UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC

Departamento de Ciências de Computação – SCC

Seminário para a Disciplina SCE 5799 – Computação Gráfica

Profa. Dra. Rosane Minghim

Transformações Geométricas 2D e 3D

Alunos: Anderson Luis Nakano

Ícaro Lins Leitão da Cunha

São Carlos – Março de 2007

Sumário

1. Introdução

Em diversas aplicações na área de computação gráfica, há a necessidade de alterar e manipular o conteúdo de uma cena.

Animações, por exemplo, são produzidas pelo movimento da câmera ou dos objetos presentes na cena. Mudanças em orientação, tamanho e formato estão ligadas às transformações geométricas. Estas aplicações são aplicadas à cena para alterar a geometria dos objetos que compõem a cena sem fazer alterações topológicas. Uma transformação geométrica é uma aplicação bijectiva (ponto por ponto), entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de forma que, a partir de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual ou semelhante (Wikipedia, 2007). As principais transformações geométricas, como escala, rotação, translação, espelhamento e cisalhamento serão discutidas neste documento.

2. Transfomações Básicas em 2D

Formalmente, uma transformação de um conjunto não vazio U em um conjunto não vazio V é uma correspondência T que, a cada elemento x de U, associa um único elemento y = T(x) de V: denota-se F: U$\rightarrow$V. O conjunto de elementos y para o qual existe um x tal que T(x) = y chama-se imagem de T. O conjunto U chama-se domínio e o conjunto V chama-se contra-domínio de T.

Aqui trataremos de transformações (ou operações) em que U = V = R^2. Falaremos primeiramente sobre as transformações de translação, escala e rotação.

2.1 Translação

Queremos realizar a translação de um objeto geométrico representados por um conjunto de pontos P_i pertencentes ao R^2. Para isso, adicionamos quantidades inteiras às suas coordenadas. Chamaremos estas quantidades inteiras de dx e dy. Assim, seja um ponto P(x, y) sobre o qual será efetuada uma operação de translação e seja P' as coordenadas do ponto após a translação. Podemos definir a função T como sendo T(P) = $T(x_p, y_p) = (x_p + dx, y_p + dy)$. Em forma matricial, temos que:

$$P' = P + T, \text{ onde } T = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Não é difícil observar que, para transladar uma linha, basta transladar seus pontos limites.

2.2Escala

Agora queremos fazer um objeto parecer maior ou menor, ou seja, aumentar ou diminuir seu tamanho, em outras palavras, mudar sua escala. Para isso, multiplicamos cada ponto P_i do objeto em questão por um fator de mudança de escala na horizontal (sx) e um fator de mudança de escala na vertical (sy).Assim, seja um ponto P(x, y) sobre o qual será efetuada uma operação de translação e seja P' as coordenadas do ponto após a translação. Podemos definir a função T como sendo $T(P) = T(x_p, y_p) = (x_p * sx, y_p * sy)$. Em forma matricial, temos que:

$$P' = S\,P, \text{ onde } S = \begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix}$$

Exemplo:

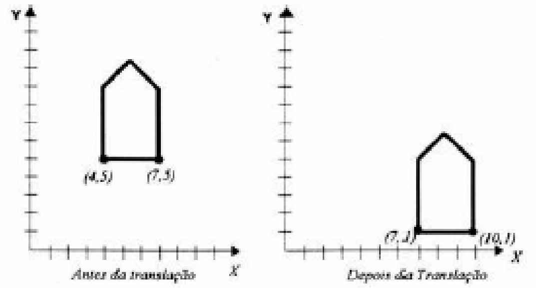
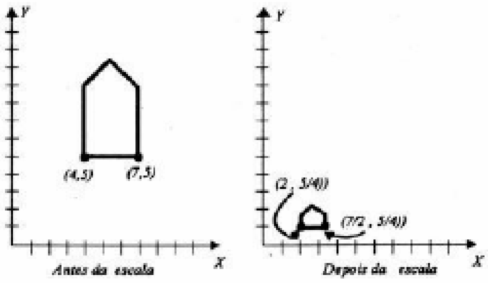


Figura 5.1: Translação de uma casa.



Mudança de escala de uma casa. Como a escala é não uniforme, sua proporção é alterada. Fonte: [1]

É importante notar que para garantir que um objeto esteja na mesma posição após a escala, deve-se fazer uma translação do seu centro até a origem, aplicar a escala e depois aplicar a tranlação inversa à primeira.

2.3 Rotação

Por fim queremos rotacionar um objeto de um certo ângulo Θ com relação à origem. Assim, o ponto $T(x_p, y_p)$ é tal que:

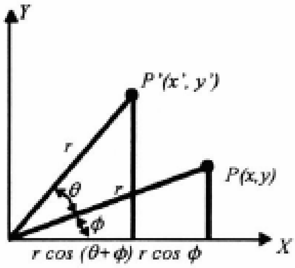
$$x_p = r * \cos\phi;$$

$$y_p = r * \sin\phi;$$

E o ponto $P'(x_p', y_p')$ é:

$$x_p' = r * \cos(\phi + \theta) = r * \cos(\phi) * \cos(\theta) - r * \sin(\phi) * \sin(\theta)$$

$$y_p' = r * \sin(\phi + \theta) = r * \sin(\phi) * \cos(\theta) + r * \sin(\theta) * \cos(\phi)$$

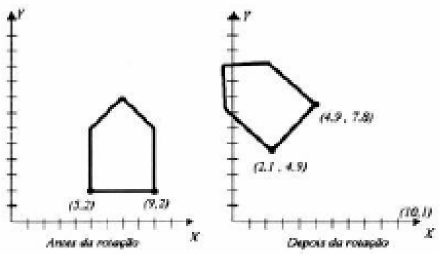


determinando a equação de rotação. Fonte: [1]

Podemos, portanto definir a função T como sendo T(P) = T(x_p, y_p) = ($x_p * \cos\theta - y_p * \sin\theta, x_p * \sin\theta + y_p * \cos\theta$). Em forma matricial, temos que:

P' = R P, onde R = $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Exemplo:



rotação de 45º de uma figura geométrica. Fonte: [1]

3. Coordenadas Homogêneas e Matrizes de Transformação

Vimos que, enquanto a translação é tratada como uma soma de vetores, a escala e a rotação é tratada como uma multiplicação de um vetor por uma matriz. Para que se possa combinar facilmente essas transformações, devemos poder tratar do mesmo modo todas as 3 transformações de uma forma consistente. A solução é representar os pontos P do espaço

através de três coordenadas (coordenadas homogêneas). Dizemos que 2 pontos em coordenadas homogêneas (x, y,W) e (x_0, y_0,W_0) representam o mesmo ponto
se e somente um é múltiplo do outro . Assim, (2, 3, 6) e (4, 6, 12) representam o mesmo ponto no R^2. Também, pelo menos uma das coordenadas homogêneas precisa ser diferente de zero, assim (0, 0, 0) não é permitido.
Se a coordenada W é diferente de zero, podemos dividir (x, y, W) por ela, obtendo o mesmo ponto (x/W, y/W, 1). Os números x/W e y/W são chamados de Coordenadas Cartesianas do ponto homogêneo.

A translação em coordenadas homogêneas fica na forma: T(x_p, y_p, 1) = (x_p + dx, y_p + dy, 1). Em forma matricial, temos que:

$$P' = TP, \text{ onde } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil provar que a translação é aditiva, ou seja, se quisermos transladar um objeto em (dx_1, dy_1) unidades, e depois em (dx_2, dy_2) unidades, basta multiplicar o ponto P pela matriz de translação $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 \\ 0 & 1 & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e depois pela matriz $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_2 \\ 0 & 1 & dy2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois

$$T_1 * T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx_1 + dx_2 \\ 0 & 1 & dy_1 + dy_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A operação de escala em coordenadas homogêneas fica na forma: T(x_p, y_p, 1) = (x_p* dx, y_p *dy, 1). Em forma matricial, temos que:

P' = SP, onde S = $\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

É fácil mostrar que a escala é uma operação multiplicativa.

Por fim, a operação de rotação em coordenadas homogêneas fica na forma: $T(x_p, y_p, 1) = (x_p * \cos\theta - y_p * \sin\theta, x_p * \sin\theta + y_p * \cos\theta, 1)$. Em forma matricial, temos que:

P' = RP, onde R = $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

É fácil mostrar que a ratação é uma operação aditiva.

Uma sequência de transformações de rotações, translações e escalas é chamada de **transformação afim**. Elas preservam paralelismo de linha, mas não comprimentos e ângulos. Uma matriz de transformação cuja submatriz 2x2 do canto superior esquerdo é ortogonal preserva ângulos e comprimentos. Estas transformações são chamadas de transformações de **corpo rígido**, pois não há distorção do objeto.

4. Transformadas 2D Adicionais

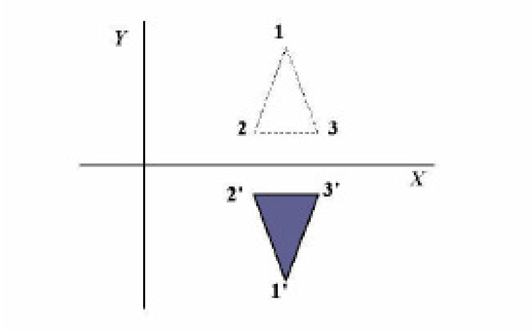
Duas transformações adicionais frequentemente usadas são o Espelhamento e o Cisalhamento, discutidas a seguir.

4.1 Espelhamento (*Mirror*)

A transformação de reflexão, ou espelhamento, aplicada a um objeto, produz um objeto espelhado com relação a um dos eixos ou a ambos. A operação de espelhamento no eixo x, em coordenadas homogêneas, fica na forma: $T(x_p, y_p, 1) = (x_p, - y_p, 1)$. Em forma matricial, temos que:

$$P' = MP, \text{ onde } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:



reflexão de um objeto em torno do eixo X. Fonte: [1]

Também podemos espelhar o objeto com relação à origem, invertendo ambas coordenadas. Neste caso, a transformação seria dada por:

$$P' = MP, \text{ onde } M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se também adotar um eixo arbitrário A matriz de reflexão pode ser derivada pela composição de uma sequência de matrizes de reflexão e de rotação. Por exemplo, se a reflexão for em torno da linha diagonal definida por y = x, a matriz de reflexão pode ser derivada da combinação das seguintes transformações:

1. rotação de 45º na direção horária para fazer a linha y = x coincidir com o eixo x.
2. reflexão em torno do eixo x.
3. rotação de 45º na direção anti-horária para retomar a orientação original da linha y = x.

4.2 Cisalhamento (*Shearing*)

A transformação de cisalhamento provoca uma distorção do objeto em uma de suas coordenadas ou em ambas. Uma distorção na direção x, em coordenadas homogêneas fica na forma: $T(x_p, y_p, 1) = (x_p+s_{hx}* y_p, y_p, 1)$. Em forma matricial, temos que:

$$P' = S_{h(x\_ref)}P, \text{ onde } M = \begin{bmatrix} -1 & s_{hx} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente podemos querer distorcer o objeto alterando sua coordenada y. A transformação fica na forma $T(x_p, y_p, 1) = (x_p, y_p+s_{hy}* x_p, 1)$. Em forma matricial, temos que:

$$P' = S_{h(x\_ref)}P, \text{ onde } M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s_{hy} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Composição de Transformações 2D

Usa-se composição como uma combinação de matrizes de transformação R, S e T com o propósito de se ter uma maior eficiência. Esta é obtida ao aplicar-se uma transformação composta a um ponto em vez de aplicar-lhe uma série de transformações, uma após a outra [1].

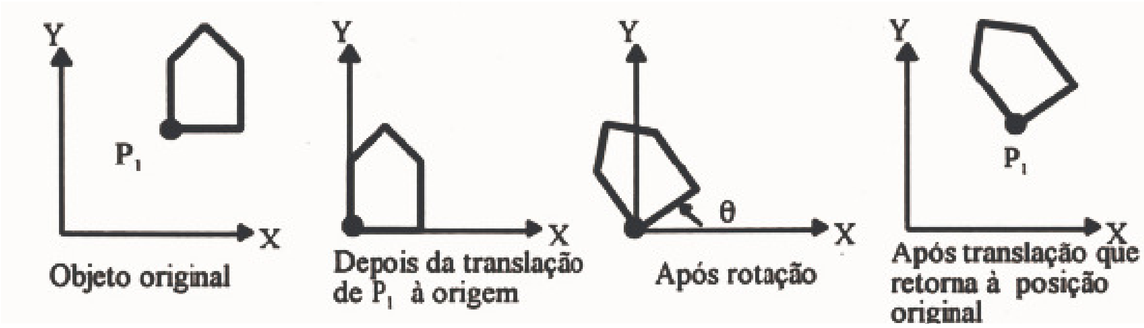
Exemplo 1: Rotação de um objeto em torno de um ponto arbitrário P1.

Passos:

1) Translação leva P1 à origem

2) Efetua rotação

3) Efetua translação oposta



Rotação em relação a um ponto P1 (q) . Fonte: [1]

Esta seqüência é ilustrada acima, onde a casa é rotacionada em relação a P1(x1, y1). A primeira translação é por (–x1,–y1), e a última translação (oposta a primeira) é por (x1, y1). A transformação em seqüência é:

$$T(x_1, y_1) \cdot R(\theta) \cdot T(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1(1-\cos\theta) + y_1.\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta) + x_1.\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Escala em relação a um ponto arbitrário P1.

Passos:

1) Translação leva P1 à origem

2) Efetua Escala

3) Efetua translação oposta

Primeiramente o ponto P1 é transladado para a origem, então é feita a escala desejada, e então o ponto P1 é transladado de volta. Dessa forma, a transformação em seqüência é:

$$T(x_1, y_1) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

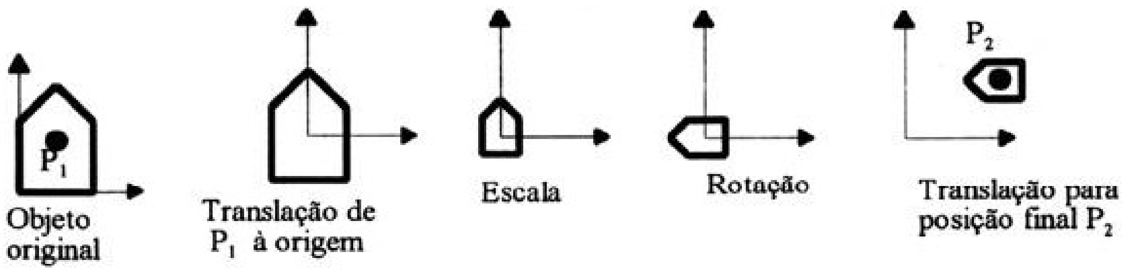
Exemplo 3: Escala e Rotação em relação a P1, posicionamento em P2.

Passos:

1) Transladar P1(x1, y1) para a origem;

2) Efetuar a escala e a rotação desejadas;

3) Efetuar a translação da origem para a nova posição P2(x2, y2), onde a casa deve ser posicionada.



Escala e rotação de uma casa em relação ao ponto P1. Fonte: [1]

$T(x_2, y_2) . R(\_) . S(s_x, s_y) . T(-x_1,-y_1)$ é a matriz da Transformação composta.

Obs.: Se M_1 e M_2 representam duas transformações fundamentais (translação, rotação ou escala), em que casos $M_1 . M_2 = M_2 . M_1$? Isto é, quando suas matrizes de transformação comutam? Sabe-se que geralmente a multiplicação de matrizes não é comutativa. Entretanto é fácil mostrar que nos seguintes casos especiais esta comutatividade existe (Tabela abaixo).

Transformações Comutativas

M_1	M_2
Translação	Translação
Escala	Escala
Rotação	Rotação
Escala(s, s)	Rotação

Nestes casos não se precisa estar atento a ordem de construção da matriz de transformação.

- Eficiência

Uma composição genérica de transformações R, S e T, produz uma matriz da forma:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A submatriz 2x2 superior esquerda, é uma composição das matrizes de rotação e escala, enquanto t_x e t_y são obtidos por influência da translação. Ao calcularmos M*P (um vetor de 3 elementos multiplicado por uma matriz 3x3), verificamos que são necessárias 9 multiplicações e 6 adições. Mas, como a última linha da matriz é fixa, os cálculos efetivamente necessários são:

$$x' = x.r_{11} + y.r_{12} + t_x$$
$$y' = x.r_{21} + y.r_{22} + t_y$$

o que reduz o processo a quatro multiplicações e duas adições, o que é um ganho significante em termos de eficiência. Especialmente se considerarmos que esta operação deve ser aplicada a centenas ou mesmo milhares de pontos por cena ou figura.

6. Transformações Básicas em 3D

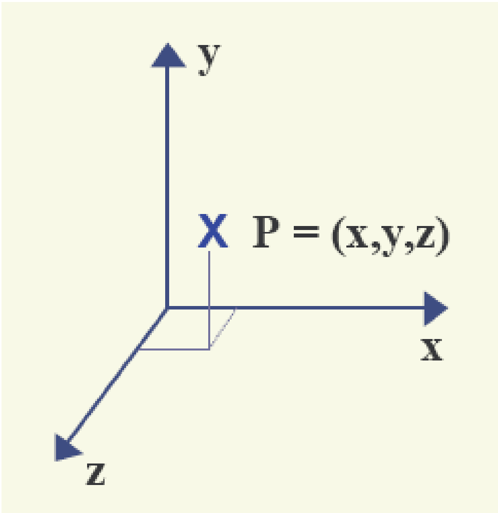
A capacidade para representar e visualizar um objeto em três dimensões é fundamental para a percepção de sua forma. Porém, em muitas situações é necessário mais do que isto, ou seja, poder "manusear" o objeto, movimentando-o através de rotações, translações e mesmo escala.

Assim, generalizando o que foi visto para TG em 2D, as TGs em 3D serão representadas por matrizes 4x4 também em coordenadas homogêneas.

Primeiro, será apresentado uma breve introdução ao sistema de coordenadas 3D, e nos sub-tópicos anteriores as transformações básicas em 3D.

- **Sistemas de Coordenadas**

Representam uma forma de indexar e localizar elementos no espaço (que é 3D). Os Eixos com orientação formam o Sistema de Coordenadas Cartesianas. Dado um ponto P, ele é definido por uma tripla de coordenadas (x,y,z) e é representado no eixo de coordenadas como mostra a figura abaixo.



Ponto P no eixo de coordenadas. Fonte: [1]

O sistema de coordenadas para 3D utilizado será o da Regra da Mão Direita, com o eixo Z perpendicular ao papel e saindo em direção ao observador.

O sentido positivo de uma rotação é dado quando observando-se sobre um eixo positivo em direção à origem, uma rotação de 90° irá levar um eixo positivo em outro positivo. Ou conforme a tabela a baixo.

Eixo de Rotação	Direção da Rotação Positiva
x	y para z
y	z para x
z	x para y

A Regra da Mão Direita foi escolhida porque este é o padrão utilizado na matemática (é só se lembrar da definição do produto vetorial).

6.1 Translação

A translação em 3D pode ser vista como simplesmente uma extensão a partir da translação 2D, ou seja, sua representação em coordenadas homogêneas fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde d_x, d_y e d_z representam o vetor de translação; x, y e z as coordenadas iniciais e x', y' e z' as coordenadas finais. Simplificando para cada eixo fica:

$$x' = x + d_x$$

$$y' = y + d_y$$

$$z' = z + d_z$$

Esta transformação pode também ser representada por:

$$P' = T(d_x, d_y, d_z) \cdot P$$

onde *T* representa a função de translação, *P* posição inicial do ponto P e *P'* a posição final após a translação.

6.2Escala

Analogamente ao que foi feito em translação 3D com relação a translação 2D acontece com a transformação de escala em 3D com relação a 2D. Sua representação em coordenadas homogêneas fica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde s_x, s_y e s_z representam o vetor de fator de escala. Simplificando para cada eixo fica:

$$x' = x*s_x$$

$$y' = y*s_y$$

$$z' = z*s_z$$

E ela pode ser representada também como

$$P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$

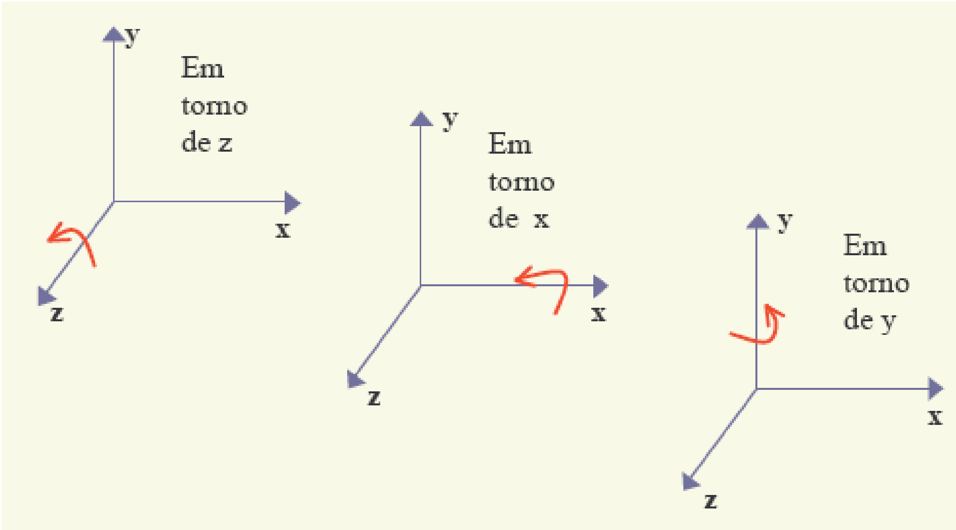
onde *S* é a função de escala.

6.3Rotação

Em 2D, a rotação se dá em torno de um ponto (1D). Em 3D é necessário especificar uma reta (2D), em torno da qual a rotação ocorrerá.

Um objeto é rotacionado de um ângulo específico em torno de um eixo: em torno do eixo x, em torno do eixo y, em torno do eixo z ou em torno de um eixo generalizado.

Seguindo o que foi dito do tópico de sistema de coordenadas, os sentidos de rotação positiva em torno dos eixos seguem a regra da mão direita, como mostram a figura a baixo.



Rotação positiva em torno dos eixos. Fonte: [1]

- Rotação em torno do eixo *z*

A equação em da rotação em torno do eixo *z* é dada por:

$$x' = x*\cos(\theta) - y*\text{sen}(\theta)$$
$$y' = x*\text{sen}(\theta) + y*\cos(\theta)$$
$$z' = z$$

Em coordenadas homogêneas, ela segue como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$P' = R_z(\theta)*P$$

- Rotação em torno do eixo *x*

A equação em da rotação em torno do eixo *x* é dada por:

$$x' = x$$
$$y' = y*\cos(\theta) - z*\text{sen}(\theta)$$
$$z' = y*\text{sen}(\theta) + z*\cos(\theta)$$

Em coordenadas homogêneas, ela segue como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$P' = R_x(\theta)*P$$

- Rotação em torno do eixo *y*

A equação em da rotação em torno do eixo *y* é dada por:

$$x' = z*\text{sen}(\theta) + x*\cos(\theta)$$
$$y' = y$$
$$z' = z*\cos(\theta) - x*\text{sen}(\theta)$$

Em coordenadas homogêneas, ela segue como:

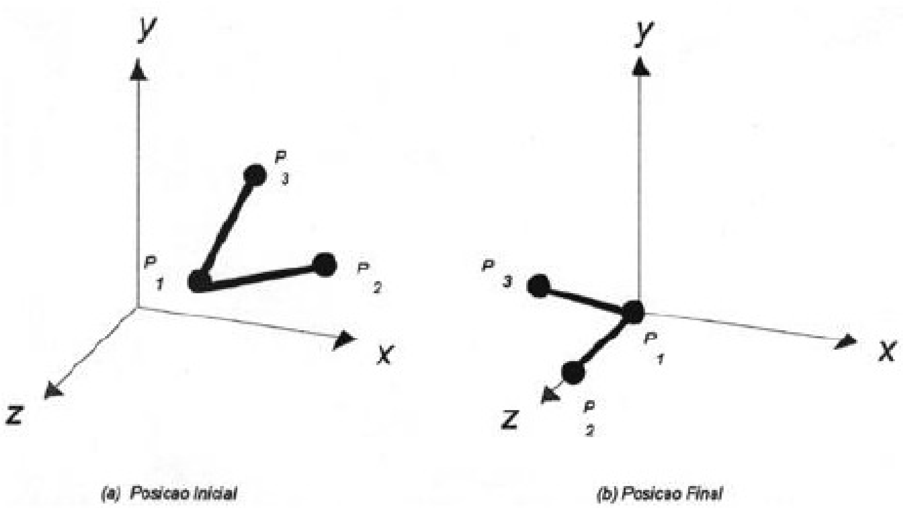
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$P' = R_y(\theta)*P$$

7. Composição de Transformações 3D

A composição de transformações em 3D pode ser entendida mais facilmente através de um exemplo representado pela figura abaixo indicado. O objetivo é transformar os segmentos de reta P1P2 e P1P3 da posição inicial em (a) para a posição final em (b). Assim o ponto P1 deve ser transladado para a origem, P1P2 deverá ficar sobre o eixo z positivo, e P1P3 deverá ficar no plano positivo de yz. Além disso, os comprimentos das linhas não devem ser alterados.



Transformando P_3, P_3 e P_3 da posição inicial em (a) para a posição final em (b). Fonte: [1]

Uma primeira maneira de se obter a transformação desejada é através da composição das primitivas de transformação T, R_x, R_y e R_z.

Subdividindo o problema, teremos os seguintes passos:

1. Transladar P1 para a origem.

2. Rotacionar o segmento P1P2 em relação ao eixo y, de forma que ele (P1P2) fique no plano yz.
3. Rotacionar o segmento P1P2 em relação ao eixo x, de forma que ele (P1P2) fique sobre o eixo z.
4. Rotacionar o segmento P1P3 em relação ao eixo z, de forma que ele (P1P3) fique no plano yz.

- Primeiro Passo: Translação de P1 = (x1,y1,z1) para a origem.

  A equação de translação é:

$$T(-x_1,-y_1,-z_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então transladando P1 para a origem tem-se:

$$P_1' = T(-x_1,-y_1,-z_1) \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2' = T(-x_1,-y_1,-z_1) \cdot P_2 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

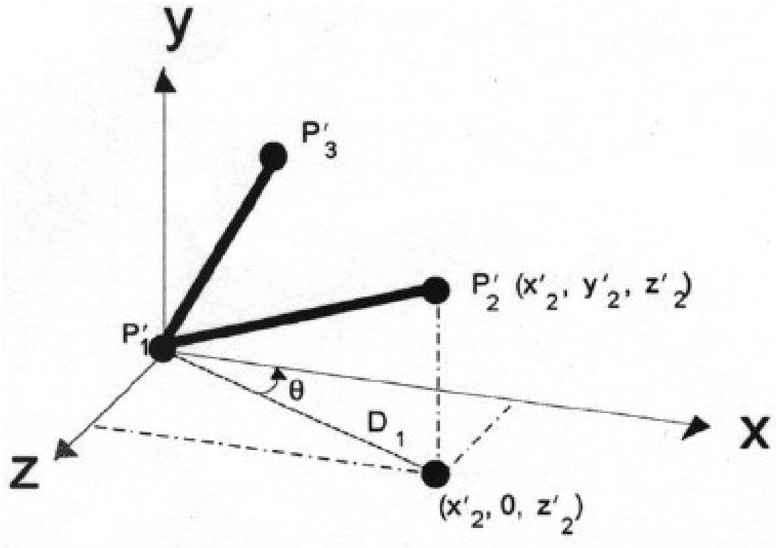
$$P_3' = T(-x_1,-y_1,-z_1) \cdot P_3 = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Segundo Passo: Rotação de P1P2 em torno do eixo y, colocando P1P2 no plano yz (Matriz).

  O ângulo de rotação é ɵ.

  - Lembretes: cos(ɵ-90) = sin(ɵ), e cos(ɵ-90) = -cos(ɵ)

Ry(-(90-ɵ)) = Ry (ɵ-90)



Rotação dos pontos P1, P2 e P3. Fonte: [1]

cos (ɵ-90) = sen(ɵ) = z2’/D1=(z2-z1)/D1

sen(ɵ-90) = -cos (ɵ) = -x2’/D1 = -(x2-x1)/D1

onde

$$D_1 = \sqrt{(z_2')^2 + (x_2')^2} = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

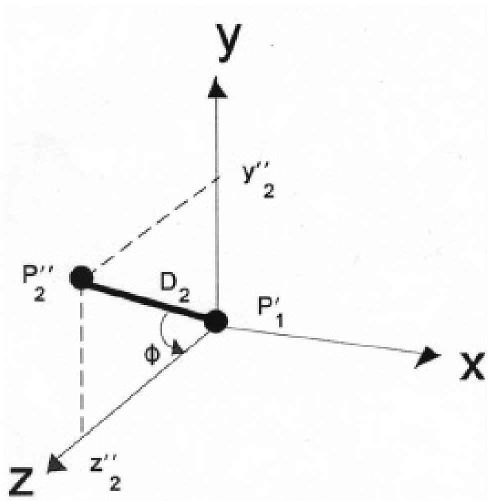
então, o resultado da rotação do ponto P2’ para a nova posição P2’’ é

$$P_2'' = R_y(\theta - 90^o) \cdot P_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - y_1 \\ D_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta\text{-}90) = \begin{pmatrix} \cos(\theta-90) & 0 & \text{sen}(\theta-90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta-90) & & \cos(\theta-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (z2-z1)/D1 & 0 & -(x2-x1)/D1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (x2-x1)/D1 & & (z2-z1)/D1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Terceiro Passo: Rotação de P1’’P2’’ em relação ao eixo x, colocando P1’P2’’ sobre o eixo x.



Rotação em relação ao eixo x. P1 e P2 de comprimento D2 é rotacionado em direção ao eixo z, pelo ângulo positivo. Fonte: [1]

O ângulo de rotação é Φ. E

$$\cos\phi = \frac{z''_2}{D_2}$$
$$\sin\phi = \frac{y''_2}{D_2}$$

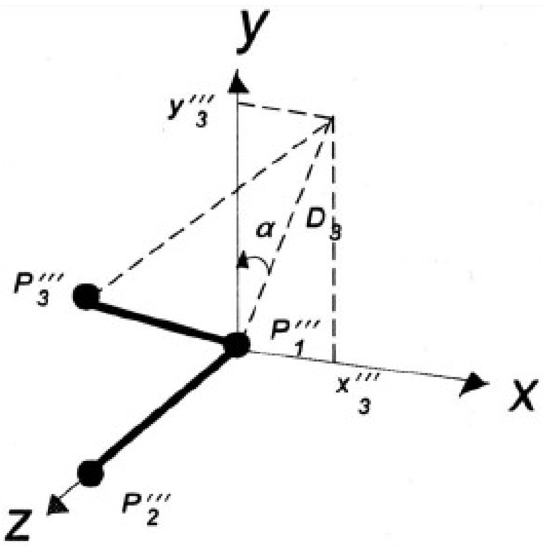
onde,

$$D_2 = |P_1''P_2''| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

O resultado da rotação no terceiro passo é:

$$P_2''' = R_x(\phi) \cdot P_2'' = R_x(\phi) \cdot R_y(\theta - 90^o) \cdot P_2' = R_x(\phi) \cdot R_y(\theta - 90^o) \cdot T \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ |P_1P_2| \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Quarto Passo: Rotação de P1’’’P3’’’ em relação ao eixo z, colocando P1P3 no plano yz.



Rotação em relação ao eixo z. . Fonte: [1]

Após o terceiro passo, P1’’’P2’’’ situa-se sobre o eixo z e P3’’’ em

$$P_3''' = \begin{bmatrix} x_3''' \\ y_3''' \\ z_3''' \\ 1 \end{bmatrix} = R_x(\phi) \cdot R_y(\theta - 90^o) \cdot T(-x_1, -y_1, -z_1) \cdot P_3$$

A próxima rotação é dada pelo ângulo α. E

$$\cos \alpha = \frac{y_3'''}{D_3}$$

$$\sin \alpha = \frac{x_3'''}{D_3}$$

$$D_3 = \sqrt{x_3'''^2 + y_3'''^2}$$

Para chegar na posição final, P3''' será então rotacionado usando a função:

P3''''= Rz (α) *P3'''

A matriz de composição M é a transformação necessária à composição solicitada no exemplo.

$$M = R_x(\alpha) \cdot R_x(\phi) \cdot R_y(\theta - 90^o) \cdot T(-x_1, -y_1, -z_1) = R \cdot T$$

Então para todos os pontos da figura, basta aplicar:

$$P_{final} = M*P_{inicial}$$

8. Exercício

Mapa da Mina
Baseando-se nas passos abaixo, encontre a matriz de transformação para achar o tesouro.
– Marque o seu ponto inicial com um X na areia. X está na linha do equador
– Caminhe no deserto para o nordeste até encontrar um grande cacto.
– A partir dele, percorra 30 graus em sentido anti-horário, considerando X como ponto central.
– Marque um Y na areia neste ponto, e caminhe para o sul a um ponto D, tal que distancia de D até o eixo equatorial seja igual a distancia de Y até este mesmo eixo
– Caminhe 10 metros para o oeste.
– percorra 60 graus no sentido horário considerando Y como ponto central
– Caminhe 20 metros para o leste.
– Cave até encontrar o tesouro!!!

Referências

[1] Traina, A.; Oliveira, M. C. *Apostila de Computação Gráfica*. ICMC-USP 2006, pag 50-68.

[2] Transformação geométrica. In Wikipedia "http://pt.wikipedia.org/wiki/Transforma%C3%A7%C3%A3o_geom%C3%A9trica", acessado em 20/03/2007.

[3] Slides de Aula. In Rosane: SCE 201 – SCE 5799 Computção Gráfica "http://www.lcad.icmc.usp.br/~rosane/CG/aulas.html", Transformações 2D e Transformações 3D, acessado em 20/03/2007.

[4] Ladeira, L. A. C. Álgera Linear e Equações Diferenciais. pp 137-138.