0 = 0$ é (ou não é) máximo ou mínimo local das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1/10, & x = 0. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 100, & x = 0. \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$ (ver gráfico utilizando algum software).

Fix 1.7: Esboce o gráfico de uma função contínua para cada item abaixo que:

(a) tenha um máximo local em $x = -2$ e um mínimo local em $x = 1$;

(b) seja sempre crescente, mas até $x = -2$ com concavidade para cima e depois deste ponto com concavidade para baixo.

Fix 1.8: Considere uma $f : [-3, 3] :\to \mathbb{R}$ cujo quadro de sinais da função e das derivadas seja:

-2 $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2

f	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
f'	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f''	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Esboce o gráfico de $y = f(x)$.

Fix 1.9: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija.

(a) se $f''(x) > 0$ para todo $x \in [1,2]$ então f' é crescente em $[1,2]$.
(b) se $f''(x) > 0$ para todo $x \in [1,2]$ então f é possui concavidade para cima em $[1,2]$
(c) se $h(x) = C$ para todo $x \in [1,2]$ então h não possui nenhum ponto do máximo nem mínimo local.

Fix 1.10: Estude o TVE (Teorema do Valor Extremo de Weierstrass). Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija.
(a) Pelo TVE toda função contínua em $I = (-7, 100)$ possui um máximo em I.
(b) Pelo TVE toda função contínua em $I = [0, \infty)$ possui um mínimo em I.
(c) Pelo TVE toda função em $I = [2, 3]$ possui um mínimo em I.
(d) Pelo TVE toda função descontínua em $I = [2, 4]$ **não** possui máximo neste intervalo.
(e) Pelo TVE toda função contínua em intervalo **ilimitado** I **não** possui máximo em I.

Fix 1.11: Suponha que f é derivável em $\mathbb{R}$ e que f' se anula somente em 3 e 7.
(a) É verdade que existe $a \in [1, 10]$ tal que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in [1, 10]$? Porque?
(b) Explique como podemos determinar a.
(c) É verdade que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$? Porque?

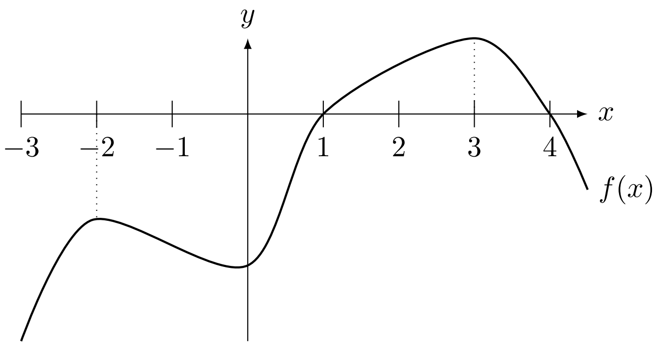
Fix 1.12: Sabendo f é contínua em $\mathbb{R}$ e que $f'(x) > 0$ para $x < 0$ e $f'(x) < 0$, para $x > 0$, determine (se for possível) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que
(a) $\displaystyle\min_{x\in[-5,-1]} f(x) = f(a)$; (b) $\displaystyle\max_{x\in[-2,3]} f(x) = f(b)$;
(c) $\displaystyle\min_{x\in[-1,2]} f(x) = f(c)$; (d) $\displaystyle\max_{x\in[2,5]} f(x) = f(d)$.

Fix 1.13: Considere $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine, caso existam, para cada intervalo I abaixo, $\displaystyle\max_{x\in I} f(x)$, $\displaystyle\min_{x\in I} f(x)$ e os pontos x_{max} e x_{min} onde são atingidos o máximo e o mínimo.
(a) $I = [2, 3]$; (b) $I = (0, 1]$; (c) $I = [-1, -4]$; (d) $I = [1, \infty)$; (e) $I = (-\infty, 0)$.

Fix 1.14: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija. Suponha que todas as funções possuem derivadas em todos os pontos.
(a) Se $x = 4$ é mínimo local de h então $h'(4) = 0$.
(b) Se $x = 2$ é o máximo de f no intervalo $[1, 4]$ então $f'(2) = 0$.
(c) Se $x = 1$ é o mínimo de f no intervalo $[1, 4]$ então $f'(1) = 0$.
(d) Se $g'(3) = 0$ então $x = 3$ é o mínimo ou máximo local de g.

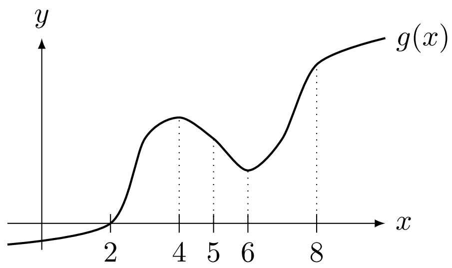
Fix 1.15: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija.
Sabendo que f e f' é derivável em I e $a, b, c \in I$:
(a) $f'(b) = 0$ e $f''(b) = -1$ então b é ponto de máximo local.
(b) $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$ então c é **não** é ponto de máximo nem mínimo de f em I.
(c) se a é máximo local de f então a é máximo de f em I.

Fix 1.16: Considere a função f esboçada na figura abaixo.
(a) Determine os pontos de máximo e mínimo local de f.
Determine os pontos de máximo e mínimo de f em:
(b) $[2, 4]$; (c) $[-3, 1]$; (d) $[-1, 4]$.
Determine o sinal de f'' em:
(e) $x = -1.8$; (f) $x = 0$; (g) $x = 4$.
(h) Dentre os inteiros $-3, -2, \ldots, 4$, determine os que estão próximos de pontos de inflexão (troca de concavidade) de f.
Considere $g'(x) = f(x)$. Determine os pontos de:
(i) máximo e mínimo local de g; (j) inflexão de g.



Fix 1.17: Considere $f(x) = x^4 - x^3$. Determine **todos** os pontos de máximo/mínimo:
(a) locais de f. (b) de f no intervalo $[-1, 2]$. (c) de f no intervalo $[-1, 0]$.
(d) de f em $\mathbb{R}$. (e) de f em $(-\infty, -1]$.

Fix 1.18: Considere a função $y = g(x)$ cujo gráfico está representado na figura abaixo.



Coloque em ordem crescente os seguintes números:
(a) $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(4)$, e $g'(5)$. (b) $g''(2)$, $g''(5)$, e $g''(8)$.

1.2 Problemas

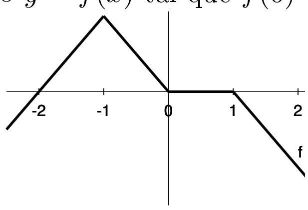
Prob 1.1: Calcule os limites abaixo:
(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(8x)}{e^{2x}-1}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (e^x + 3x)^{1/x}$. (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(5x)}$. (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(e^{a/n} - 1)$.

Prob 1.2: Estime, através de uma aproximação linear local:
(a) $\sqrt{65}$; (b) $\log(e^2 - 0.1)$; (c) $\arctan(1.2)$.

Prob 1.3: Considere a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ onde $a > 0$.
(a) Mostre que f admite nenhum ou dois extremos locais. Sob que condições cada um desses casos ocorre?
(b) No caso em que f não admite extremos locais, quantas raízes reais f pode ter?
(c) No caso em que f admite dois extremos locais, quantas raízes reais f pode ter?
(d) Baseado nos itens anteriores, descreva um procedimento para determinar o número de raízes reais de f.

Prob 1.4: (gráficos triviais) Esboce o gráfico de f e de uma função g tal que:
(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$; (b) $g'(x) = x^3 - 4x$.

Prob 1.5: Esboce o gráfico de uma função $y = f(x)$ tal que $f(0) = 2$ e f' é dado pelo gráfico abaixo.



Prob 1.6: Esboce o gráfico de uma função contínua f nos maiores intervalos possíveis que verifique **todas** as condições indicadas simultaneamente.
(a)

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $f(0) = -1$,
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$,
- $f'(x) > 0$ para $x < -1$, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$, $f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x > 0$.

(b)
- $f(0) = 2$, $f(-2) = 1$ e $f'(0) = 0$.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.
- $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$.
- $f''(x) < 0$ se $|x| < 2$ e $f''(x) > 0$ se $|x| > 2$.

Prob 1.7:

Para as questões de **esboço de gráfico**, antes do esboço deverá ser determinado:

(a) **todos** os pontos de interseção com os eixos x e y;
(b) os limites de no infinito e **todas** as assíntotas;
(c) os intervalos de crescimento e decrescimento;
(d) **todos** os pontos de máximo e mínimo locais;
(e) os intervalos com concavidade para cima e para baixo;

Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{(x-2)(x+1)}$. Dica: $f'(x) = \dfrac{4\,(1-2x)}{(x-2)^2\,(x+1)^2}$ e
$f''(x) = \dfrac{24\,\left(x^2 - x + 1\right)}{(x-2)^3\,(x+1)^3}$.

(b) $g(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. Dica: $g'(x) = 4\,\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ e $g''(x) = 4\,\dfrac{1+3\,x^2}{(1-x^2)^3}$.

(c) $h(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. Dica: $h'(x) = -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ e $h''(x) = \dfrac{2\,(x+2)}{(x-1)^4}$.

Prob 1.8: Esboce o gráfico da função:

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Dica: $f'(x) = \dfrac{(x-1)\,e^x}{x^2}$ e $f''(x) = \dfrac{\left(x^2 - 2\,x + 2\right)\,e^x}{x^3}$.

(b) $f(x) = \log(1 - x^2) + 1$. Dica: $f'(x) = \dfrac{2\,x}{x^2 - 1}$ e $f''(x) = -\dfrac{2\,x^2 + 2}{(x^2-1)^2}$,
$\sqrt{1 - e^{-1}} \approx 0.79$.

(c) $f(x) = e^{(2-x)(x-1)} + 1$. Dica: $f'(x) = (3 - 2x)\,e^{(2-x)(x-1)}$ e
$f''(x) = (4x^2 - 12x + 7)\,e^{(2-x)(x-1)}$, $3/2 - \sqrt{2}/2 \approx 0.79$ e $3/2 + \sqrt{2}/2 \approx 2.20$.

(d) $f(x) = x^3\,e^x$. Dica: $f'(x) = \left(x^3 + 3\,x^2\right)\,e^x$ e $f''(x) = \left(x^3 + 6\,x^2 + 6\,x\right)\,e^x$,
$-3 - \sqrt{3} \approx -4.7$ e $-3 + \sqrt{3} \approx 1.26$.

Prob 1.9: Para cada função f e cada intervalo I abaixo, determine $\max_{x\in I} f(x)$ e $\min_{x\in I} f(x)$ e, se for possível, os pontos $x_{\max}$ e $x_{\min}$ onde o máximo/mínimo é atingidos.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} + \dfrac{1}{\cos(x)}$, $I = (0, \pi/2)$.
Dica: $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\cos^2 x\,\operatorname{sen}^2 x}$

(b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $I = (0,\ \infty)$, $I = (0, 3]$, $I = [3, 4]$.
Dica: $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$.

(c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2$, $I = [-1, 1]$ e $[1, 2]$.
Dica: $f'(x) = 12x(x^2 - x + 2)$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ em $I = (-1, 1]$, $I = [0, 1]$.

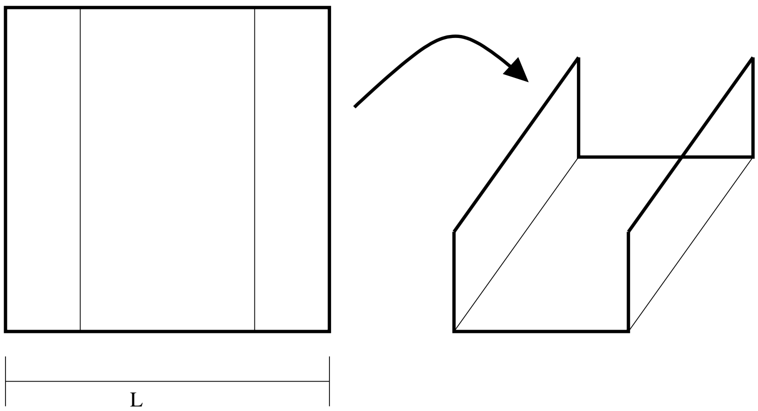
Dica: $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Prob 1.10: Determine todos $K \in \mathbb{R}$ tais que a equação $\dfrac{x}{x^4+3} = K$ tenha pelo menos uma solução.

Prob 1.11: Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja um mínimo.

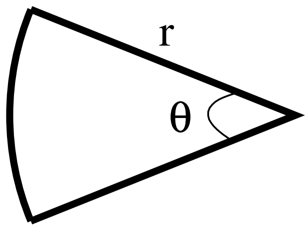
Prob 1.12: Uma chapa de metal de largura L deve ter duas bandas, de igual largura, dobradas ao longo do comprimento de maneira a formar uma calha retangular.

Como devem ser feitas as dobras de tal forma que a calha comporte o maior volume possível?

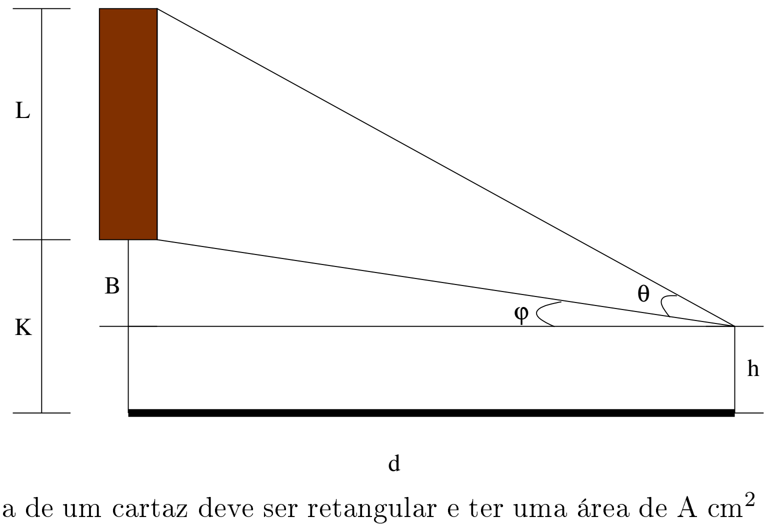


Prob 1.13: Dispõe-se de 40m de fio de arame para cercar um canteiro em um jardim cuja forma é a de um setor circular ("fatia de pizza"). Qual deve ser o raio do círculo para que o canteiro tenha a maior área possível ?

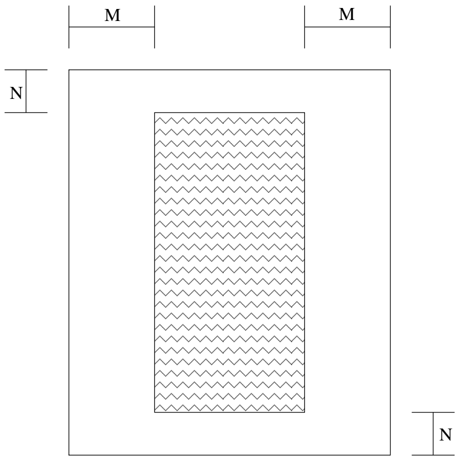
Obs: A área de um setor circular é $\theta r^2/2$, onde r é o raio do círculo e θ é o ângulo do setor circular.



Prob 1.14: A tela do cinema CABRALPLEX está a uma distância K do chão e possui altura L. Um espectador vai se sentar nesta sala, que é plana (não possui inclinação), de modo que sentado em qualquer assento a distância entre seus olhos e o solo é h. A que distância d da tela ele deve ficar sentado para que perceba a maior imagem possível da tela? Note que a imagem é proporcional ao ângulo subentendido por seu olho e os extremos da tela. Assumimos que a altura $K > h$, caso contrário o melhor seria $d = 0$.



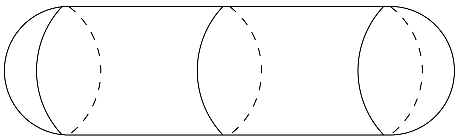
Prob 1.15: A página de um cartaz deve ser retangular e ter uma área de A cm^2 com margens laterais iguais a M cm, e margens superior e inferior de N cm. Determine as dimensões do cartaz que permitirão a maior área impressa.



Prob 1.16: Um tanque cilíndrico tem a forma de um cilindro com duas semiesferas em cada extremidade. Determine a forma do cilindro que:

(a) maximizará o seu volume, sabendo que sua área de superfície é A,

(b) minimizará o seu custo de fabricação sabendo que seu volume é V.

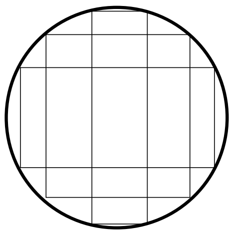


Prob 1.17:

(a) Sejam $f(x) = 2 + \sqrt{6x - 2x^2}$ e $P = (2, 2)$. Determine a maior e a menor distância de P aos pontos do gráfico de f.

(b) Qual a menor distância vertical entre as curvas $y = x^2$ e $y = -\dfrac{1}{x^2}$?

Prob 1.18: Determine as dimensões do retângulo inscrito num círculo de raio R que possui o menor e o maior perímetro;

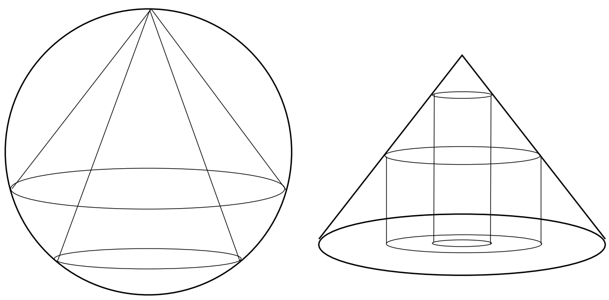


Prob 1.19: Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 27 - x^2$.

Prob 1.20: Maximize o volume do:

(a) cone reto inscrito numa esfera de raio R;

(b) cilindro circular reto inscrito num cone circular reto de raio R e altura H.



Respostas dos Exercícios

1 Aplicações da Derivada

1.1 Exer. de Fixação p.1

Fix 1.1: O limite é 5 por L'Hospital.

Fix 1.2: Não podemos aplicar L'Hospital duas vezes, somente uma vez obtendo $\lim_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{e^x} = \dfrac{2(1-1)}{e} = 0$.

Fix 1.3: Aplicando L'Hospital,
$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Pela figura,
$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$ e $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 2$, assim
$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 3/2$.

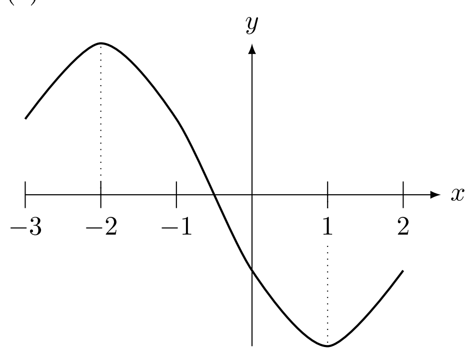
Fix 1.4: (a) $f(2.1) \approx f(2) + f'(2)(2.1-2) = 5 + 4(0.1) = 5.4$.

(b) $f(1.95) \approx f(2)+f'(2)(1.95-2) = 5+4(-0.05) = 4.8$.

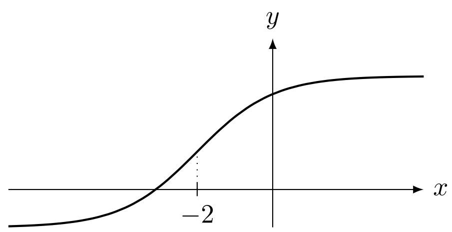
Fix 1.5: $p(\pi) = f(\pi) = -1$, $p'(\pi) = f'(\pi) = -\operatorname{sen}(\pi) = 0$, $p''(\pi) = f''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$.

Fix 1.6: (a) é máximo local; (b) não é máximo nem mínimo local; (c) é mínimo local; (d) é mínimo local;

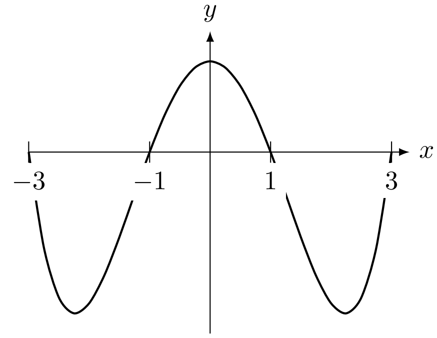
Fix 1.7: (a)



(b)



Fix 1.8:



Fix 1.9: (a) e (b) Ambas verdadeiras. (c) Falso. Todos os pontos em $[1, 2]$ são de máximo e de mínimo simultaneamente pela definição.

Fix 1.10: (a) Falso. I tem que ser um intervalo fechado como $I = [-6, 99]$. (b) Falso. I tem que ser limitado e fechado. (c) Falso. A função tem que ser contínua. (d) Falso. Mesmo descontínua pode ter máximo. (e) Falso. Considere $I = \mathbb{R}$ e a função contínua $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. O máximo é em $x = 0$.

Fix 1.11: (a) Como f é contínua em um intervalo fechado e limitado, podemos aplicar o TVE (Teorema do Valor Extremo de Weierstrass), que garante que existe a.

(b) Devemos comparar o valor da função nos extremos do intervalo com o valor da função nos pontos críticos. Assim comparando $f(1)$, $f(10)$, $f(3)$, $f(7)$, determinaremos o máximo. Ou seja, o máximo será um dos pontos: 1, 3, 7 ou 10.

(c) Não necessariamente. Note que **não** podemos aplicar o TVE pois o intervalo não é limitado. Um exemplo é tomar uma f que vai para $-\infty$ quando $x \to -\infty$.

Fix 1.12: (a) $a = -5$. (b) $b = 0$. (c) pode ser em $c = -1$ ou $c = 2$. (d) $d = 2$.

Fix 1.13: (a) $\max_{x\in I} f(x) = 1/2$, $x_{\max} = 2$, $\min_{x\in I} f(x) = 1/3$, $x_{\min} = 3$.

(b) $\max_{x\in I} f(x) = \infty$, não existe $x_{\max}$, $\min_{x\in I} f(x) = 1$, $x_{\min} = 1$.

(c) $\max_{x\in I} f(x) = -4$, $x_{\max} = -1/4$, $\min_{x\in I} f(x) = -1$, $x_{\min} = -1$.

(d) $\max_{x\in I} f(x) = 1$, $x_{\max} = 1$, $\min_{x\in I} f(x) = 0$, não existe $x_{\min}$.

(e) $\max_{x\in I} f(x) = 0$, $\min_{x\in I} f(x) = -\infty$, não existem $x_{\max}$ nem $x_{\min}$.

Fix 1.14: (a) Verdadeiro, pois se é mínimo local então a derivada é zero. (b) Verdadeiro, pois se é máximo no interior do intervalo, então é máximo local. (c) Falso, pois está no extremo do intervalo. Pode ser zero mas não necessariamente. (d) Falso. Um ponto com derivada zero pode não ser máximo nem mínimo, como por exemplo $g(x) = (x-3)^3$, que possui derivada nula em $x = 3$ mas não é máximo nem mínimo.

Fix 1.15: (a) Verdadeiro. (b) Falso, pode ser e pode não ser. Exemplo é $f(x) = 3$, onde **todo** ponto é de máximo local (e de mínimo local) embora $f' = f'' = 0$. (c) Falso, nem todo máximo local é máximo em um intervalo. O máximo pode ocorrer no extremo do intervalo e a derivada não precisa ser zero neste ponto.

Fix 1.16: (a) máximos locais: $x = -2$ e $x = 3$. mínimos locais: $x = 0$.

(b) Mínimo em $x = 4$, máximo em $x = 3$.

(c) Mínimo em $x = -3$, máximo em $x = 1$.

(d) Mínimo em $x = 0$, máximo em $x = 3$.

(e) $f''(-1.8) < 0$. (f) $f''(0) > 0$. (g) $f''(4) < 0$. (h) $x = -1$ e $x = 1$.

(i) mínimo local em $x = 1$. máximo local em $x = 4$. Olhe o sinal de g' antes e depois destes pontos.

(j) onde $g''(x) = f'(x) = 0$? pontos de inflexão de g: $x = -2$ e $x = 3$.

Fix 1.17: (a) Como $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$, os pontos críticos são $x = 0, x = 3/4$. Note que o sinal da derivada é: $f'(x) < 0$ para $x < 3/4$ e $f'(x) > 0$ para $x > 3/4$. Assim $x = 0$ **não** é extremos local. Somente $x = 3/4$ é mínimo local.

(b) Devemos comparar $f(-1) = 2$, $f(2) = 8$, $f(3/4) = -27/256$. Assim o máximo em I é em $x = 2$ e o mínimo em $x = 3/4$.

(c) Aqui basta comparar $f(-1) = 2$ com $f(0) = 0$. Assim o máximo é em $x = -1$ e o mínimo em $x = 0$.

(d) No extremo do intervalo $x \to \pm\infty$ a função $f(x) \to \infty$. Assim ela não tem máximo. O mínimo é no ponto crítico $x = 3/4$.

(e) No extremo $x \to -\infty$ a função $f(x) \to \infty$. No extremo $x = 1$, $f(-1) = 2$. Nenhum ponto crítico pertence ao intervalo. Assim ela não tem máximo e o mínimo é em $x = -1$.

Fix 1.18: (a) $g'(5) < g'(4) < g'(0) < g'(2)$. (b) $g''(8) < g''(5) < g''(2)$.

1.2 Problemas p.3

Prob 1.1: (a) 4. (b) Tomando o log obtemos que se $y = (e^x + 3x)^{1/x}$, $\log y = \dfrac{\log(e^x + 3x)}{x}$. Aplicando L.H. $\log(\lim_{x\to 0^+} y) = 4$. Logo $\lim_{x\to 0^+} y = e^4$. (c) 2/5. (d) Aplicando LH em $\dfrac{e^{a/n} - 1}{1/n}$ obtemos $\lim_{n\to\infty} ae^{a/n} = a$.

Prob 1.2: (a) $\sqrt{65} \approx \sqrt{64} + \dfrac{1}{2\sqrt{64}}(65 - 64) = 8 + \dfrac{1}{16}$. (b) $\log(e^2 - 0.1) \approx \log(e^2) + \dfrac{1}{e^2}(-0.1) = 2 - \dfrac{1}{10e^2}$. (c) Recordando, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Assim, $\arctan'(1) = \frac{1}{2}$. Assim $\arctan(1.2) \approx \tan(1) + \frac{1}{2}(1.2 - 1) = \dfrac{\pi}{4} + 0.1$.

Prob 1.3: (a) Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, os extremos locais vão ocorrer (possivelmente) somente nos pontos onde $f'(x) = 0$. Se a equação possuir duas raízes reais distintas, o sinal de f' passará de positivo para negativo ou vice-versa em cada raiz: assim um ponto será de máximo e o outro de mínimo local. Se possuir uma raiz dupla, como $a > 0$, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim o ponto onde f' se anula não será de máximo nem mínimo. Finalmente se f' não possuir raiz real, como $a > 0$, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim a função será sempre crescente, sem extremos locais.

(b) Se f não possui extremos locais então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim f poderá possuir no máximo 1 raiz. Como é polinômio de grau impar, pelo TVI (porque?) possui no mínimo uma raiz. Concluímos que f possui exatamente 1 raiz.

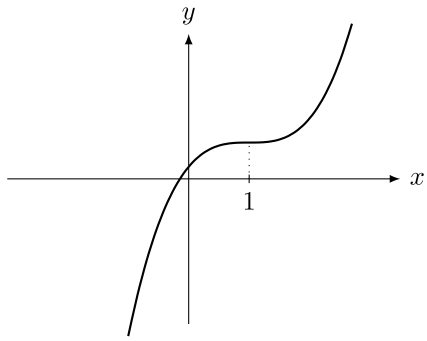
(c) Se f possui 2 extremos locais, temos que verificar se o mínimo local é menor que zero ou não e se o máximo local é menor que zero ou não (faça uma figura). Se ambos forem menor que zero ou ambos maiores que zero, f admite somente uma raiz real. Se o máximo local é maior que zero e o mínimo local menor que zero, f admite exatamente 3 raízes reais.

(d) Determine (caso existam) os dois pontos críticos distintos $x_0 < x_1$ de f, isto é, pontos tais que $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$. Caso não existam ou exista somente um, a função possui somente uma raiz real.

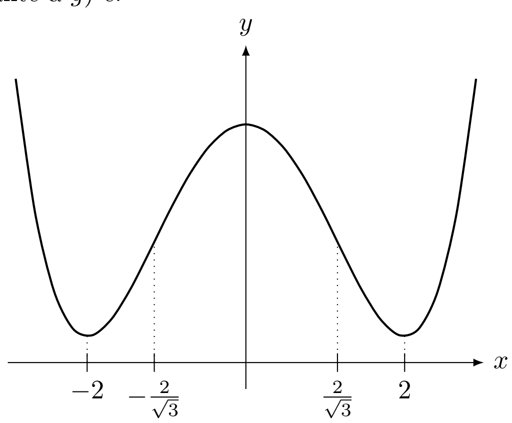
Como $a > 0$ necessariamente x_0 é máximo e x_1 é mínimo (basta olhar sinal de f', que vem positivo até x_0, fica negativa em (x_0, x_1) e volta a ser positivo em x_1. Se $f(x_0) > 0 > f(x_1)$ possui 3 raízes reais, caso contrário somente uma raiz real.

Prob 1.4: (a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$, cuja única raiz é $x = 1$. Assim $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo esta função é sempre crescente. Como $f''(x) = 6x - 6$, ela troca de concavidade em $x = 1$. Quando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ e quando $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$. Não possui assíntota vertical nem horizontal.

Embora $f'(1) = 0$, como $f' > 0$ perto de $x = 1$, este ponto não é de máximo nem mínimo.

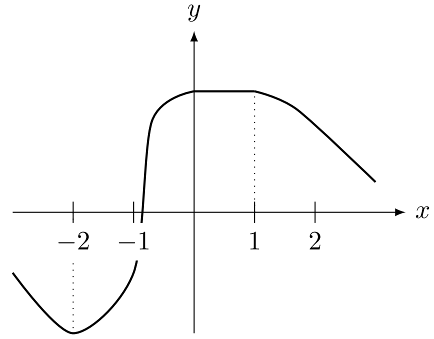


(b) Como $g'(x) = x(x^2 - 4)$, a derivada se anula em $0, \pm 2$. Analisando sinal de g' (quadro de sinais) concluímos que g decresce até -2, cresce em $(-2, 0)$, decresce em $(0, 2)$, e cresce de 2 em diante. Com isso vemos que os pontos $x = \pm 2$ são de mínimo local e $x = 0$ é de máximo local. Como $g''(x) = 3x^2 - 4$, a concavidade muda em $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, sendo para cima antes de $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ e depois de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e para baixo em $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$. Assim um esboço para gráfico (não é único pois pode-se somar constante a g) é:

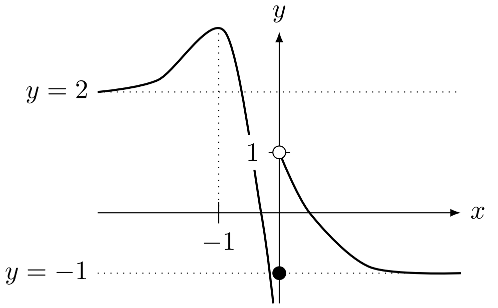


Prob 1.5: O esboço deverá ter uma $f(x) = 2$ para $x \in [0, 1]$ pois $f'(x) = 0$ neste intervalo. Ela deverá decrescer para $x > 1$ com concavidade para baixo pois $f'' < 0$. Entre -2 e 0 ela deverá crescer pois $f' > 0$ neste intervalo. No entanto a concavidade deve ser

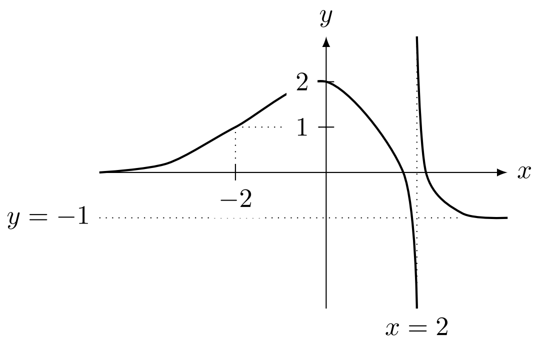
para cima até -1 e para baixo depois. Até o -2 ela deve deve decrescer com concavidade para cima e um mínimo local em $x = -2$ pois a derivada se anula em -2. Assim obtemos:



Prob 1.6: (a) Possui duas assintotas horizontais: $y = 2$ e $y = -1$. Possui assintota vertical em $x = 0$. Possui um máximo local em $x = -1$.

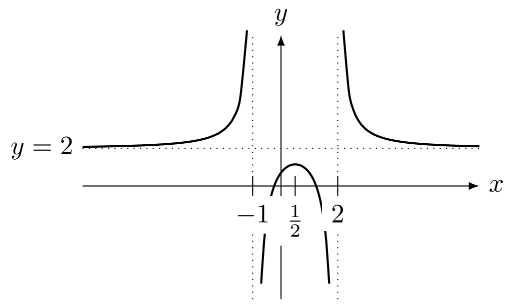


(b) Possui duas assintotas horizontais: $y = 0$ e $y = -1$. Possui assintota vertical em $x = 2$. Possui um máximo local em $x = 0$.



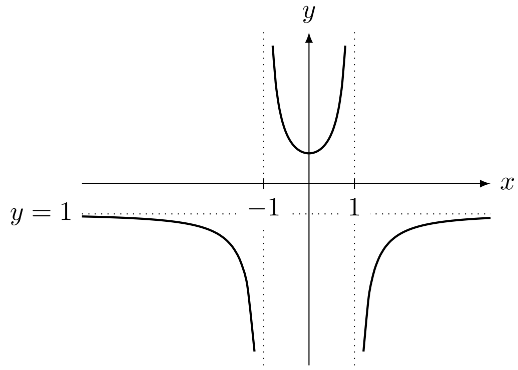
Prob 1.7: (a) Intersepta os eixos em $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Assintotas verticais em $x = 2$ e $x = -1$. Assintota horizontal: $y = 2$. Sinal de f' é igual ao sinal de $1 - 2x$: a função cresce até $x = 1/2$ e decresce depois. Em $x = 1/2$ a função tem um máximo local.

O sinal de g'' é igual ao sinal de $(x - 2)(x + 1)$ (note que $x^2 - x + 1 > 0$ pois as raízes são complexas): concavidade para cima até $x = -1$ e depois de $x = 2$. Concavidade para baixo em $(-1, 2)$.



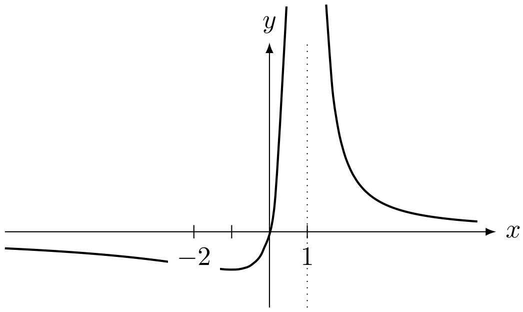
(b) Intersepta os eixos em $(0, 1)$. Assintotas verticais em $x = \pm 1$. Assintota horizontal: $y = -1$. Sinal de g' é igual ao sinal de x: a função decresce até $x = 0$ e cresce depois. Em $x = 0$ a função tem um mínimo local.

O sinal de g'' é igual ao sinal de $1-x^2$: concavidade para baixo até $x = -1$ e depois de $x = 1$. Concavidade para cima em $(-1, 1)$.



(c) Intersepta os eixos em $(0, 0)$. Assintota vertical em $x = 1$. Assintota horizontal: $y = 0$. Sinal de h': a função decresce até $x = -1$, cresce em $(-1, 1)$, decresce depois de $x = 1$. Em $x = -1$ a função tem um mínimo local.

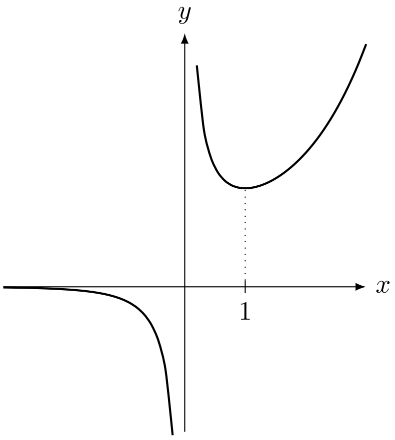
O sinal de h'' é igual ao sinal de $x+2$: concavidade para baixo até $x = -2$, Concavidade para cima depois.



Prob 1.8: (a) Não intersepta os eixos (nunca vale zero e não está definida em $x = 0$). Assintota vertical em $x = 0$. Assintota horizontal: $y = 0$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $x-1$ pois e^x e x^2 são sempre positivas: a função decresce até $x = 1$ e cresce depois de $x = 1$. Em $x = 1$ a função tem um mínimo local.

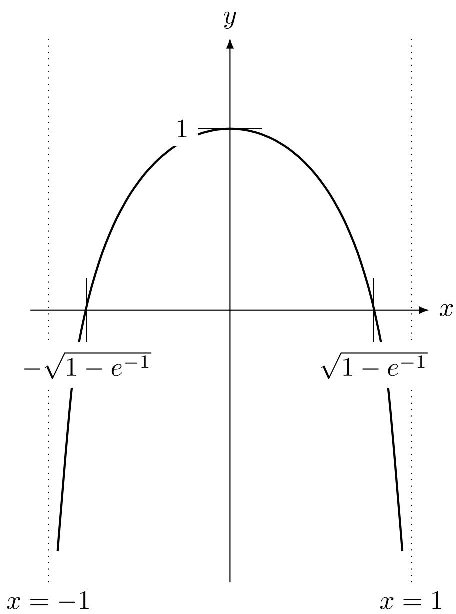
O sinal de f'' é igual ao sinal de x^3 pois o polinômio x^2-2x+2 possui raízes complexas e como coeficiente de x^2 é positivo, $x^2-2x+2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim f'' é negativa para $x < 0$ e positiva para $x > 0$. Portanto concavidade para baixo para $x < 0$, Concavidade para cima para $x > 0$.



(b) Note que a função está definida somente onde $1 - x^2 > 0$, isto é, para $x \in (-1, 1)$. Intersepta os eixos em $(0, 1)$ e quando $\log(1 - x^2) = -1$, isto é, quando $1 - x^2 = e^{-1}$. Portanto quando $x^2 = 1 - e^{-1}$, isto é, $x = \pm\sqrt{1 - e^{-1}} \approx \pm 0.79$ (pelo software Maxima). Logo intercepta o eixo x em $(\pm 0.79,\ 0)$. Assintota vertical em $x = \pm 1$ (onde temos $\log 0 = -\infty$!). Assintota horizontal não existe (função nem esta definida para $x > 1$ nem $x < -1$).

Sinal de f' é igual a de $-2x$ para $x \in (-1, 1)$ pois $x^2 - 1 < 0$ neste intervalo. Assim a função cresce para $x < 0$ e decresce para $x > 0$. Em $x = 0$ a função tem um máximo local.

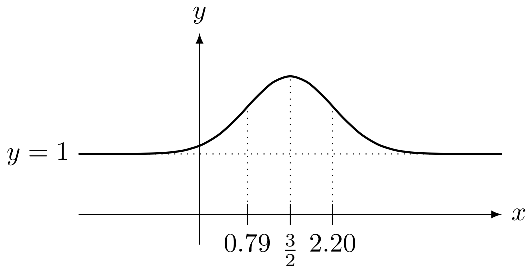
O sinal de f''. Note que o numerador $2x^2 + 2$ é sempre positivo e como o denominador é igual a $(x^2 - 1)^2$, que é sempre positivo, por ter sinal de menos na frente será sempre negativa. Assim $f'' < 0$ e a concavidade é sempre para baixo.



(c) Intersepta os eixos em $(0,\ 1 + e^{-2})$. Não possui Assintota vertical. Assintota horizontal: $y = 1$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $3 - 2x$ pois exponencial de qualquer coisa é sempre positiva. Portanto a função cresce até $x = 3/2$ e decresce depois. Em $x = 3/2$ a função tem um máximo local.

O sinal de f'' é igual ao sinal de $4x^2 - 12x + 7$. As raízes são: $3/2 \pm \sqrt{2}/2$. A concavidade para baixo em $3/2 - \sqrt{2}/2,\ 3/2 + \sqrt{2}/2)$, ou, aproximadamente, em $(0.79,\ 2.20)$. Concavidade para cima fora deste intervalo.



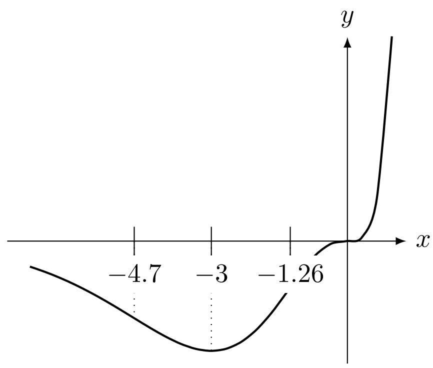
(d) Intersepta os eixos em $(0, 0)$. Não tem Assintota vertical. Assintota horizontal: $y = 0$ quando $x \to -\infty$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $x + 3$, pois colocando em evidência x^2, que é sempre positivo, obtemos isto. Note que a derivada será zero em $x = -3$ e em $x = 0$. Note que em zero a derivada **não** troca de sinal, continuando positiva. Assim a função decresce até $x = -3$ e cresce depois. Em $x = -3$ a função tem um mínimo local. O ponto $x = 0$ possui derivada zero (é ponto crítico) mas não é máximo nem mínimo local pois a função cresce em torno de $x = 0$ ($f'(x) > 0$ para x próximo mas diferente de zero).

O sinal de f'' é igual ao sinal de $x(x^2 + 6x + 6)$. As raízes são $0, -3 \pm \sqrt{3}$.

$-3 - \sqrt{3} \approx -4.7$ e $-3 + \sqrt{3} \approx -1.26$.

Fazendo quadro de sinais vamos obter que: concavidade para baixo até $x = -3 - \sqrt{3} \approx -4.7$ e também no intervalo $(-3 + \sqrt{3},\ 0) \approx (-1.26,\ 0)$. A Concavidade será para cima em $(-3 - \sqrt{3},\ -3 + \sqrt{3}) \approx (-4.7,\ -1.26)$ e também para $x > 0$.



Prob 1.9: (a) O ponto crítico é a solução de $\operatorname{sen}^3(x) = \cos^3(x)$, e portanto se $\tan^3(x) = 1$, ou seja, quando $\tan x = 1$, o que ocorre se $x = \pi/4$. Quando $x \to 0^+$ ou $x \to \pi/2^-$, $f(x) \to \infty$. Assim o mínimo é em $x = \pi/4$ com $f(\pi/4) = 2\sqrt{2}$ e **não** existe máximo em I. Portanto $\max_{x \in I} f(x) = \infty$, não existe $x_{\max}$, $\min_{x \in I} f(x) = 2\sqrt{2}$, $x_{\min} = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) O único ponto crítico é em $x = 2$ ($f'(2) = 0$). Quando $x \to 0^+$ ou $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$. Assim em $I = (0,\ \infty)$ o mínimo é em $x = 2$ e o máximo não existe. Portanto $\max_{x \in I} f(x) = \infty$, não existe $x_{\max}$, $\min_{x \in I} f(x) = \dfrac{5}{2}$, $x_{\min} = 2$.

Em $I = (0, 3]$, como $2 \in I$, o mínimo é em $x = 2$ e o máximo não existe pois próximo de 0 $f(x) \to \infty$.

Portanto $\max_{x\in I} f(x) = \infty$, não existe $x_{\max}$, $\min_{x\in I} f(x) = \frac{5}{2}$, $x_{\min} = 2$.

Em $I = [3,4]$ não tem ponto crítico. Logo o máximo e o mínimo estão nos extremos: $f(3) = 3+1/3$ e $f(4) = 4+1/4$. Logo o mínimo é em $x = 3$ e o máximo em $x = 4$. Portanto $\max_{x\in I} f(x) = 4 + 1/3$, $x_{\max} = 4$, $\min_{x\in I} f(x) = 3 + 1/3$, $x_{\min} = 3$.

(c) Note que o termo da derivada $x^2 - x + 2$ possui raízes complexas. Como o termo de maior grau é x^2, $x^- x + 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo a única raiz é $x = 0$, com sinal de f' igual ao sinal de x. Como f decresce até $x = 0$ e cresce depois, $x = 0$ é mínimo local.

Assim em $[-1,1]$ comparamos $f(-1) = 19$, $f(1) = 11$, $f(0) = 0$. Portanto $\max_{x\in I} f(x) = 19$, $x_{\max} = -1$, $\min_{x\in I} f(x) = 0$, $x_{\min} = 0$.

Em $[1,2]$, não tem ponto crítico, basta comparar $f(2) = 64$ e $f(1) = 11$. Logo $\max_{x\in I} f(x) = 64$, $x_{\max} = 2$, $\min_{x\in I} f(x) = 11$, $x_{\min} = 1$.

(d) Note que f' é sempre positiva. Logo f é sempre crescente. Note que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$

Em $I = (-1, 1]$ temos que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Assim não possui mínimo. O máximo será em $x = 1$ com $f(1) = \frac{1}{2}$. Portanto $\max_{x\in I} f(x) = \frac{1}{2}$, $x_{\max} = 1$, $\min_{x\in I} f(x) = -\infty$, não existe $x_{\min}$.

Em $I = [0,1]$, como $f(0) = 0$, $\max_{x\in I} f(x) = \frac{1}{2}$, $x_{\max} = 1$, $\min_{x\in I} f(x) = 0$, $x_{\min} = 0$.

Prob 1.10: Determine o máximo e o mínimo de $f(x) = \dfrac{x}{x^4+3}$ em $\mathbb{R}$. Conclua que $K \in [-1/4,\ 1/4]$.

Prob 1.11: Modelagem: Se x, y são os números, $y - x = 100$, $p = xy$ mínimo. Como $y = x + 100$, $p(x) = (x + 100)x$. Queremos minimizar $p(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Como $p(x) \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$, o mínimo é no ponto de derivada zero. Como $p'(x) = 2x + 100$, $x = -50$ é o ponto de derivada zero, com $y = -50 + 100 = 50$. Logo os números são 50 e -50.

Prob 1.12: Modelagem: Suponha que a dobra tenha comprimento x. A calha terá a forma de um retângulo com lado x e $L - 2x$ (o que sobrou para base. Como o volume é proporcional a área deste retângulo, queremos o máximo de $f(x) = x(L - 2x)$ para $x \in [0, L/2]$.

Resolução: Como é equação do segundo grau com concavidade para baixo, o máximo é no ponto de derivada zero. Como $f'(x) = L - 2x - 2x = L - 4x$, $x_0 = L/4$. Assim a calha deverá ter a forma de um retângulo com dimensões $L/4$ e $L/2$.

Prob 1.13: Modelagem: Seja r o raio do círculo e θ o ângulo do setor circular. Queremos maximizar a área $a = \theta r^2/2$. O perímetro deste setor é $2r$ mais θr. Assim, $40 = 2r + \theta r$. Logo, $\theta = 40/r - 2$. Logo queremos o máximo de $a(r) = 20r - r^2$. Note que θ varia entre 0 e 2π. Como $40 = 2r + \theta r$, para $\theta = 0$, $r = 20$ e para $\theta = 2\pi$, $r = 20/(1 + \pi)$. Assim $r \in [20/(1 + \pi),\ 20]$.

Resolução: Trata-se de uma equação do segundo grau. $a'(r) = 20 - 2r$. Logo a derivada é zero em $r_0 = 10$. Como $20/(1 + \pi) < 20/4 = 5 < 10$ ($\pi > 3$), o máximo é em $r_0 = 10$.

Prob 1.14: Modelagem: Vamos modelar introduzindo θ para o ângulo e $B = K - h$ para a diferença entre a distância da tela ao chão e a altura dos olhos do espectador. Note que se $h \to 0$ ou $h \to \infty$ o ângulo $\theta \to 0$.

Por trigonometria, $\tan\varphi = \dfrac{B}{d}$ e $\tan(\theta + \varphi) = \dfrac{L+B}{d}$. Assim, $\varphi = \arctan(B/d)$ e $\theta + \varphi = \arctan((L+B)/d)$. Logo, o ângulo $\theta(d) = \arctan((L + B)/d) - \arctan(B/d)$.

Queremos maximizar $\theta(d)$ para $d \in (0, \infty)$.

Resolução: Derivando obtemos

$$\theta'(d) = \frac{L(BL + B^2 - d^2)}{(B^2 + d^2)((L + B)^2 + d^2)}.$$

Queremos determinar d_0 tal que $\theta'(d_0) = 0$. Como o denominador é sempre positivo e $L > 0$, a única raiz da derivada é d_0 tal que $BL + B^2 - d_0^2 = 0$, isto é (solução positiva) $d_0 = \sqrt{B^2 + BL}$.

Prob 1.15: Modelagem: Sejam x e y as dimensões do cartaz. Sua área $A = xy$. A área impressa será igual a $(x - 2M)(y - 2N)$. Eliminando $y = A/x$ obtemos que queremos maximizar a área impressa $f(x) = (x - 2M)(A/x - 2N)$ com $x \in [2M, A/(2N)]$.

Resolução: Dica: Resolva o problema com $A = 50, M = 2, N = 4$. Vou dar a solução geral. Como $f'(x) = A/x - 2N - (x - 2M)A/x^2$, os zeros da derivada são $\pm\sqrt{AM/N}$. Queremos somente a solução positiva $x_0 = \sqrt{AM/N}$. Note que nos extremos a área impressa f é zero. Assim o máximo é em x_0 se nos certificarmos que $x_0 \in [2M, A/(2N)]$.

Vamos provar que $x_0 \in [2M, A/(2N)]$. Para que o problema faça sentido a área A deve ser maior que a área das margens $(2M)(2N) = 4MN$. Assim, $4MN < A$. Logo, $4M^2 < AM/N$, e portanto $2M < \sqrt{AM/N} = x_0$. Por outro lado, $AM/N < A^2/(4N^2)$. Logo, $\sqrt{AM/N} = x_0 < A/(2N)$.

Prob 1.16: Modelagem (comum aos dois itens): Seja h a altura e r o raio das semiesferas. O volume é $V = 4/3\pi r^3 + \pi r^2 h$ e a área de superfície é $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$.

(a) **Modelagem**: Se fixarmos a área em A, tiramos que $\pi rh = (A - 4\pi r^2)/2$. Assim, $V(r) = 4/3\pi r^3 + r(A - 4\pi r^2)/2$. Queremos maximar $V(r)$ em $[0, \sqrt{A/(4\pi)}]$ (chegamos neste valor tomando $h = 0$ na relação $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$).

Resolução: Vamos calcular o ponto crítico. Como $V'(r) = \dfrac{A - 4\pi r^2}{2}$, $V'(r_0) = 0$ se $A = 4\pi r_0^2$. Assim a derivada é zero no extremo do intervalo $r_0 = \sqrt{A/(4\pi)}$. Note que $V(0) = 0$ e $V'(0) = A/2 > 0$. Alem disso $V'(x) > 0$ para todo $x \in [[0, \sqrt{A/(4\pi)}]$. Logo V cresce neste intervalo e portanto $r = \sqrt{A/(4\pi)}$ é o ponto onde $V(r)$ assume o máximo.

(b) **Modelagem**: O custo de fabricação é proporcional a área de superfície A. Como o volume V é fixo, tiramos que $\pi r h = (V - 4/3\pi r^3)/r$. Assim,

$$A(r) = 4\pi r^2 + 2(V - 4/3\pi r^3)/r = \frac{6V + 4\pi r^3}{3r}.$$

Queremos minimizar $A(r)$ para $r \in (0, \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}})$ (chegamos neste valor tomando $h = 0$ na relação $V = 4/3\pi r^3 + \pi r^2 h$).

Resolução: Note que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ ou $r \to \infty$. Assim o mínimo ocorrerá em um ponto crítico. Como $A'(r) = \dfrac{8\pi r^3 - 6V}{3r^2}$. Assim a derivada se anula somente em $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$. Pode-se confirmar que o mínimo é em $r = r_0$ pois o sinal da derivada é sempre negativa.

Prob 1.17: (a) **Modelagem**: Queremos minimizar o quadrado da distância $g(x) = (x-2)^2 + (f(x)-2)^2 = (x-2)^2 + |6x - 2x^2|$. Note que o domínio de f é onde $6x - 2x^2 > 0$, isto é em $[0, 3]$.

Resolução: Aplicando a definição de módulo observamos que $|6x - 2x^2| = 6x - 2x^2$ se $x \in [0, 3]$. Assim $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ se $x \in [0, 3]$. Em $[0, 3]$, $g'(x) = -2x + 2$ e $g'(1) = 0$. Temos que comparar $g(0) = 4$, $g(1) = 5$ e $g(3) = 1$. Observamos que o mínimo é em $x = 3$ com $g(3) = 1$ e o máximo é em $x = 1$ com $g(1) = 5$.

(b) **Modelagem**: A distância vertical $f(x)$ é igual a diferença entre os y's. Assim, queremos o mínimo de $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Note que $f(x) \to \infty$ para $x \to \pm\infty$. Logo o mínimo será no ponto de derivada zero. Como $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$, os pontos críticos são 1 e -1. Como $f(1) = f(-1) = 2$, o mínimo é em $x = 1$ ou $x = -1$.

Prob 1.18: Modelagem: Sejam x, y os lados do retângulo. O perímetro $P = 2x + 2y$. Note que ligando-se o centro do círculo a um vértice do retângulo obtemos um triângulo retângulo com lados $x/2, y/2, R$. Assim, por Pitágoras, $x^2 + y^2 = 4R^2$. Logo, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ para $x \in [0, 2R]$. Assim queremos o máximo e mínimo de $P(x) = 2x + 2\sqrt{4R^2 - x^2}$ para $x \in [0, 2R]$.

Resolução: Como $P'(x) = 2 - \dfrac{2x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$. Note que $P'(x) = 0$ se, e somente se, $2\sqrt{4R^2 - x^2} = 2x$. A raiz positiva será $x_0 = R\sqrt{2}$. Como $x_0^2 + y_0^2 = 4R^2$, $y_0 = R\sqrt{2}$. Comparando $P(0) = 4R = P(2R)$ e $P(R\sqrt{2}) = R3\sqrt{2}$. Assim, como $4 < 3\sqrt{2}$, o maior perímetro será $R3\sqrt{2}$ para o quadrado de lado $R\sqrt{2}$. O menor será para o retângulo degenerado de lados 0 e $2R$, com perímetro $4R$.

Prob 1.19: Modelagem: Vamos fixar x como sendo o ponto do eixo x que é um dos vértices do retângulo. Automaticamente os outros vértices vão ser $(x, y(x))$, $(-x, y(x))$ e $(-x, 0)$. Assim a área $A = (2x)y(x) = 2(27x - x^3)$. Note que como as raízes da parábola são $\pm\sqrt{27}$, $x \in [-\sqrt{27}, \sqrt{27}]$ e queremos maximizar $A(x) = 2(27x - x^3)$.

Resolução: Como $A'(x) = 2(27 - 3x^2)$, os pontos críticos são $x = \pm 3$, que pertencem ao intervalo. Note que $A(\pm\sqrt{27}) = 0$. Assim o máximo será em $x = 3$ onde $A(3) = 108$. Note que $y(x) = 18$. Assim as dimensões são $2x = 6$ por $y = 18$

Prob 1.20: (a) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cone inscrito na esfera. O volume do cone é $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Note que como $\dfrac{1}{3}\pi$ é um constante, maximizar a função $f = r^2 h$ é um problema equivalente. Como é função de duas variáveis, devemos eliminar uma delas.

Ligando-se o centro da esfera até um dos pontos do círculo da base do cone observamos o triângulo retângulo com hipotenusa R e catetos r e $h - R$. Logo, por Pitágoras, $(h-R)^2 + r^2 = R^2$, Assim, $r^2 = 2hR - h^2$. Logo $f(h) = h(2hR - h^2)$. Note que $h \in [0, 2R]$. Assim queremos o máximo de $f(h)$ para $h \in [0, 2R]$.

Resolução: Note que $f(0) = f(2R) = 0$. Como $f'(h) = 4hR - 3h^2 = h(4R - 3h)$, os pontos críticos são $h = 0$ e $h = 4R/3$. Como o ponto zero não é de máximo, o máximo é quando $h = 4R/3$.

(b) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cilindro inscrito no cone. O volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$. Como é função de duas variáveis, devemos eliminar uma delas. Note que cortando o cone temos uma semelhança de triângulos: a altura H do cone está para R assim como $H - h$ está para r. Assim, $\dfrac{H}{R} = \dfrac{H-h}{r}$. Logo, $r = \dfrac{R(H-h)}{H}$. Logo queremos maximizar $V(h) = \pi h \left(\dfrac{R(H-h)}{H}\right)^2$. Note que $h \in [0, H]$. Assim queremos o máximo de $V(h)$ para $h \in [0, H]$.

Resolução: Note que $V(0) = V(H) = 0$. Como $V'(h) = \dfrac{\pi R^2 (H - 3h)(H - h)}{H^2}$ (vai obter-se equação do segundo grau com raízes H e $H/3$). Como $V(H) = 0$, o máximo é para $h = H/3$ (não precisa calcular $V(H/3) = \dfrac{4\pi H R^2}{27}$, que obtive com o Maxima).