# SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS HIPERBÓLICOS DEGENERADOS

**ANDRÉ VICENTE**

Orientador: CÍCERO LOPES FROTA

Departamento de Matemática - UEM

Outubro de 2002

# SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS HIPERBÓLICOS DEGENERADOS

por


# ANDRÉ VICENTE


DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Aprovada por:

Cícero Lopes Frota (Presidente) ......................................................

Juan Amadeo Soriano Palomino ......................................................

Luiz Pedro San Gil Jutuca ......................................................

Maringá
02 de outubro de 2002.

# Agradecimentos

Ao professor Cícero Lopes Frota, pela excelente orientação, atenção e disponibilidade.

A minha família pelo apoio sempre que necessário.

Aos amigos Marcos A. Verdi e João B. Zanardini pela agradável convivência durante esta jornada.

# Resumo


Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de solução global do problema de valores iniciais e de fronteira para a equação hiperbólica degenerada:

$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + 2\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{em} & \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em} & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) = u_1(x) & \text{em} & \Omega, \end{array} \right.$$

onde $M(\lambda) = \lambda^\alpha$ com $\alpha \geq 1$, $\forall\ \lambda \geq 0$, $\Omega$ é um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Além disso, estudamos o comportamento assintótico da solução.

# Abstract


In this work we study the existence and uniqueness of global solution of the initial boundary value problem for degenerate hyperbolic equation:

$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + 2\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{in} & \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on} & \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) = u_1(x) & \text{in} & \Omega, \end{array} \right.$$

where $M(\lambda) = \lambda^\alpha$ with $\alpha \geq 1$, $\forall\ \lambda \geq 0$, $\Omega$ is a bounded regular open in $\mathbb{R}^n$. Moreover, we study the asymptotic behaviour of the solution.

# Sumário

# Introdução

Em 1.883 G. Kirchhoff [10] deduziu a seguinte equação diferencial parcial como um modelo não linear para as vibrações transversais de um corda elástica de comprimento L, presa nos extremos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{P_0}{\rho h} + \frac{E}{2L\rho} \int_0^L \left| \frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, t) \right|^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

onde

- $u(x,t)$ é o deslocamento do ponto $x$ no instante de tempo $t$;
- E é o módulo de Young do material;
- $P_0$ é a tensão axial inicial;
- h é a área da seção tranversal da corda;
- $\rho$ é a densidade de massa.

A generalização natural, para o caso n-dimensional, do problema misto associado à equação (1) é o problema:

$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left( \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f & \text{em} & Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em} & \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) = u_1(x) & \text{em} & \Omega, \end{array} \right. \tag{2}$$

onde $\Omega$ é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular $\Gamma$, $T > 0$; e $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função real não negativa.

No problema (2), conforme mencionamos acima, a função $M$ é não negativa. Além disso, motivado pelo caso unidimensional quando a tensão axial inicial é não nula ($P_0 > 0$), considera-se a hipótese adicional:

$$0 < m_0 \leq M(\lambda), \; \forall \; \lambda \geq 0 \tag{3}$$

e neste caso, diz-se que o problema é não degenerado.

O estudo matemático do problema (2) começou com S. Bernstein [2] e R. W. Dickey [7] que estudaram o caso unidimensional, não degenerado e dados iniciais analíticos. Já em 1.975, S. I. Pohozhaev [21], investigou o caso n-dimensional, também para dados analíticos. Em 1.977, J. L. Lions [12], formulou os resultados de Pohozhaev num contexto de espaços de Hilbert abstrato, obtendo resultados mais claros e apresentando uma coleção de problemas os quais abriram uma ampla linha de pesquisa ainda bem ativa nos dias atuais.

Considerando o problema (2), não degenerado, com dados iniciais não analíticos a existência de solução local pode ser vista em P. H. Rivera Rodrigues [22], entretanto a existência de solução global é um problema em aberto. Na busca de solvabilidade global, acrescenta-se efeitos dissipativos passando-se, por exemplo, ao problema:

$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + 2\gamma\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 & \text{em} & Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em} & \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \; \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0) = u_1(x) & \text{em} & \Omega, \end{array} \right. \tag{4}$$

onde $\gamma$ é uma constante positiva. Neste caso, com a hipótese de dados iniciais pequenos, em E. H. Brito [4] prova-se a existência e unicidade de solução global, bem como, decaimento (comportamento assintótico). No lugar do termo dissipativo $2\gamma u'$ pode-se também considerar dissipações do tipo $-\Delta u'$ ou $(-\Delta)^\alpha u'$, conforme L. A. Medeiros - M. Milla Miranda [15].

Por outro lado, quando $M$ não satisfaz a hipótese (3), ou seja, temos simplesmente $M(\lambda) \geq 0, \; \forall \; \lambda \geq 0$, então os problemas (2) e (4) são ditos degenerados. Os casos degenerados provocam enormes dificuldades e as técnicas utilizadas para o estudo dos casos não degenerados não funcionam. Além disso, o comportamento da solução é alterado. Em função disso, a existência de solução global, no caso degenerado e dados iniciais não analíticos, para uma função $M$ geral é ainda um problema em aberto.

O objetivo principal desta dissertação é apresentar um estudo sobre a existência, unicidade e comportamento assintótico de solução global para o problema (4), no caso particular degenerado em que $M(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\alpha \geq 1$, conforme K. Nishihara - Y. Yamada [20].

Para completude do trabalho e para facilitar a análise acerca das diferenças entre os casos degenerado e o não degenerado, apresentamos também um estudo sobre a existência, unicidade e comportamento assintótico de solução global para o problema (4) no caso não degenerado.

Ainda sobre o caso degenerado, para o problema (2) com dados iniciais analíticos, podemos citar A. Arozio- S. Spagnolo [1], P. D'Ancona - S. Spagnolo [6] e S. Spagnolo [23]. Para dados iniciais não analíticos, Y. Ebihara [8] e Y. Ebihara - L. A. Medeiros - M. Milla Miranda [9], obtiveram resultados de existência e unicidade de solução local.

A dissertação esta dividida em três capítulos. No capítulo 1 fixamos a notação e apresentamos os resultados preliminares que serão usados. No segundo capítulo estudamos o problema (4) no caso não degenerado e no terceiro e último capítulo estudamos o problema (4) no caso degenerado com $M(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\alpha \geq 1$.

É importante notar que todos os resultados aqui apresentados continuam válidos, sem alteração alguma, quando ao invés do operador $-\Delta$, $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ considerarmos um contexto abstrato onde: $V$ e $H$ são espaços de Hilbert tais que $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ e $V$ denso em $H$, $a(u,v) : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva e $A$ o operador definido pela terna $(V, H, a(u,v))$. Neste contexto, o problema (4) toma a forma:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - M\left(|A^{\frac{1}{2}}u|\right) Au + 2\gamma u' = 0 \quad \text{em} \quad H, \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1, \end{array} \right.$$

cuja existência, unicidade e comportamento assintótico de solução global, no caso não degenarado, pode ser vista em E. H. Brito [4] e, no caso degenerado com $M(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\alpha \geq 1$, em K. Nishihara - Y. Yamada [20]. Adotamos o modelo concreto para obter uma maior clareza num primeiro contato com o problema.

# Capítulo 1

# Resultados Preliminares

Nesse capítulo estabeleceremos as notações e apresentaremos em forma de proposições os resultados básicos que serão usados nos capítulos posteriores.

## 1.1 Topologias Fraca e Fraca Estrela

Uma propriedade importante das topologias é que se uma topologia possui menos abertos então ela possui mais compactos, e estes por sua vez são importantes para os teoremas de existência. De forma breve apresentaremos aqui duas topologias menos fina, isto é, possuem menos abertos que a topologia da norma, esta última chamamos de topologia forte.

Seja $E$ um espaço de Banach com dual $E'$ . A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre $E$ é a topologia menos fina sobre $E$ que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$. Quando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x$ em $E$ segundo a topologia fraca denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ em $E$. Temos a seguinte proposição:

**Proposição 1.1** *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência num espaço de Banach $E$. Então*

**(a)** $x_n \rightharpoonup x$ *em* $E \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle,\ \forall\ f \in E'$.

**(b)** *Se* $x_n \to x$ *em* $E$*, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $E$.

**(c)** *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $E$*, então* $\|x_n\|$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

**(d)** *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $E$ *e* $f_n \to f$ *em* $E'$*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

**Demonstração:** Ver [3]. Página 35.

Vale ressaltar aqui que se $E$ tem dimensão finita, então as topologias forte e fraca coincidem.

Sobre $E'$ temos duas topologias: a topologia forte, associada a norma, e a topologia fraca $\sigma(E', E'')$. Podemos ter uma terceira topologia, para isso seja $x \in E$ fixo e defina

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle J_x, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E} \end{array}$$

verifica-se que $J_x$ é linear e contínua, portanto $(J_x)_{x \in E}$ é uma família de elementos de $E''$. A topologia menos fina de $E'$ que torna contínuas todas as aplicações da família $(J_x)_{x \in E}$ é chamada topologia fraca estrela, denotada por $\sigma(E', E)$. Quando $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f$ segundo essa topologia escrevemos: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $E'$. Note que quando $E$ é reflexivo $(E = E'')$ as topologias fraca e fraca estrela coincidem. Temos os seguintes resultados:

**Proposição 1.2** *Sejam $E$ um espaço de Banach e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $E'$. Então*

**(a)** $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $E' \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall\, x \in E$.

**(b)** *Se* $f_n \rightarrow f$ *em* $E'$, *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $E'$.

**(c)** *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $E'$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $E'$.

**(d)** *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $E'$, *então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

**(e)** *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $E'$ *e* $x_n \rightarrow x$ *em* $E$, *então* $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

**Demonstração:** Ver [3]. Página 40.

Destacamos ainda

**Proposição 1.3** *Sejam $E$ um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $E'$. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela.*

**Demonstração:** Ver [3]. Página 50.

**Proposição 1.4** *Sejam $E$ um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $E$. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca.*

**Demonstração:** Ver [3]. Página 50.

## 1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre $\Omega$. A norma em $L^p(\Omega)$ é dada por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Para o caso em que $p = \infty$ definimos $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis que são essencialmente limitadas e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c;\ |u(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\},$$

é uma norma em $L^\infty(\Omega)$. Temos que

**Proposição 1.5** *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

**Demonstração:** Ver [3]. Página 57.

**Proposição 1.6 (Desigualdade de Hölder)** *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)},$$

*onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

**Demonstração:** Ver [3]. Página 56.

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Nesta dissertação, denotaremos o produto interno e norma em $L^2(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_\Omega u(x)v(x)dx, \\ |u|^2 &= \int_\Omega |u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Um resultado importante é a proposição abaixo, a qual permite identificar o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Proposição 1.7 (Teorema da Representação de Riesz)** *Sejam* $1 < p < \infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall \ v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

**Demonstração:** Ver [3]. Página 61.

Quando $p = \infty$, temos

**Proposição 1.8** *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. *Então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall \ v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

**Demonstração:** Ver [3]. Página 63.

Para finalizar esta seção denotamos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções que são integráveis a Lebesgue sobre cada compacto de $\Omega$.

## 1.3 Distribuições

No estudo de equações diferenciais parciais, para que seja possível resolver problemas em que os dados iniciais não possuem derivada no sentido clássico surge a necessidade de se obter um novo conceito de derivada. Por volta de 1.936, Sobolev introduziu o conceito de derivada fraca que apresentou o aspecto negativo de que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. Isto ocorreu pelo fato de se exigir que a derivada fosse uma função localmente integrável. Em 1.945, Schwartz apresentou o conceito de distribuição que eliminou este incoveniente da derivada fraca. Além disso se uma função possui derivada no sentido clássico, então ela coincidirá com a derivada distribucional, portanto temos uma generalização do conceito de derivada. Nesta seção faremos uma breve introdução ao estudo das distribuições, apresentando as notações e resultados que serão usados posteriormente.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice, denotamos $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ e definimos

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \ldots \partial^{k_n} x_n},$$

o operador derivação de ordem $|k|$. Quando $|k| = 0$, define-se $D^0 u = u$, para todo $u$.

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotamos o espaço das funções testes em $\Omega$. Denomina-se distribuição sobre $\Omega$ a toda forma linear e contínua, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$. O conjunto de todas as distribuições sobre $\Omega$ é um espaço vetorial o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre $\Omega$. Neste espaço introduzimos a seguinte noção de convergência: uma sequência $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a sequência numérica $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$.

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u$ definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição sobre $\Omega$.

**Proposição 1.9 (Lema de Du Bois Raymond)** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ q. s. em $\Omega$.*

**Demonstração:** Ver [16]. Página 10.

Desta proposição tem-se que $T_u$ fica univocamente determinada por $u$ q. s. sobre $\Omega$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se e somente se $u = v$ q. s. em $\Omega$. Por este motivo, identifica-se $u$ com a distribuição $T_u$ por ela definida.

Ressaltamos aqui que existem distribuições não definidas por funções $L^1_{loc}(\Omega)$, pode-se ver um exemplo em [13], página 28. Desta forma vemos que o conceito de distribuição generaliza o de função localmente integrável.

**Proposição 1.10** *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, tal que $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

**Demonstração:** Ver [16]. Página 13.

Define-se a derivada de ordem $\alpha$ de uma distribuição $T$ sobre $\Omega$ como segue:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle \,, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição. Com isso temos que toda distribuição sobre $\Omega$ possui derivada de todas as ordens, que ainda é uma distribuição sobre $\Omega$. Além disso, o operador derivação $D^k : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínuo.

## 1.4 Espaços $L^p(0,T;V)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $V$ um espaço de Hilbert e $0 < T < \infty$. Define-se $L^p(0,T;V)$ como sendo o espaço de Banach formado pelas funções vetoriais $u : (0,T) \to V$ tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_V$ é mensurável e $\|u(t)\|_V \in L^p(0,T)$. Quando $1 \leq p < \infty$ define-se em $L^p(0,T;V)$ a norma:

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

quando $p = \infty$, temos

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \sup_{0<t<T} \text{ess}\|u(t)\|_V.$$

Para o caso em que $p = 2$, temos que $L^2(0,T;V)$ é um espaço de Hilbert, com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t),v(t))_V \, dt.$$

Um resultado importante a respeito dos espaços $L^p(0,T;V)$ é o que permite fazer a identificação $(L^p(0,T;V))' \approx L^q(0,T;V')$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, para o caso em que $p = 1$, identifica-se $(L^1(0,T;V))' \approx L^\infty(0,T;V')$. Faremos agora o caso em que $p = 1$ e $V = L^2(\Omega)$. Para isso defina

$$\begin{array}{rcl} F : L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) & \to & \left(L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right)\right)' \\ u & \mapsto & F(u) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} F(u) : L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right) & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \langle F(u),\xi\rangle = \displaystyle\int_0^T \langle \xi(t),u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} \, dt \end{array}$$

$F$ é linear, contínua e bijetiva. Deste modo fazemos a identificação:

$$L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \approx \left(L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right)\right)',$$

e os elementos de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ podem ser vistos como elementos do dual de $L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$. Então quando dizemos que

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

temos que

$$\langle u_\nu, \xi\rangle \to \langle u,\xi\rangle_{(L^1(0,T;(L^2(\Omega))'))'\times L^1(0,T;(L^2(\Omega))')},\ \forall\,\xi\in L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right),$$

o que significa que

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_0^T \langle \xi(t), u_\nu(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}\,dt & \to & \displaystyle\int_0^T \langle \xi(t), u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}\,dt, \\ & \forall & \xi\in L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right).\end{array} \tag{1.1}$$

Temos agora a seguinte proposição

**Proposição 1.11** *Se $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então $u_\nu \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.*

**Demonstração:**
Dada $h\in\left(L^2(0,T;L^2(\Omega))\right)'$, pelo teorema de Riesz existe uma única $\varphi_h\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\langle h,w\rangle_{(L^2(Q))'\times L^2(Q)} = (\varphi_h, w)_{L^2(Q)}\ \forall\, w\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) = L^2(Q).$$

Considere

$$\begin{array}{rcl}\xi:(0,T) & \to & \left(L^2(\Omega)\right)' \\ t & \mapsto & \xi(t),\end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcl}\xi(t): L^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle \xi(t), f\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} = (\varphi_h, f).\end{array}$$

Então $\xi\in L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right)$. Pela hipótese e considerando em (1.1) a função $\xi$ acima definida, segue que

$$\int_0^T (\varphi_h, u_\nu(t))\, dt \to \int_0^T (\varphi_h, u(t))\, dt.$$

Entretanto note que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\varphi_h, u_\nu(t))\, dt &= \int_Q \varphi_h(x,t) u_\nu(x,t) dx dt = (\varphi_h, u_\nu)_{L^2(Q)} \\ &= \langle h, u_\nu \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

e analogamente

$$\int_0^T (\varphi_h, u(t))\, dt = \langle h, u \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Portanto:

$$\langle h, u_\nu \rangle \to \langle h, u \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \ \forall\, h \in \left(L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right)',$$

ou seja

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

$\square$

Uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ é qualquer aplicação linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em $V$, o espaço das distribuições vetoriais representaremos por $\mathcal{D}'(0,T;V)$.

Considere $u \in L^p(0,T;V)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, a integral (integral de Bochner)

$$\int_0^T u(t)\varphi(t) dt$$

existe como um vetor de $V$, então

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(0,T) &\to V \\ \varphi &\mapsto \int_0^T u(t)\varphi(t) dt \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, isto é, $T_u$ é uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$. A distribuição $T_u$ é univocamente determinada por u e com isso fazemos a identificação $u \approx T_u$.

Define-se a derivada de uma distribuição vetorial como segue: sejam $u \in \mathcal{D}'(0,T;V)$ e $n \geq 0$, a derivada de ordem $n$ de $u$ é dada por

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \varphi}{dt} \right\rangle, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Seja $V$ um espaço de Banach. Representamos por $C\left([0,T];V\right)$ o espaço das funções vetoriais $u$ de $[0,T]$ com valores em $V$, tais que $t \mapsto \|u(t)\|_V$ é contínua em $[0,T]$. A norma em $C\left([0,T];V\right)$ é dada por

$$\|u\|_{C([0,T];V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V.$$

Dizemos que $u \in C_w\left([0,T];V\right)$ quando a aplicação $t \mapsto \langle \xi, u(t) \rangle_{V' \times V}$ é contínua em $[0,T]$, $\forall\ \xi \in V$. Com respeito a estes espaços, temos

**Proposição 1.12** *Sejam $V$ e $H$ dois espaços de Hilbert e $1 \leq p \leq \infty$. Se $V \hookrightarrow H$ e $u \in L^p\left(0,T;V\right)$ com $u' \in L^p\left(0,T;H\right)$, então $u \in C\left([0,T];H\right) \cap C_w\left([0,T];V\right)$.*

**Demonstração:** [12].

## 1.5 Espaços de Sobolev

Consideremos $\Omega$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma$ bem regular. Definimos o espaço de Sobolev como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha$ é o operador de derivação de ordem $\alpha$, no sentido das distribuições. Este espaço está munido da seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Em especial, quando $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert que denotamos por $H^m(\Omega)$. O fato que, em geral, $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso em $H^m(\Omega)$ nos motiva a definir um novo espaço

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)},$$

que é um espaço de Hilbert quando munido da topologia induzida do $H^m(\Omega)$. Representamos o dual de $H_0^m(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

A desigualdade abaixo nos permite estabelecer uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente a norma induzida por $H^1(\Omega)$.

**Proposição 1.13 (Desigualdade de Poincaré)** *Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ limitado em alguma direção $x_i$. Então*

$$|u| \leq (b-a)|\nabla u|, \ \ u \in H_0^1(\Omega),$$

*onde $proj_i \Omega \subset (a,b)$.*

**Demonstração:** Ver [16]. Página 36.

A aplicação $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla u|$ define uma norma em $H_0^1(\Omega)$ a qual denotaremos simplesmente por $\|u\|$. De posse da desigualdade de Poincaré, verifica-se facilmente que esta norma é equivalente a norma usual, induzida por $H^1(\Omega)$. Associado a essa norma temos o produto interno

$$((u,v)) = (\nabla u, \nabla v)\,.$$

No espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ utilizaremos a norma, equivalente a usual induzida por $H^2(\Omega)$, dada por

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)} = |\Delta u|.$$

## 1.6 Teorema Espectral

Na resolução de equações diferenciais parciais é necessário a obtenção de bases convenientes, o teorema Espectral constitui numa ferramenta para obtê-las. Considere $V$ e $H$ dois espaços de Hilbert complexos tal que $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ e $V$ é denso em $H$, seja também $a(u,v)$

uma forma sesquilinear, hermitiana e contínua em $V \times V$ tal que existem $\alpha_0$ e $\alpha$ em $\mathbb{R}$, com $\alpha > 0$, satisfazendo

$$\mathrm{Re}[a(v,v) + \alpha_0 (v,v)_H] \geq \alpha \|v\|_V^2, \ \forall \ v \in V.$$

Considere

$$D(A) = \{u \in V; \text{ a forma antilinear } v \mapsto a(u,v) \text{ é contínua}\},$$

onde $V$ está munido com a topologia de $H$. Sendo $V$ denso em $H$ podemos prolongar $v \mapsto a(u,v)$ a todo $H$. Pelo teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$ tal que $a(u,v) = (Au,v)_H$, $\forall \ v \in V$. Note que desta forma definimos um operador $A$ com domínio

$$D(A) = \{u \in V; \ \exists \ f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H, \ \forall \ v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

Portanto, daqui temos que $D(A)$ é um subespaço linear de $H$ e $A : D(A) \subset V \to H$ é um operador de $H$. Assim diremos que $A$ é definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$.

**Proposição 1.14 (Teorema Espectral)** *Nas condições acima, obtemos:*

**(i)** *$A$ é auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de $H$ constituido por vetores próprios de $A$.*

**(ii)** *Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os valores próprios de $A$ correspondentes aos $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ então*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_\nu \leq \ldots, \ \text{ e } \lambda_\nu \to \infty.$$

**(iii)** *O domínio de $A$ é dado por:*

$$D(A) = \left\{ u \in H; \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 |(u, \omega_\nu)_H|^2 < \infty \right\}.$$

**(iv)**

$$Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u, \omega_\nu)_H \omega_\nu, \ \forall \ u \in D(A).$$

**Demonstração:** Ver [18]. Página 127.

## 1.7 Resultados Gerais

Reunimos nesta seção outros resultados que serão usados nesta dissertação.

**Proposição 1.15 (Desigualdade de Young)** *Se a, b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

*sempre que* $1 < p < \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Demonstração:** Ver [14]. Página 75.

**Proposição 1.16 (Lema de Gronwall)** *Seja* $m \in L^1(a,b)$ *tal que* $m \geq 0$ *q. s. em* $(a,b)$ *e seja* $c \geq 0$. *Consideremos* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua verificando*

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t m(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ \forall \ t \in [a,b].$$

*Então*

$$\varphi(t) \leq ce^{\int_a^b m(\xi)d\xi}, \ \forall \ t \in [a,b].$$

**Demonstração:** Ver [13]. Página 198.

Agora temos dois resultados da teoria de E.D.O.. O teorema de Peano nos garante a existência de soluções local, e o outro nos permite, mediante a algumas hipóteses, estender a solução.

**Proposição 1.17 (Teorema de Peano)** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega$ *um aberto conexo contendo o retângulo:*

$$\mathcal{R} = \{(t,x), |x - x_0| \leq a, \ |t - t_0| \leq b\}$$

*(a e b são números reais não negativos) e* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *uma função contínua. Então existe pelo menos uma solução* $x = x(t)$ *do problema de Cauchy:*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \tag{1.2}$$

*num certo intervalo I (tendo* $t_0$ *como ponto interior).*

**Demonstração:** Ver [17]. Página 26.

**Proposição 1.18** *Sejam* $D = [0,T] \times B$*,* $T > 0$ *finito,* $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq b\}$*,* $b > 0$ *e* $f$ *satisfazendo as seguintes hipóteses sobre* $D$*:*

**(a)** $f(t,x)$ *é mensurável em* $t$ *para cada* $x$ *fixado;*

**(b)** $f(t,x)$ *é contínua em* $x$ *para quase todo* $t$ *fixado;*

**(c)** *Existe uma função* $m(t)$*, integrável em* $Proj_t D$*, tal que* $|f(x,t)| \leq m(t)$*.*

*Seja* $\varphi(t)$ *uma solução de*

$$\left| \begin{array}{ll} x' = f(t,x) & 0 \leq t \leq T_0 < T, \\ x(0) = x_0, & \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq b. \end{array} \right.$$

*Se* $\varphi(t) \leq M$*,* $\forall\ t \in [0,T]$*,* $M$ *independente de* $t \in [0,T]$*. Então* $\varphi$ *prolonga-se como solução do problema a todo intervalo* $[0,T]$*.*

**Demonstração:** Ver [5]. Página 15.

No estudo do comportamento assintótico usaremos o seguinte lema devido a Nakao.

**Proposição 1.19 (Lema de Nakao)** *Seja* $E$ *uma função não negativa e limitada definida em* $\mathbb{R}^+$*, satisfazendo a desigualdade*

$$\sup_{t \leq \xi \leq t+1} E(\xi)^{r+1} \leq C_0 \left[E(t) - E(t+1)\right],\ \forall\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.3}$$

*onde* $C_0$ *é uma constante positiva e* $r$ *é uma constante não negativa.*

**(i)** *Se* $r > 0$*, então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$E(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1}{r}},\ \forall\ t \geq 0.$$

**(ii)** *Se* $r = 0$*, então existem constantes positivas* $K$ *e* $\rho$ *tal que*

$$E(t) \leq Ke^{-\rho t},\ \forall\ t \geq 0.$$

**Demonstração:** Ver [19].

# Capítulo 2

# O Problema não Degenerado

Conforme citamos na introdução, neste capítulo apresentamos um estudo do problema (4) no caso não degenerado.

Em todo este capítulo, bem como no capítulo 3, $\Omega$ representa um subconjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma$ bem regular.

## 2.1 Existência e Unicidade de Solução Global

O resultado de existência e unicidade é dado pelo seguinte teorema:

**Teorema 2.1** *Seja $M \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$ satisfazendo*

$$0 < m_0 \leq M(\lambda), \ \forall \ \lambda \geq 0. \tag{2.1}$$

*Dados $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tais que*

$$\frac{BC_1^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{m_0}} \left( \frac{\|u_1\|^2}{m_0} + |\Delta u_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \gamma \tag{2.2}$$

*onde*

$$\overline{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(\xi)d\xi, \ C_1 = \frac{|u_1|^2 + \overline{M}(\|u_0\|^2)}{m_0} \ e \ B = \max_{0 \leq s \leq C_1} |M'(s)|, \tag{2.3}$$

*então existe uma única função $u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que: para todo $T > 0$,*

**(i)** $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C_w([0,T];H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

**(ii)** $u' \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C_w([0,T];H_0^1(\Omega))$

**(iii)** $u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

**(iv)** $(u''(t) - M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\Delta u(t) + 2\gamma u'(t), v) = 0,\ \forall\ t \geq 0\ \ e\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$

**(v)** $u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1$

**Demonstração:**
Sejam $(\lambda_j^2)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sequências de autovalores e autovetores do operador $-\Delta$, com $D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, dada pelo teorema Espectral (1.14).

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $V_m = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m]$ o espaço gerado pelos $m$ primeiros autovetores do sitema $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $u_m(t) : [0,T_m] \to V_m$ dada por

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j,\ \ 0 \leq t \leq T_m, \tag{2.4}$$

solução do seguinte problema aproximado:

$$\left|\begin{array}{l} (u_m''(t) - M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\Delta u_m(t) + 2\gamma u_m'(t), \omega_i) = 0,\ \ \forall\ t \in [0,T_m] \text{ e } 1 \leq i \leq m; \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum\limits_{j=1}^{m} (u_0, \omega_j)\omega_j \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega); \\ u_m'(0) = u_{1m} = \sum\limits_{j=1}^{m} (u_1, \omega_j)\,\omega_j \to u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Para garantir a existência das soluções aproximadas $u_m$, vejamos que:

$$\begin{aligned} (u_m''(t), \omega_j) &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}''(t)\,(\omega_j, \omega_i) = g_{im}''(t), \\ (-\Delta u_m(t), \omega_j) &= \left(-\Delta\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j\right), \omega_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\lambda_j^2\omega_j, \omega_i\right) = \lambda_i^2 g_{im}(t), \\ (u_m'(t), \omega_i) &= \left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t)\omega_j, \omega_i\right) = g_{im}'(t), \\ \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)\omega_j &= u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} (u_0, \omega_j)\,\omega_j \text{ e} \\ \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(0)\omega_j &= u_m'(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} (u_1, \omega_j)\,\omega_j. \end{aligned}$$

Logo o problema aproximado (2.5) é equivalente ao seguinte sistema de E.D.O.:

$$\left|\begin{array}{l} g''_{im}(t) + M\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^2 g_{jm}^2(t)\right)\lambda_i^2 g_{im}(t) + 2\gamma g'_{im}(t) = 0,\ \forall\ t \in [0, T_m], 1 \leq i \leq m; \\ g_{im}(0) = (u_0, \omega_i),\ 1 \leq i \leq m; \\ g'_{im}(0) = (u_1, \omega_i),\ 1 \leq i \leq m. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Considerando $m \in \mathbb{N}$ fixo, então omitiremos o índice para simplificar a notação. Fazendo

$$Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix},\ Z_0 = \begin{bmatrix} (u_0, \omega_1) \\ (u_0, \omega_2) \\ \vdots \\ (u_0, \omega_m) \end{bmatrix},\ Z_1 = \begin{bmatrix} (u_1, \omega_1) \\ (u_1, \omega_2) \\ \vdots \\ (u_1, \omega_m) \end{bmatrix}$$

e

$$A\left(Z(t)\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 M\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^2 g_{jm}^2(t)\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m^2 M\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^2 g_{jm}^2(t)\right) \end{bmatrix}$$

vemos que o sistema (2.6) consiste em encontrar

$$\begin{array}{rcl} Z : [0, T_m] & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ t & \mapsto & Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} \end{array}$$

tal que:

$$\left|\begin{array}{l} Z''(t) + 2\gamma Z'(t) + A(Z(t))Z(t) = 0, \\ Z(0) = Z_0, \\ Z'(0) = Z_1. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Agora seja

$$Y(t)=\begin{bmatrix} Y_1(t)\\ \vdots \\ Y_m(t)\\ Y_{m+1}(t)\\ \vdots\\ Y_{2m}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z(t)\\ Z'(t)\end{bmatrix},\ \forall\ t\in[0,T_m];$$

então

$$Y(0)=\begin{bmatrix} Z(0)\\ Z'(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z_0\\ Z_1\end{bmatrix}=:Y_0$$

e

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{bmatrix} Z'(t)\\ Z''(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} Z'(t)\\ -A(Z(t))Z(t)-2\gamma Z'(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 0 & I\\ -A(Z(t)) & -2\gamma I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z(t)\\ Z'(t)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 0 & I\\ -A(Y(t)) & -2\gamma I\end{bmatrix}Y(t), \end{aligned}$$

donde resulta que o sistema (2.7) é equivalente ao problema:

$$\begin{cases} Y'=h(Y)\\ Y(0)=Y_0\end{cases} \tag{2.8}$$

onde

$$\begin{aligned} h:\mathbb{R}^{2m} &\rightarrow \mathbb{R}^{2m}\\ Y &\mapsto h(Y)=\begin{bmatrix} 0 & I\\ -A(Y(t)) & -2\gamma I\end{bmatrix}Y \end{aligned}$$

Desta forma, estabelecemos a equivalência entre o problema aproximado (2.5) e o problema de E.D.O. (2.8). Note que $h$ é contínua, pois por hipótese $M\in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$, logo pelo teorema de Peano (proposição (1.17)), o problema (2.8) tem solução local $(Y_m = Y_m(t),\ 0 \leq t \leq T_m)$ e consequentemente fica garantida a existência das soluções aproximadas $u_m$.

**Estimativas a Priori**

**Estimativa 1:**

De (2.5) temos a seguinte equação aproximada:

$$(u_m''(t), v) - M\left(\|u_m(t)\|^2\right)(\Delta u_m(t), v) + 2\gamma\,(u_m'(t), v) = 0,\ \forall\ v \in V_m. \tag{2.9}$$

Tomando $v = 2u_m'(t)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 4\gamma|u_m'(t)|^2 = 0.$$

Integrando de 0 a $t$, $t \leq T_m$, encontramos

$$|u_m'(t)|^2 + \int_0^t M\left(\|u_m(\xi)\|^2\right)\frac{d}{d\xi}\|u_m(\xi)\|^2 d\xi + 4\gamma\int_0^t |u_m'(\xi)|^2 d\xi = |u_m'(0)|^2.$$

Desde que

$$\begin{aligned}
\int_0^t M\left(\|u_m(\xi)\|^2\right)\frac{d}{d\xi}\|u_m(\xi)\|^2 d\xi &= \int_{\|u_m(0)\|^2}^{\|u_m(t)\|^2} M(\xi)d\xi \\
&= \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(\xi)d\xi + \int_{\|u_m(0)\|^2}^{0} M(\xi)d\xi \\
&= \overline{M}\left(\|u_m(t)\|^2\right) - \overline{M}\left(\|u_m(0)\|^2\right),
\end{aligned}$$

segue que

$$|u_m'(t)|^2 + \overline{M}\left(\|u_m(t)\|^2\right) + 4\gamma\int_0^t |u_m'(\xi)|^2 d\xi = |u_m'(0)|^2 + \overline{M}\left(\|u_m(0)\|^2\right). \tag{2.10}$$

De (2.1) podemos ver que

$$\overline{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(\xi)d\xi \geq \int_0^\lambda m_0 d\xi = m_0\lambda,\ \forall\ \lambda \geq 0.$$

Usando esta desigualdade, (2.10) e o fato de que $u_{1m} \to u_1$ em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $u_{0m} \to u_0$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, segue que

$$|u_m'(t)|^2 + m_0\|u_m(t)\|^2 + 4\gamma \int_0^t |u_m'(\xi)|^2 d\xi \leq |u_1|^2 + \overline{M}\left(\|u_0\|^2\right), \tag{2.11}$$

donde

$$\|u_m(t)\|^2 \leq \left(\frac{|u_1|^2 + \overline{M}\left(\|u_0\|^2\right)}{m_0}\right) = C_1 \tag{2.12}$$

Agora pelo teorema (1.18) e a estimativa (2.11) podemos estender a solução do problema aproximado ao intervalo $[0, \infty)$. De fato, basta observarmos que

$$\begin{aligned} \|Y_m(t)\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} &= \|(g_{1m}(t), \ldots, g_{mm}(t), g'_{1m}(t), \ldots, g'_{mm}(t))\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &= \sum_{i=1}^m g^2_{im}(t) + \sum_{i=1}^m g'^2_{im}(t) = |u_m(t)|^2 + |u_m'(t)|^2 \\ &\leq c\|u_m(t)\|^2 + |u_m'(t)|^2 \leq k, \ \forall\, t \geq 0, \ \forall\, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como consequência, as estimativas (2.11) e (2.12) são válidas para todo $t \in [0, \infty)$ e todo $m \in \mathbb{N}$.

**Estimativa 2:**

Consideremos as seguintes funções:

$$z_m(t) = \frac{\|u_m'(t)\|^2}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)} + |\Delta u_m(t)|^2 \text{ e } \alpha_m(t) = \frac{\left|\frac{d}{dt} M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right|}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)}, \ t \geq 0.$$

Da definição de $z_m(t)$ temos que

$$\|u_m'(t)\| \leq \left(z_m(t) M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

assim

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{dt} M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right| &= \left|M'\left(\|u_m(t)\|^2\right) \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2\right| \leq 2B\|u_m(t)\|\|u_m'(t)\| \\ &\leq 2BC_1^{\frac{1}{2}}\left(z_m(t) M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Desta desigualdade e da definição de $\alpha_m(t)$, temos

$$\alpha_m(t) \leq \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)} \left(z_m(t) M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m_0}} z_m^{\frac{1}{2}}(t). \tag{2.13}$$

Por outro lado, da definição de $z_m$ e da hipótese de dados pequenos (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m_0}} z_m^{\frac{1}{2}}(0) &= \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m_0}} \left(\frac{\|u_m'(0)\|^2}{M\left(\|u_m(0)\|^2\right)} + |\Delta u_m(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m_0}} \left(\frac{\|u_m'(0)\|^2}{m_0} + |\Delta u_m(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m_0}} \left(\frac{\|u_1\|^2}{m_0} + |\Delta u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< 4\gamma. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Em particular fazendo $t = 0$ em (2.13) e usando (2.14) segue que

$$\alpha_m(0) < 4\gamma, \ \forall \ m \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

como $\alpha_m$ é contínua, então existe $t_m^* > 0$ tal que

$$\alpha_m(t) < 4\gamma, \ 0 \leq t < t_m^*. \tag{2.16}$$

Provaremos agora que (2.16) vale para todo $t \geq 0$ e todo $m \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\alpha_m(t) < 4\gamma, \ \forall \ t \geq 0, \ \forall \ m \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Defina

$$t_m^* = \sup\{s > 0 \text{ tq } \alpha_m(t) < 4\gamma, \ 0 \leq t < s\},$$

e (2.17) estará provado se mostrarmos que $t_m^* = \infty$, $\forall \ m \in \mathbb{N}$. Suponha, por absurdo, que $t_m^* < \infty$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo pela definição de $t_m^*$ e a continuidade de $\alpha_m$ vemos que:

$$\alpha_m(t_m^*) = 4\gamma. \tag{2.18}$$

Fazendo $v = -2\Delta u'_m(t)$ na equação aproximada (2.9), temos

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 + 4\gamma\|u'_m(t)\|^2 = 0,$$

mas

$$\frac{d}{dt}\left(M\left(\|u_m(t)\|^2\right)|\Delta u_m(t)|^2\right) = M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right),$$

logo

$$\frac{d}{dt}\left[\|u'_m(t)\|^2 + M\left(\|u_m(t)\|^2\right)|\Delta u_m(t)|^2\right] + 4\gamma\|u'_m(t)\|^2 = |\Delta u_m(t)|^2\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right).$$

Substituindo a definição de $z_m$ encontramos

$$\frac{d}{dt}\left(z_m(t)M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right) + 4\gamma\|u'_m(t)\|^2 = |\Delta u_m(t)|^2\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right),$$

ou ainda

$$z'_m(t)M\left(\|u_m(t)\|^2\right) + z_m(t)\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right) + 4\gamma\|u'_m(t)\|^2 = |\Delta u_m(t)|^2\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right),$$

donde

$$\begin{aligned}
z'_m(t) &= \frac{1}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)}\left[-z_m(t)\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right) - 4\gamma\|u'_m(t)\|^2\right. \\
&+ \left.|\Delta u_m(t)|^2\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right] \\
&= \frac{\|u'_m(t)\|^2}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)}\left[-\frac{\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right)}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)} - 4\gamma\right] \\
&\leq \frac{\|u'_m(t)\|^2}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)}\left[\frac{\left|\frac{d}{dt}M\left(\|u_m(t)\|^2\right)\right|}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)} - 4\gamma\right] \\
&= \frac{\|u'_m(t)\|^2}{M\left(\|u_m(t)\|^2\right)}\left(\alpha_m(t) - 4\gamma\right),\ \forall\ t \geq 0. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Disso e (2.16) segue que

$$z_m'(t) < 0,\ 0 \leq t < t_m^*.$$

Integrando de 0 a $t$, obtemos $z_m(t) < z_m(0)$, $0 \leq t \leq t_m^*$. Tomando em particular $t = t_m^*$, e notando (2.13) e (2.14) chegamos a

$$\alpha_m(t_m^*) \leq \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m_0}} z_m^{\frac{1}{2}}(t_m^*) < \frac{2BC_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m_0}} z_m^{\frac{1}{2}}(0) < 4\gamma,$$

o que é um absurdo, pois contraria (2.18), e isto prova (2.17).

De (2.17) e (2.19) temos que $z_m$ é decrescente, portanto

$$z_m(t) < \frac{4m_0\gamma^2}{B^2C_1},\ \forall\ t \geq 0,\ \forall\ m \in \mathbb{N},$$

donde

$$\frac{\|u_m'(t)\|^2}{M_0} + |\Delta u_m(t)|^2 < \frac{4m_0\gamma^2}{B^2C_1},$$

aqui $M_0 = \max\limits_{0 \leq s \leq C_1} M(s)$. Então existe $C_2 > 0$ independente de $m$ e $t$ tal que

$$\|u_m'(t)\|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 < C_2. \tag{2.20}$$

**Estimativa 3:**

Fazemos $v = u_m''(t)$ na equação aproximada (2.9) temos

$$|u_m''(t)|^2 + M\left(\|u_m(t)\|^2\right)(-\Delta u_m(t), u_m''(t)) + 2\gamma\,(u_m'(t), u_m''(t)) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} |u_m''(t)|^2 &\leq M\left(\|u_m(t)\|^2\right)|(-\Delta u_m(t), u_m''(t))| + 2\gamma\,|(u_m'(t), u_m''(t))| \\ &\leq M\left(\|u_m(t)\|^2\right)|\Delta u_m(t)|\,|u_m''(t)| + 2\gamma|u_m'(t)||u_m''(t)| \\ &= \left[M\left(\|u_m(t)\|^2\right)|\Delta u_m(t)| + 2\gamma|u_m'(t)|\right]|u_m''(t)|. \end{aligned}$$

Desta estimativa, (2.11) e (2.20) resulta que existe uma constante $C_3$, independente de $t$ e $m$, tal que

$$|u''_m(t)| \leq C_3 \tag{2.21}$$

**Passagem ao Limite:**

Com as estimativas obtidas podemos encontrar uma subsequência $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e uma função $u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo (i)-(iii) do enunciado do teorema, tal que

$$\begin{array}{rcl} u_\nu \to u & \text{em} & C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right), \\ u'_\nu \to u' & \text{em} & C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right), \\ u''_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u'' & \text{em} & L^\infty\left(0,T; L^2(\Omega)\right). \end{array}$$

Assim, passando ao limite vemos que $u$ satisfaz (iv)-(v). No próximo capítulo, onde faremos o estudo do caso degenerado, a passagem ao limite será feita em detalhes. Como aqui a situação é análoga, para evitar duplicidade omitiremos os detalhes.

**Unicidade:**

Sejam $u$ e $v$ duas funções satisfazendo (i)-(v), então denotando $w = u - v$ temos

$$\left(w''(t) - M\left(\|u(t)\|^2\right)\Delta u(t) + M\left(\|v(t)\|^2\right)\Delta v(t) + 2\gamma w'(t), \psi\right) = 0,\ \forall\ t \geq 0,\ \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Somando e subtraindo $M\left(\|u(t)\|^2\right)\Delta v(t)$ encontramos

$$\left(w''(t) - M\left(\|u(t)\|^2\right)\Delta w(t) + 2\gamma w'(t), \psi\right) = \left(\left(M\left(\|u(t)\|^2\right) - M\left(\|v(t)\|^2\right)\right)\Delta v(t), \psi\right).$$

Tomando $\psi = 2w'(t)$ e notando que

$$\frac{d}{dt}\left(M\left(\|u(t)\|^2\right)\|w(t)\|^2\right) = M\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2\frac{d}{dt}M\left(\|u(t)\|^2\right),$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2\right. & + \left. M\left(\|u(t)\|^2\right)\|w(t)\|^2\right] + 4\gamma|w'(t)|^2 \\ & = 2\left(M\left(\|u(t)\|^2\right) - M\left(\|v(t)\|^2\right)\right)\left(\Delta v(t), w'(t)\right) + \|w(t)\|^2\frac{d}{dt}M\left(\|u(t)\|^2\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2 + M\left(\|u(t)\|^2\right)\|w(t)\|^2\right] + 4\gamma|w'(t)|^2\\
&\leq C_4\left(\|w(t)\||w'(t)| + \|w(t)\|^2\right)\\
&\leq C_5\left(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2\right),
\end{aligned}
$$

aqui usamos que $w$ satisfaz (i), (ii) e também a estimativa

$$
\left|M\left(\|u(t)\|^2\right) - M\left(\|v(t)\|^2\right)\right| \leq 2LC_1\|w(t)\|.
$$

Integrando de 0 a $t$ e usando que $w(0) = w'(0) = 0$, obtemos

$$
|w'(t)|^2 + M\left(\|u(t)\|^2\right)\|w(t)\|^2 \leq C_5\int_0^t \left(\|w(\xi)\|^2 + |w'(\xi)|^2\right) d\xi.
$$

Como por hipótese $0 < m_0 \leq M(\lambda)$, temos que existe uma constante $C_6$ tal que

$$
|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq C_6\int_0^t \left(\|w(\xi)\|^2 + |w'(\xi)|^2\right) d\xi,
$$

e pelo lema de Gronwall segue que

$$
|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 = 0,\ \forall\ t \geq 0,
$$

donde $w(t) = 0$, isto é, $u = v$, o que prova a unicidade.

$\square$

## 2.2 Comportamento Assintótico

Nesta seção, aplicaremos o Lema de Nakao (1.19) para mostrar o decaimento exponencial da energia do problema. Seja $u$ dada pelo teorema (3.1), então definimos

$$
E(t) = \frac{1}{2}\left(|u'(t)|^2 + \overline{M}\left(\|u(t)\|^2\right)\right),\ t \geq 0. \tag{2.22}
$$

**Teorema 2.2** *Consideremos as mesmas hipóteses do teorema (2.1) e além disso suponhamos que $M'(\lambda) \geq 0$, $\forall\ \lambda \geq 0$. Então existem constantes positivas $k$ e $\rho$ tal que*

$$E(t) \leq ke^{-\rho t},\ \forall\ t \geq 0. \tag{2.23}$$

**Demonstração:**

Tomando $v = 2u'(t)$ em (iv), temos

$$\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 + M\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 4\gamma|u'(t)|^2 = 0,$$

mas

$$\frac{d}{dt}\overline{M}\left(\|u(t)\|^2\right) = M\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2,$$

portanto

$$\frac{d}{dt}\left[|u'(t)|^2 + \overline{M}\left(\|u(t)\|^2\right)\right] + 4\gamma|u'(t)|^2 = 0,$$

donde

$$E'(t) + 2\gamma|u'(t)|^2 = 0,\ \forall\ t \geq 0. \tag{2.24}$$

De (2.24) vemos que $E$ é decrescente. Integrando de 0 a $t$, resulta

$$E(t) + 2\gamma\int_0^t |u'(\xi)|^2 d\xi = E(0) =: E_0,\ \forall\ t \geq 0,$$

portanto $E$ é limitada.

Mostraremos agora que $E$ satisfaz as condições do Lema de Nakao. De fato, integrando (2.24) de $t$ a $t+1$ e fazendo

$$F^2(t) = E(t) - E(t+1) \tag{2.25}$$

temos

$$2\gamma\int_t^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi = F^2(t). \tag{2.26}$$

Portanto

$$2\gamma\left(\int_t^{t+\frac{1}{4}}|u'(\xi)|^2 d\xi+\int_{t+\frac{1}{4}}^{t+\frac{3}{4}}|u'(\xi)|^2 d\xi+\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1}|u'(\xi)|^2 d\xi\right)=F^2(t).$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existem $t_1 \in \left[t, t+\dfrac{1}{4}\right]$ e $t_2 \in \left[t+\dfrac{3}{4}, t+1\right]$ tais que

$$\frac{|u'(t_1)|^2}{4}=\int_t^{t+\frac{1}{4}}|u'(\xi)|^2 d\xi \quad \text{e} \quad \frac{|u'(t_2)|^2}{4}=\int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1}|u'(\xi)|^2 d\xi.$$

Logo

$$2\gamma\left(\frac{|u'(t_1)|^2}{4}+\int_{t+\frac{1}{4}}^{t+\frac{3}{4}}|u'(\xi)|^2 d\xi+\frac{|u'(t_2)|^2}{4}\right)=F^2(t).$$

Portanto

$$|u'(t_1)|^2+|u'(t_2)|^2 \leq \frac{2F^2(t)}{\gamma}. \tag{2.27}$$

Por outro lado, usando (2.1), encontramos

$$E(t)=\frac{1}{2}\left(|u'(t)|^2+\overline{M}\left(\|u(t)\|^2\right)\right) \geq \frac{cm_0}{2}|u(t)|^2,$$

donde

$$|u(t)|^2 \leq \frac{2}{cm_0}E(t). \tag{2.28}$$

Voltando na equação (iv) e fazendo $v=u(t)$, tem-se:

$$M\left(\|u(t)\|^2\right)\|u(t)\|^2=-\frac{d}{dt}\left(u'(t),u(t)\right)+|u'(t)|^2-2\gamma\left(u'(t),u(t)\right).$$

Integrando de $t_1$ a $t_2$:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} M\left(\|u(\xi)\|^2\right)\|u(\xi)\|^2 d\xi &= (u'(t_1),u(t_1)) - (u'(t_2),u(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi \\
&- 2\gamma \int_{t_1}^{t_2} (u'(\xi),u(\xi)) d\xi \\
&\leq |u'(t_1)||u(t_1)| + |u'(t_2)||u(t_2)| + \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi \\
&+ 2\gamma \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)||u(\xi)| d\xi, \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

mas de (2.27), (2.28) para $\varepsilon > 0$, temos

$$
|u'(t_1)||u(t_1)| \leq \frac{\sqrt{2}F(t)}{\sqrt{\gamma\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{cm_0}E(t_1)} \leq \frac{\sqrt{2}F(t)}{\sqrt{\gamma\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{cm_0}E(t)}, \qquad (2.30)
$$

onde na última desigualdade usamos que $E$ é decrescente. Analogamente

$$
|u'(t_2)||u(t_2)| \leq \frac{\sqrt{2}F(t)}{\sqrt{\gamma\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{cm_0}E(t)}. \qquad (2.31)
$$

Também vemos que

$$
\begin{aligned}
2\gamma \int_{t_1}^{t_2} \frac{|u'(\xi)|}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}|u(\xi)| d\xi &\leq \frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi + \gamma\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} |u(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{F^2(t)}{2\varepsilon} + \gamma\varepsilon \sup_{t\leq\xi\leq t+1}\{|u(\xi)|^2\} \\
&\leq \frac{F^2(t)}{2\varepsilon} + \frac{2\gamma\varepsilon}{cm_0}E(t). \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Usando (2.26), (2.30), (2.31) e (2.32) em (2.29) temos

$$
\int_{t_1}^{t_2} M\left(\|u(\xi)\|^2\right)\|u(\xi)\|^2 d\xi \leq \left(\frac{4+\varepsilon+\gamma}{2\varepsilon\gamma}\right)F^2(t) + \left(\frac{2\varepsilon(1+\gamma)}{cm_0}\right)E(t). \qquad (2.33)
$$

Por outro lado, usando a hipótese adicional $M'(\lambda) \geq 0$, $\forall\ \lambda \geq 0$, temos que $M$ é não decrescente. Então

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(|u'(t)|^2 + \overline{M}\left(\|u(t)\|^2\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(|u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 M\left(\|u(t)\|^2\right)\right).$$

Integrando de $t_1$ a $t_2$, usando (2.26) e (2.33) segue que

$$2\int_{t_1}^{t_2} E(\xi)d\xi \leq \left(\frac{4+2\varepsilon+\gamma}{2\varepsilon\gamma}\right) F^2(t) + \left(\frac{2\varepsilon(1+\gamma)}{cm_0}\right) E(t). \tag{2.34}$$

Novamente pelo teorema do valor médio para integrais, temos que existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$E(t^*) \leq 2E(t^*)(t_2 - t_1) = 2\int_{t_1}^{t_2} E(\xi)d\xi.$$

De (2.34) e a desigualdade acima resulta que

$$E(t^*) \leq \left(\frac{4+2\varepsilon+\gamma}{2\varepsilon\gamma}\right) F^2(t) + \left(\frac{2\varepsilon(1+\gamma)}{cm_0}\right) E(t). \tag{2.35}$$

Agora, integrando (2.24) de $t$ a $t^*$ obtemos

$$E(t) = 2\gamma\int_t^{t^*} |u'(\xi)|^2 d\xi + E(t^*),$$

donde de (2.26) e (2.35) segue que

$$E(t) \leq \left(\frac{4+2\varepsilon+\gamma+2\varepsilon\gamma}{2\varepsilon\gamma}\right) F^2(t) + \left(\frac{2\varepsilon(1+\gamma)}{cm_0}\right) E(t).$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ de forma que $1 - \dfrac{2\varepsilon(1+\gamma)}{cm_0} > 0$, temos que existe uma constante $C_6$ tal que

$$E(t) \leq C_6 F^2(t).$$

Como $E$ é decrescente e pela definição de $F^2$ segue que

$$\sup_{t\leq\xi\leq t+1} E(\xi) \leq C_6\left(E(t) - E(t+1)\right).$$

Aplicando o Lema de Nakao (1.19) concluímos a prova do teorema.

$\square$

# Capítulo 3

# O Problema Degenerado

Neste capítulo vamos apresentar um estudo do problema (4), no caso degenerado quando $M(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\alpha \geq 1$. Neste caso, não será possível usar a hipótese $0 < m_0 \leq M(\lambda)$, $\forall$ $\lambda \geq 0$, e consequentemente o procedimento usado no capítulo anterior não funciona. Desta forma, para superar as dificuldades que surgem, é preciso introduzir novos argumentos ao método. Na primeira seção, seção 3.1, apresentamos resultados de existência e unicidade de solução global e na seção 3.2 mostraremos o comportamento assintótico (decaimento algébrico).

## 3.1 Existência e Unicidade de Solução Global

O resultado de existência e unicidade de solução global é dado pelo teorema:

**Teorema 3.1** *Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tais que*

$$\alpha\sqrt{2}\left[(\alpha+1)\left(|u_1|^2 + \|u_0\|^2\right) + \|u_0\|^{2(\alpha+1)}\right]^{\frac{\alpha-1}{2(\alpha+1)}} \left[\frac{\|u_1\|^2}{\|u_0\|^{2\alpha}} + |\Delta u_0|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \tag{3.1}$$

*então existe uma única função $u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $T > 0$,*

**(i)** $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C_w([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

**(ii)** $u' \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C_w([0,T]; H_0^1(\Omega))$

**(iii)** $u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$

**(iv)** $(u''(t) - \|u(t)\|^{2\alpha}\Delta u(t) + 2\gamma u'(t), v) = 0$, $\forall$ $t \geq 0$ *e* $\forall$ $v \in H_0^1(\Omega)$

**(v)** $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$

**Demonstração:**

Sejam $(\lambda_j^2)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sequências de autovalores e autovetores do operador $-\Delta$, com $D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, conforme (1.14).

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $V_m = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m]$ o espaço gerado pelos $m$ primeiros autovetores do sitema $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j,\ 0 \le t \le T_m \tag{3.2}$$

solução do seguinte problema aproximado:

$$\left| \begin{array}{l} \left(u_m''(t) - \left(\frac{1}{m} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right) \Delta u_m(t) + 2\gamma u_m'(t), \omega_i\right) = 0,\ \forall\ t \in [0, T_m] \text{ e } 1 \le i \le m; \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum\limits_{j=1}^{m} (u_0, \omega_j)\omega_j \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega); \\ u_m'(0) = u_{1m} = \sum\limits_{j=1}^{m} (u_1, \omega_j)\,\omega_j \to u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Para garantir a existência das soluções aproximadas $u_m$, vejamos que:

$$(u_m''(t), \omega_i) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}''(t)\,(\omega_j, \omega_i) = g_{im}''(t),$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j \right\|^2 &= \left( \left( \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j, \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i \right) \right) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\,((\omega_j, \omega_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^2(t)\|\omega_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^2 g_{jm}^2(t), \end{aligned}$$

$$(-\Delta u_m(t), \omega_j) = \left( -\Delta \left( \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j \right), \omega_i \right) = \left( \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\lambda_j^2\omega_j, \omega_i \right) = \lambda_i^2 g_{im}(t),$$

$$(u_m'(t), \omega_i) = \left( \sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t)\omega_j, \omega_i \right) = g_{im}'(t),$$

$$\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)\omega_j = u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} (u_0, \omega_j)\, \omega_j,$$

e

$$\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(0)\omega_j = u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} (u_1, \omega_j)\, \omega_j.$$

Então o problema aproximado (3.3) é equivalente ao sistema de E.D.O.:

$$\left| \begin{array}{l} g''_{im}(t) + \left( \frac{1}{m} + \left( \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^2 g_{jm}^2(t) \right)^{\alpha} \right) \lambda_i^2 g_{im}(t) + 2\gamma g'_{im}(t) = 0, \ \forall\ t \in [0, T_m], 1 \leq i \leq m; \\ g_{im}(0) = (u_0, \omega_i),\ 1 \leq i \leq m; \\ g'_{im}(0) = (u_1, \omega_i),\ 1 \leq i \leq m. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Considerando $m \in \mathbb{N}$ fixo, vamos omitir o índice para simplificar a notação. Fazendo

$$Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix},\ Z_0 = \begin{bmatrix} (u_0, \omega_1) \\ (u_0, \omega_2) \\ \vdots \\ (u_0, \omega_m) \end{bmatrix},\ Z_1 = \begin{bmatrix} (u_1, \omega_1) \\ (u_1, \omega_2) \\ \vdots \\ (u_1, \omega_m) \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{array}{rcl} A : \mathbb{R}^m & \to & \mathcal{M}_{m \times m} \\ Z = (Z_1, \ldots, Z_m) & \mapsto & A(Z) = \left(a_{ij}(Z)\right)_{m \times m} \end{array}$$

onde

$$a_{ij}(Z) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ \lambda_i^2 \left( \frac{1}{m} + \left( \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k Z_k)^2 \right)^{\alpha} \right) & \text{se } i = j; \end{cases}$$

vemos que o sistema de E.D.O. (3.4) consiste em encontrar

$$
\begin{array}{rcl}
Z:[0,T_m] & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\
t & \mapsto & Z(t)=\begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

satisfazendo

$$
\left| \begin{array}{l} Z''(t)+2\gamma Z'(t)+A(Z(t))Z(t)=0, \\ Z(0)=Z_0, \\ Z'(0)=Z_1. \end{array} \right. \tag{3.5}
$$

Agora seja

$$
Y(t)=\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_m(t) \\ Y_{m+1}(t) \\ \vdots \\ Y_{2m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(t) \\ Z'(t) \end{bmatrix},\ \forall\ t\in[0,T_m];
$$

então

$$
\begin{array}{rcl}
Y'(t) & = & \begin{bmatrix} Z'(t) \\ Z''(t) \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} Z'(t) \\ -A(Z(t))Z(t)-2\gamma Z'(t) \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A(Z(t)) & -2\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(t) \\ Z'(t) \end{bmatrix} \\
 & = & \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A(Y(t)) & -2\gamma I \end{bmatrix} Y(t),
\end{array}
$$

donde resulta que o sistema (3.5) é equivalente ao problema:

$$
\left\{ \begin{array}{l} Y'=h(Y) \\ Y(0)=Y_0 \end{array} \right. \tag{3.6}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
h : \mathbb{R}^{2m} &\;\longrightarrow\; \mathbb{R}^{2m} \\
Y &\;\longmapsto\; h(Y) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A(Y(t)) & -2\gamma I \end{bmatrix} Y
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
h(Y) &= \Bigg( Y_{m+1}, Y_{m+2}, \ldots, Y_{2m}, -\lambda_1^2 \left[ \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k Y_k)^2 \right)^{\alpha} \right] Y_1 - 2\gamma Y_{m+1}, \ldots, \\
&- \lambda_m^2 \left[ \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k Y_k)^2 \right)^{\alpha} \right] Y_m - 2\gamma Y_{2m} \Bigg)
\end{aligned}
$$

e

$$
Y_0 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0, \omega_1) \\ \vdots \\ (u_0, \omega_m) \\ (u_1, \omega_1) \\ \vdots \\ (u_1, \omega_m) \end{bmatrix}
$$

Desta forma, estabelecemos a equivalência entre o problema aproximado (3.3) e o problema de E.D.O. (3.6). Se provarmos que $h = h(Y)$ é contínua, pelo teorema de Peano (proposição (1.17)), o problema (3.6) tem solução local ($Y_m = Y_m(t)$, $0 \leq t \leq T_m$) e consequentemente fica garantida a existência das soluções aproximadas $u_m$. Observando a definição da função $h$, para verificarmos sua continuidade, basta provarmos que a aplicação

$$
Y = (Y_1, \ldots, Y_{2m}) \mapsto \lambda_i^2 \left\{ \frac{1}{m} + \left[ \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k Y_k)^2 \right]^{\alpha} \right\} Y_i
$$

é contínua de $\mathbb{R}^{2m}$ em $\mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$. De fato, seja $(Y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ tal que $Y_\nu \to Y$, onde $Y_\nu = (Y_{\nu,1}, \ldots, Y_{\nu,2m})$ e $Y = (Y_1, \ldots, Y_{2m})$. Logo

$$
\left| \lambda_i^2 \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^{\alpha} \right) Y_{\nu,i} - \lambda_i^2 \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k Y_k)^2 \right)^{\alpha} \right) Y_i \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_i^2 \left| \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha \right) Y_{\nu,i} - \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha \right) Y_i \right. \\
&+ \left. \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha \right) Y_i - \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_k)^2 \right)^\alpha \right) Y_i \right| \\
&= \lambda_i^2 \left| \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha \right) (Y_{\nu,i} - Y_i) \right. \\
&+ \left. \left[ \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha \right) - \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_k)^2 \right)^\alpha \right) \right] Y_i \right| \\
&\leq \lambda_i^2 \left| \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha \right| |Y_{\nu i} - Y_i| \\
&+ \lambda_i^2 \left| \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha - \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_k)^2 \right)^\alpha \right| |Y_i| \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

como $Y_\nu \to Y$ é fácil ver que $\left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha$ é limitado. Também observamos que $M(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \geq 0$ e $\alpha \geq 1$, é Lipschitziana sobre os intervalos compactos $I \subset [0, \infty)$. Então

$$
\begin{aligned}
\left| \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha - \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_k)^2 \right)^\alpha \right| &\leq L \left| \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 - \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_k)^2 \right| \\
&\leq L \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 |Y_{\nu,k}^2 - Y_k^2|.
\end{aligned}
$$

Isto e (3.7) nos levam a

$$
\begin{aligned}
&\left| \lambda_i^2 \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_{\nu,k})^2 \right)^\alpha \right) Y_{\nu,i} - \lambda_i^2 \left( \frac{1}{m} + \left( \sum_{k=1}^m (\lambda_k Y_k)^2 \right)^\alpha \right) Y_i \right| \\
&\leq k_1 |Y_{\nu,i} - Y_i| + k_2 \sum_{k=1}^m |Y_{\nu,k}^2 - Y_k^2| \to 0, \quad \text{quando } \nu \to \infty.
\end{aligned}
$$

o que prova a continuidade da função $h$.

**Estimativas a Priori**

**Estimativa 1:**

De (3.3) temos a seguinte equação aproximada:

$$(u_m''(t), v) - \left(\frac{1}{m} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)(\Delta u_m(t), v) + 2\gamma\,(u_m'(t), v) = 0,\ \forall\ v \in V_m. \tag{3.8}$$

Tomando $v = 2u_m'(t)$ na equação aproximada acima obtemos

$$\begin{aligned} 2(u_m''(t), u_m'(t)) \quad &- \quad 2\frac{1}{m}(\Delta u_m(t), u_m'(t)) - 2||u_m(t)||^{2\alpha}(\Delta u_m(t), u_m'(t)) \\ &+ \quad 4\gamma(u_m'(t), u_m'(t)) = 0. \end{aligned}$$

Desde que

$$-2(\Delta u_m(t), u_m'(t)) = 2\,((u_m(t), u_m'(t))) = \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2,$$

temos

$$\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 4\gamma|u_m'(t)|^2 = 0. \tag{3.9}$$

Observando que

$$\|u_m(t)\|^{2\alpha}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha+1}\|u_m(t)\|^{2\alpha+2}\right),$$

a equação (3.9) pode ser reescrista na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}\left[|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{m}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u_m(t)\|^{2\alpha+2}\right] + 4\gamma|u_m'(t)|^2 = 0.$$

Integrando de 0 a $t$, $t \leq T_m$, obtemos

$$\begin{aligned} |u_m'(t)|^2 + \frac{1}{m}\|u_m(t)\|^2 \quad &+ \quad \frac{1}{\alpha+1}\|u_m(t)\|^{2\alpha+2} + 4\gamma\int_0^t |u_m'(\xi)|^2 d\xi \\ &= \quad |u_m'(0)|^2 + \frac{1}{m}\|u_m(0)\|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u_m(0)\|^{2\alpha+2} \\ &\leq \quad |u_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u_{0m}\|^{2\alpha+2} \\ &\leq \quad |u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u_0\|^{2\alpha+2}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos as convergências $u_{1m} \to u_1$ em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $u_{0m} \to u_0$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$. Logo

$$|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u_m(t)\|^{2\alpha+2} + 4\gamma \int_0^t |u_m'(\xi)|^2 d\xi \leq C_0 \tag{3.10}$$

onde

$$C_0 = |u_1|^2 + \|u_0\|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u_0\|^{2\alpha+2}.$$

Note que de (3.10) podemos ver que

$$\|u_m(t)\| \leq [(\alpha+1)C_0]^{\frac{1}{2\alpha+2}} =: C_1. \tag{3.11}$$

Agora pela proposição (1.18) e a estimativa (3.10) podemos estender a solução do problema aproximado ao intervalo $[0,\infty)$. De fato, basta observarmos que

$$\begin{aligned}
\|Y_m(t)\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} &= \|(g_{1m}(t),\ldots,g_{mm}(t),g_{1m}'(t),\ldots,g_{mm}'(t))\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} \\
&= \sum_{i=1}^m g_{im}^2(t) + \sum_{i=1}^m g_{im}'^2(t) = |u_m(t)|^2 + |u_m'(t)|^2 \\
&\leq c\|u_m(t)\|^2 + |u_m'(t)|^2 \leq k.
\end{aligned}$$

**Estimativa 2:**

Nesta estimativa introduziremos as seguintes funções auxiliares:

$$f_m(t) = \frac{\|u_m'(t)\|^2}{m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}},\ t \geq 0,$$

$$F_m(t) = f_m(t) + |\Delta u_m(t)|^2,\ t \geq 0.$$

é fácil ver que

$$0 \leq f_m(t) \leq F_m(t),\ \forall\, t \geq 0,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Além disso, desde que $u_0 \neq 0$, temos

$$F_m(0) = \frac{\|u_{1m}\|^2}{m^{-1} + \|u_{0m}\|^{2\alpha}} + |\Delta u_{0m}|^2 \to \frac{\|u_1\|^2}{\|u_0\|^{2\alpha}} + |\Delta u_0|^2, \text{ quando } m \to \infty. \tag{3.13}$$

Observamos que pela hipótese de dados pequenos (3.1), segue que

$$\frac{\|u_1\|^2}{\|u_0\|^{2\alpha}} + |\Delta u_0|^2 \leq \frac{\left(\frac{\gamma}{C_2}\right)^2}{2}, \tag{3.14}$$

onde $C_2 = \alpha C_1^{(\alpha-1)}$. Então levando em conta (3.13) e (3.14) temos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) tal que

$$F_m(0) < \left(\frac{\gamma}{C_2}\right)^2, \ \forall\, m \geq m_0. \tag{3.15}$$

Desta desigualdade e (3.12) resulta que

$$C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(0) < \gamma, \ \forall\, m \geq m_0.$$

Pela continuidade da aplicação $t \mapsto C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t)$, concluímos que para cada $m \geq m_0$, existe $t_m > 0$ tal que

$$C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t) < \gamma, \ 0 \leq t \leq t_m.$$

Entretanto, o salto significativo neste momento é provarmos que:

$$C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t) < \gamma, \ \forall\, t \geq 0 \text{ e } \forall\, m \geq m_0. \tag{3.16}$$

Para tal, definimos para cada $m \geq m_0$

$$t_m^* = \sup\{s > 0 \text{ tal que } C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t) < \gamma, \ 0 \leq t < s\}$$

e (3.16) estará provado se mostrarmos que $t_m^* = \infty$, $\forall\, m \geq m_0$. Portanto, suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra, ou seja, para algum $m \geq m_0$ tem-se $t_m^* < \infty$. Então, pela definição de $t_m^*$ e a continuidade da aplicação $t \mapsto C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t)$ de $[0, \infty)$ em $\mathbb{R}^+$, resulta que

$$C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t_m^*) = \gamma. \tag{3.17}$$

Derivando $F_m(t)$, usando (3.11) e o fato de que $u_m$ é solução aproximada, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_m(t) &= \frac{2\left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)\left(u_m''(t), -\Delta u_m'(t)\right)}{\left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)^2} \\
&- \frac{2\alpha\|u_m(t)\|^{2\alpha-2}\left(\left(u_m'(t), u_m(t)\right)\right)\|u_m'(t)\|^2}{\left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)^2} + 2\left(\Delta u_m(t), \Delta u_m'(t)\right) \\
&= \frac{2\left(u_m''(t), -\Delta u_m'(t)\right)}{m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}} + 2\left(\Delta u_m(t), \Delta u_m'(t)\right) \\
&- \frac{2\alpha\|u_m(t)\|^{2\alpha-2}\left(\left(u_m(t), u_m'(t)\right)\right)\|u_m'(t)\|^2}{\left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)^2} \\
&= \frac{\left(u_m''(t) - \left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)\Delta u_m(t), -2\Delta u_m'(t)\right)}{m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}} \\
&- \frac{2\alpha\|u_m(t)\|^{2\alpha-2}\left(\left(u_m(t), u_m'(t)\right)\right)\|u_m'(t)\|^2}{\left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)^2} \\
&= \frac{\left(-2\gamma u_m'(t), -2\Delta u_m'(t)\right)}{m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}} - \frac{2\alpha\|u_m(t)\|^{2\alpha-2}\left(\left(u_m(t), u_m'(t)\right)\right)}{m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}} f_m(t) \\
&= -4\gamma f_m(t) - \frac{2\alpha\|u_m(t)\|^{2\alpha-2}\left(\left(u_m(t), u_m'(t)\right)\right)}{m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}} f_m(t) \\
&\leq -4\gamma f_m(t) + \frac{2\alpha\|u_m(t)\|^{2\alpha-1}}{\left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} f_m^{\frac{3}{2}}(t) \\
&= -4\gamma f_m(t) + 2\alpha\|u_m(t)\|^{\alpha-1}\left(\frac{\|u_m(t)\|^{\alpha}}{\left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) f_m^{\frac{3}{2}}(t) \\
&\leq -4\gamma f_m(t) + 2\alpha\|u_m(t)\|^{\alpha-1} f_m^{\frac{3}{2}}(t) \\
&\leq -4\gamma f_m(t) + 2\alpha C_1^{\alpha-1} f_m^{\frac{3}{2}}(t) \\
&= -4\gamma f_m(t) + 2C_2 f_m^{\frac{3}{2}}(t),
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{d}{dt}F_m(t) \leq 2\left(-2\gamma + C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t)\right) f_m(t), \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.18}$$

Desta desigualdade e a definição de $t_m^*$ obtemos:

$$\frac{d}{dt}F_m(t) < 2(-2\gamma+\gamma)f_m(t) = -2\gamma f_m(t) \leq 0,\ 0 \leq t < t_m^*.$$

Integrando de 0 a $t$, temos

$$F_m(t) < F_m(0),\ 0 \leq t \leq t_m^*. \tag{3.19}$$

Em particular para $t = t_m^*$ temos

$$f_m(t_m^*) \leq F_m(t_m^*) < F_m(0) < \left(\frac{\gamma}{C_2}\right)^2,$$

onde na última desigualdade usamos (3.15). Então

$$C_2 f_m^{\frac{1}{2}}(t_m^*) < \gamma$$

o que é um absurdo, pois contradiz (3.17), provando-se a desigualdade (3.16).

Agora, considerando (3.16) e (3.18) temos que

$$\frac{d}{dt}F_m(t) + 2(2\gamma-\gamma)f_m(t) < 0,$$

ou

$$\frac{d}{dt}F_m(t) + 2\gamma f_m(t) < 0,\ \forall\ t \geq 0,\ \forall\ m \geq m_0.$$

Integrando de 0 a $t$, obtemos

$$F_m(t) + 2\gamma\int_0^t f_m(\xi)d\xi < F_m(0) < \left(\frac{\gamma}{C_2}\right)^2,$$

ou ainda

$$\frac{\|u_m'(t)\|^2}{m^{-1}+\|u_m(t)\|^{2\alpha}} + |\Delta u_m(t)|^2 + 2\gamma\int_0^t f_m(\xi)d\xi < \left(\frac{\gamma}{C_2}\right)^2. \tag{3.20}$$

**Estimativa 3:**

Fazemos $v = u_m''(t)$ na equação aproximada (3.8) temos

$$|u_m''(t)|^2 + \left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)(-\Delta u_m(t), u_m''(t)) + 2\gamma\,(u_m'(t), u_m''(t)) = 0,$$

donde

$$\begin{array}{rcl} |u_m''(t)|^2 & \leq & \left(m^{-1} + \|u_m(t)\|^{2\alpha}\right)|(-\Delta u_m(t), u_m''(t))| + 2\gamma\,|(u_m'(t), u_m''(t))| \\ & \leq & \left(1 + ||u_m(t)||^{2\alpha}\right)|\Delta u_m(t)|\,|u_m''(t)| + 2\gamma|u_m'(t)||u_m''(t)| \\ & = & \left[\left(1 + ||u_m(t)||^{2\alpha}\right)|\Delta u_m(t)| + 2\gamma|u_m'(t)|\right]|u_m''(t)|. \end{array}$$

Desta estimativa, (3.10) e (3.20) resulta que existe uma constante $C_3$, independente de $t$ e $m$, tal que

$$|u_m''(t)| \leq C_3 \tag{3.21}$$

**Passagem ao Limite:**

Das estimativas temos :

$$\begin{array}{lll} (u_m) & \text{é limitada em} & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \\ (u_m') & \text{é limitada em} & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ (u_m'') & \text{é limitada em} & L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{array}$$

Portanto existem uma subsequência $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $u$, $v$, e $w$ tais que

$$\begin{array}{rll} u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), \\ u_\nu' \overset{*}{\rightharpoonup} v & \text{em} & L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \\ u_\nu'' \overset{*}{\rightharpoonup} w & \text{em} & L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \end{array}$$

Agora desde que $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, pela proposição (1.11) podemos concluir que

$$u_\nu \rightharpoonup u, \quad u_\nu' \rightharpoonup v, \quad u_\nu'' \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Como $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q)$ e o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(Q)$, obtemos que

$$v = u' \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ e } w = u'' \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

Resumindo temos

$$\begin{aligned} u_\nu &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right), &(3.22)\\ u'_\nu &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), &(3.23)\\ u''_\nu &\overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{em} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). &(3.24)\end{aligned}$$

De (3.22), (3.23), (3.24) e da proposição (1.12) temos que

$$\begin{aligned} u &\in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right) \ \cap \ C_w\left([0,T];H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right),\\ u' &\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \ \cap \ C_w\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right).\end{aligned}$$

Por outro lado, das estimativas temos que $(u_\nu)$ é limitada em $C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$. Logo existem uma subsequência de $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, que ainda iremos denotar por $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, e $v \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$, tais que

$$u_\nu \to v \text{ em } C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.25}$$

Como

$$C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \text{ e } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),$$

de (3.22), (3.25) e a unicidade do limite fraco estrela em $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, segue que

$$u = v \text{ em } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),$$

e portanto,

$$u_\nu \to u \text{ em } C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.26}$$

Analogamente, $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Portanto

$$u'_\nu \to u' \text{ em } C\left([0,T];L^2(\Omega)\right). \tag{3.27}$$

Em resumo, provamos que $u$ satisfaz (i)-(iii) do teorema (3.1). Agora mostraremos (iv).

Seja $j \in \mathbb{N}$ fixo. Multiplicando a equação em (3.3) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a $T$ encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_\nu''(t), \omega_j)\, \theta(t) dt \quad &- \quad \frac{1}{\nu} \int_0^T (\Delta u_\nu(t), \omega_j)\, \theta(t) dt - \int_0^T \left( \|u_\nu(t)\|^{2\alpha} \Delta u_\nu(t), \omega_j \right) \theta(t) dt \\ &+ \quad \int_0^T (2\gamma u_\nu'(t), \omega_j)\, \theta(t) dt = 0, \ \forall\ \nu \geq j. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Sabemos que $u_\nu'' \overset{*}{\rightharpoonup} u''$ em $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, então por (1.1) temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \xi(t), u_\nu''(t) \rangle_{(L^2(\Omega))' \times L^2(\Omega)} dt \quad &\rightarrow \quad \int_0^T \langle \xi(t), u''(t) \rangle_{(L^2(\Omega))' \times L^2(\Omega)} dt, \\ &\forall \quad \xi \in L^1\left(0,T; (L^2(\Omega))'\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Tomando em particular:

$$\begin{aligned} \xi : [0,T] \quad &\rightarrow \quad \left(L^2(\Omega)\right)' \\ t \quad &\mapsto \quad \xi(t) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi(t) : L^2(\Omega) \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\mapsto \quad \langle \xi(t), \varphi \rangle = (\varphi, \omega_j)\, \theta(t) \end{aligned}$$

vemos que $\xi \in L^1(0,T; (L^2(\Omega))')$. Logo substituindo esta $\xi$ em (3.29) resulta que

$$\int_0^T (u_\nu''(t), \omega_j)\, \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u''(t), \omega_j)\, \theta(t) dt, \ \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T) \text{ quando } \nu \rightarrow \infty. \tag{3.30}$$

Para o segundo termo de (3.28) vemos que

$$\left| \frac{1}{\nu} \int_0^T (-\Delta u_\nu(t), \omega_j)\, \theta(t) dt \right| \leq \frac{1}{\nu} \int_0^T |\Delta u_\nu(t)| |\theta(t)| dt \leq \frac{c}{\nu} \rightarrow 0, \text{ quando } \nu \rightarrow \infty. \tag{3.31}$$

Também podemos ver que

$$\left|\int_0^T (2\gamma u'_\nu(t),\omega_j)\,\theta(t)dt - \int_0^T (2\gamma u'(t),\omega_j)\,\theta(t)dt\right| = 2\gamma\left|\int_0^T (u'_\nu(t)-u'(t),\omega_j)\,\theta(t)dt\right|$$
$$\leq 2\gamma \max_{0\leq t\leq T}\{|\theta(t)|\}\int_0^T |u'_\nu(t)-u'(t)|dt$$
$$\leq 2\gamma T \max_{0\leq t\leq T}\{|\theta(t)|\}\,\|u'_\nu - u'\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\to 0,$$

aqui usamos (3.27). Logo

$$\int_0^T (2\gamma u'_\nu(t),\omega_j)\,\theta(t)dt \to \int_0^T (2\gamma u'(t),\omega_j)\,\theta(t)dt,\ \forall\,\theta\in\mathcal{D}(0,T) \text{ quando } \nu\to\infty. \tag{3.32}$$

Agora veremos a convergência do termo não linear. Para isso temos que

$$\begin{aligned}
I &= \left|\int_0^T \left(\|u_\nu(t)\|^{2\alpha}\Delta u_\nu(t),\omega_j\right)\theta(t)dt - \int_0^T \left(\|u(t)\|^{2\alpha}\Delta u(t),\omega_j\right)\theta(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^T \left(\|u_\nu(t)\|^{2\alpha}\Delta u_\nu(t) - \|u_\nu(t)\|^{2\alpha}\Delta u(t) + \|u_\nu(t)\|^{2\alpha}\Delta u(t)\right.\right. \\
&- \left.\left.\|u(t)\|^{2\alpha}\Delta u(t),\omega_j\right)\theta(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^T \|u_\nu(t)\|^{2\alpha}\left(\Delta(u_\nu(t)-u(t)),\omega_j\right)\theta(t)dt\right. \\
&+ \left.\int_0^T \left(\|u_\nu(t)\|^{2\alpha} - \|u(t)\|^{2\alpha}\right)\left(\Delta u(t),\omega_j\right)\theta(t)dt\right| \\
&= \left|-\int_0^T \|u_\nu(t)\|^{2\alpha}\left((u_\nu(t)-u(t),\omega_j)\right)\theta(t)dt\right. \\
&+ \left.\int_0^T \left(\|u_\nu(t)\|^{2\alpha} - \|u(t)\|^{2\alpha}\right)\left(\Delta u(t),\omega_j\right)\theta(t)dt\right| \\
&\leq TC_1^{2\alpha}\|\omega_j\|\left(\max_{0\leq t\leq T}|\theta(t)|\right)\|u_\nu - u\|_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)} \\
&+ \left(\max_{0\leq t\leq T}|\theta(t)|\right)\frac{\gamma}{C_2}\int_0^T \left|\|u_\nu(t)\|^{2\alpha} - \|u(t)\|^{2\alpha}\right| dt
\end{aligned} \tag{3.33}$$

como a aplicação $\lambda\mapsto\lambda^{2\alpha}$ é contínua com derivada contínua sobre $[0,T]$, pelo teorema do valor médio temos que

$$\left|\|u_\nu(t)\|^{2\alpha} - \|u(t)\|^{2\alpha}\right| \leq L\,|\|u_\nu(t)\| - \|u(t)\|| \leq L\|u_\nu(t)-u(t)\| \leq L\|u_\nu - u\|_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}.$$

Voltando em (3.33) vemos que existe uma constante $k$ tal que

$$I \leq k \|u_\nu - u\|_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)}.$$

Portanto, tomando o limite quando $\nu \to \infty$, de (3.26) resulta que

$$\int_0^T \|u_\nu(t)\|^{2\alpha} \left(\Delta u_\nu(t), \omega_j\right) \theta(t) dt \to \int_0^T \|u(t)\|^{2\alpha} \left(\Delta u(t), \omega_j\right) \theta(t) dt. \tag{3.34}$$

Agora de (3.30), (3.31), (3.32) e (3.34), tomando o limite em (3.28) quando $\nu \to \infty$

$$\int_0^T \big(u''(t) - \|u(t)\|^{2\alpha} \Delta u(t) + 2\gamma u'(t), \omega_j\big) \theta(t) dt = 0, \ \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T), \ \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

Como $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base para $H_0^1(\Omega)$, por densidade resulta que

$$\int_0^T \big(u''(t) - \|u(t)\|^{2\alpha} \Delta u(t) + 2\gamma u'(t), v\big) \theta(t) dt = 0, \ \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T), \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo

$$\big(u''(t) - \|u(t)\|^{2\alpha} \Delta u(t) + 2\gamma u'(t), v\big) = 0, \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega), \ \text{q.s. em } [0,T].$$

Pela arbitrariedade de $T > 0$ e a unicidade de solução (que será verificada mais a frente) temos que $u : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz (iv).

**Dados Iniciais:**

De (3.26) e (3.27) temos que

$$u_\nu(0) \to u(0) \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u_\nu'(0) \to u'(0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Também temos

$$u_\nu(0) = u_{0\nu} \to u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$$

e

$$u'_\nu(0) = u_{1\nu} \rightarrow u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Portanto $u(0) = u_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u'(0) = u_1$ em $L^2(\Omega)$. Mas como $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, em verdade temos:

$$u(0) = u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

e

$$u'(0) = u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

o que prova (v).

**Unicidade:**

Antes de provarmos a unicidade demonstraremos que $\|u(t)\| > 0$, $\forall\ 0 \leq t < \infty$. Para isso precisaremos do seguinte lema:

**Lema 3.1** *Seja $v \in C_w\left([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$ com $v' \in C_w\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} v''(t) - \|v(t)\|^{2\alpha} \Delta v(t) + \lambda v'(t) = 0 \ \text{ em } L^2(\Omega), \quad 0 \leq t \leq T, \\ v(T) = 0, \quad v'(T) = 0, \end{cases} \tag{3.35}$$

*onde $\lambda$ é uma constante positiva. Então $v(t) = 0$, para $0 \leq t \leq T$.*

**Demonstração:**

Tomando o produto interno em (3.35) por $2v'(t)$, temos

$$\frac{d}{dt}\left[|v'(t)|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|v(t)\|^{2\alpha+2}\right] + 2\lambda |v'(t)|^2 = 0.$$

Integrando de $t$ a $T$, $t < T$,

$$|v'(t)|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|v(t)\|^{2\alpha+2} = 2\lambda \int_t^T |v'(\xi)|^2 d\xi.$$

Logo

$$|v'(t)|^2 \leq 2\lambda \int_t^T |v'(\xi)|^2 d\xi, \quad \forall \quad t \in [0,T].$$

Agora seja

$$\begin{aligned} z : [0,T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \eta &\mapsto z(\eta) = |v'(T-\eta)|^2 \end{aligned}$$

então

$$0 \leq z(T-t) = |v'(t)|^2 \leq 2\lambda \int_t^T |v'(\xi)|^2 d\xi = -2\lambda \int_{T-t}^0 |v'(T-\eta)|^2 d\eta = 2\lambda \int_0^{T-t} z(\eta) d\eta,$$

onde na penúltima igualdade usamos a mudança de variável $\xi = T - \eta$. Resumindo temos

$$\begin{aligned} 0 \leq z(y) &\leq 2\lambda \int_0^y z(\eta) d\eta, \quad \forall \quad y \in [0,T], \\ z(0) &= |v'(T)|^2 = 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo lema de Gronwall, segue que $z(t) = 0$, $\forall\ t \in [0,T]$. Desta forma, $v'(t) = 0$ em $L^2(\Omega)$, $\forall\ t \in [0,T]$. Como por hipótese $v(T) = 0$, concluímos que $v(t) = 0$ em $L^2(\Omega)$, $\forall$ $t \in [0,T]$.

□

Agora podemos provar que $\|u(t)\| > 0$, $\forall\ t \geq 0$. De fato, suponha, por um momento, que $\|u(T)\| = 0$ para algum $T > 0$. De (3.20) e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos

$$\frac{|u_\nu'(T)|}{\nu^{-1} + \|u_\nu(T)\|^{2\alpha}} \leq c \frac{\|u_\nu'(T)\|^2}{\nu^{-1} + \|u_\nu(T)\|^{2\alpha}} < c \left( \frac{\gamma}{C_2} \right)^2,$$

ou seja, existe uma constante positiva k tal que

$$|u_\nu'(T)|^2 \leq k \left( \nu^{-1} + \|u_\nu(T)\|^{2\alpha} \right),\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Levando-se em conta (3.26) e (3.27), tomando o limite na desigualdade acima encontramos

$$|u'(T)|^2 \leq k\|u(T)\|^{2\alpha} = 0.$$

Portanto $u$ satisfaz as condições do Lema 3.1, donde resulta que $u(t) = 0$ em $L^2(\Omega)$, $\forall\ t \in [0, T]$. Em particular, $u(0) = u_0 = 0$ o que contradiz a hipótese $u_0 \neq 0$. Isto prova que

$$\|u(t)\| > 0,\ \forall\ t \geq 0. \tag{3.36}$$

Provaremos agora a unicidade. Sejam $u$ e $v$ satisfazendo (i)-(iv) e consideremos $w = u - v$. Então

$$w''(t) - \|u(t)\|^{2\alpha}\Delta u(t) + \|v(t)\|^{2\alpha}\Delta v(t) + 2\gamma w'(t) = 0$$

mas

$$\begin{aligned}
- &\ \|u(t)\|^{2\alpha}\Delta u(t) + \|v(t)\|^{2\alpha}\Delta v(t) \\
= &\ -\|u(t)\|^{2\alpha}\left(\Delta u(t) - \Delta v(t)\right) - \|u(t)\|^{2\alpha}\Delta v(t) + ||v(t)||^{2\alpha}\Delta v(t) \\
= &\ \|u(t)\|^{2\alpha}\Delta w(t) - \left(\|u(t)\|^{2\alpha} - \|v(t)\|^{2\alpha}\right)\Delta v(t)
\end{aligned}$$

portanto

$$\left(w''(t) - \|u(t)\|^{2\alpha}\Delta w(t) + 2\gamma w'(t), v\right) \ = \ \left(\left(\|u(t)\|^{2\alpha} - \|v(t)\|^{2\alpha}\right)\Delta v(t), v\right),$$

$\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall\ t \geq 0$. Fazendo $v = 2w'(t)$ na equação acima obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 \ &+\ \|u(t)\|^{2\alpha}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 4\gamma|w'(t)|^2 \\
&=\ 2\left(\|u(t)\|^{2\alpha} - \|v(t)\|^{2\alpha}\right)\left(\Delta v(t), w'(t)\right) \\
&\leq\ 2\left|||u(t)||^{2\alpha} - ||v(t)||^{2\alpha}\right||\Delta v(t)||w'(t)| \\
&\leq\ C_4\left|\|u(t)\|^{2\alpha} - \|v(t)\|^{2\alpha}\right||w'(t)|
\end{aligned} \tag{3.37}$$

mas

$$\|u(t)\|^{2\alpha}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^{2\alpha}\|w(t)\|^2\right) - \alpha\|w(t)\|^2\|u(t)\|^{2\alpha-2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \tag{3.38}$$

e

$$
\begin{aligned}
\left|\|u(t)\|^{2\alpha}-\|v(t)\|^{2\alpha}\right| &= \left|\left(\|u(t)\|^{\alpha}+\|v(t)\|^{\alpha}\right)\left(\|u(t)\|^{\alpha}-\|v(t)\|^{\alpha}\right)\right| \\
&\leq C_5\left|\|u(t)\|^{\alpha}-\|v(t)\|^{\alpha}\right| \\
&\leq C_6\|u(t)-v(t)\| \\
&= C_6\|w(t)\|. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Usando (3.38) e (3.39) em (3.37), segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2\right. &+ \left.\|u(t)\|^{2\alpha}\|w(t)\|^2\right]+4\gamma|w'(t)|^2 \\
&\leq C_6\|w(t)\||w'(t)|+2\alpha\|w(t)\|^2\|u(t)\|^{2\alpha-2}\left((u(t),u'(t))\right) \\
&\leq C_7\left(\|w(t)\|^2+|w'(t)|^2\right)+C_8\|w(t)\|^2,
\end{aligned}
$$

donde

$$\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2+\|u(t)\|^{2\alpha}\|w(t)\|^2\right)\leq C_9\left(|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2\right).$$

Integrando de 0 a $t$ e notando que $w(0)=w'(0)=0$, temos

$$|w'(t)|^2+\|u(t)\|^{2\alpha}\|w(t)\|^2\leq C_9\int_0^t\left(|w'(\xi)|^2+\|w(\xi)\|^2\right)d\xi,\ \forall\ t\geq 0.$$

Seja $T>0$ arbitrariamente fixado e

$$\delta_T=\min\left\{\|u(t)\|^{2\alpha};\quad 0\leq t\leq T\right\},$$

então

$$|w'(t)|^2+\delta_T\|w(t)\|^2\leq C_9\int_0^t\left(|w'(\xi)|^2+\|w(\xi)\|^2\right)d\xi,\ \forall\ t\in[0,T].$$

Agora tomando o $\min\{1,\delta_T\}$ temos que existe uma constante $C_T$ tal que

$$|w'(t)|^2+\|w(t)\|^2\leq C_T\int_0^t\left(|w'(\xi)|^2+\|w(\xi)\|^2\right)d\xi,\ \forall\ t\in[0,T].$$

Pelo Lema de Gronwall segue que

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 = 0 \text{ em } [0, T],$$

logo

$$w(t) = 0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \ \forall \ t \in [0, T],$$

o que prova a unicidade.

□

## 3.2 Comportamento Assintótico

Nesta seção vamos aplicar o método de Nakao, e mostrar o decaimento algébrico da energia

$$E(t) = |u'(t)|^2 + \frac{1}{\alpha + 1}\|u(t)\|^{2\alpha+2}, \ t \geq 0, \tag{3.40}$$

onde $u$ é a função dada pelo teorema (3.1).

**Teorema 3.2** *Consideremos as mesmas hipóteses do teorema (3.1) e seja $u$ satisfazendo (i)-(v). Então existe uma constante positiva $k$ tal que*

$$E(t) \leq k(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.41}$$

**Demonstração:**
Fazendo $v = 2u'(t)$ em (iv), temos

$$\frac{d}{dt}\left(|u'(t)|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u(t)\|^{2\alpha+2}\right) + 4\gamma|u'(t)|^2 = 0.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}E(t) + 4\gamma|u'(t)|^2 = 0. \tag{3.42}$$

Portanto a energia é decrescente. Integrando (3.42) de 0 a $t$ temos

$$E(t) + 4\gamma \int_0^t |u'(\xi)|^2 d\xi = E(0) =: E_0$$

isto é, $E$ é limitada por $E_0$.

Mostraremos agora que $E(t)$ satisfaz a desigualdade do Lema de Nakao. De fato, integrando (3.42) de $t$ a $t+1$ e fazendo

$$F^{2(\alpha+1)}(t) = E(t) - E(t+1),$$

temos

$$4\gamma \int_t^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi = F^{2(\alpha+1)}(t). \tag{3.43}$$

Portanto

$$4\gamma \left( \int_t^{t+\frac{1}{4}} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t+\frac{1}{4}}^{t+\frac{3}{4}} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi \right) = F^{2(\alpha+1)}(t). \tag{3.44}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existem $t_1 \in \left[t, t+\dfrac{1}{4}\right]$ e $t_2 \in \left[t+\dfrac{3}{4}, t+1\right]$ tais que

$$\frac{|u'(t_1)|^2}{4} = \int_t^{t+\frac{1}{4}} |u'(\xi)|^2 d\xi \quad \text{e} \quad \frac{|u'(t_2)|^2}{4} = \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi.$$

Isto e (3.44) nos conduz a

$$4\gamma \left( \frac{|u'(t_1)|^2}{4} + \int_{t+\frac{1}{4}}^{t+\frac{3}{4}} |u'(\xi)|^2 d\xi + \frac{|u'(t_2)|^2}{4} \right) = F^{2(\alpha+1)}(t).$$

Portanto

$$|u'(t_1)|^2 + |u'(t_2)|^2 \leq \frac{F^{2(\alpha+1)}(t)}{\gamma}. \tag{3.45}$$

Por outro lado,

$$E(t) = |u'(t)|^2 + \frac{1}{\alpha+1}\|u(t)\|^{2\alpha+2} \geq \frac{1}{\alpha+1}\|u(t)\|^{2\alpha+2} \geq \frac{C_{10}}{\alpha+1}|u(t)|^{2\alpha+2},$$

donde

$$|u(t)|^{2(\alpha+1)} \leq C_{11}E(t). \tag{3.46}$$

Fazendo em (iv), $v = u(t)$, temos

$$\|u(t)\|^{2\alpha+2} = -\frac{d}{dt}(u'(t), u(t)) + |u'(t)|^2 - 2\gamma(u'(t), u(t)).$$

Integrando de $t_1$ a $t_2$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2\alpha+2} d\xi &= (u'(t_1), u(t_1)) - (u'(t_2), u(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi \\
&- 2\gamma \int_{t_1}^{t_2} (u'(\xi), u(\xi)) d\xi \\
&\leq |u'(t_1)||u(t_1)| + |u'(t_2)||u(t_2)| + \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi \\
&+ 2\gamma \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)||u(\xi)| d\xi. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Agora, seja $\varepsilon > 0$. Usando a desigualdade de Young (com $q = 2(\alpha+1)$ e $p = \frac{2(\alpha+1)}{2\alpha+1}$), (3.45), (3.46) e o fato que $E(t)$ é decrescente, para $i = 1, 2$ temos

$$\begin{aligned}
|u'(t_i)||u(t_i)| &\leq \frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)\varepsilon^{\frac{1}{2\alpha+1}}}|u'(t_i)|^{\frac{2(\alpha+1)}{2\alpha+1}} + \frac{\varepsilon}{2(\alpha+1)}|u(t_i)|^{2(\alpha+1)} \\
&\leq \frac{2\alpha+1}{2\gamma^{\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}(\alpha+1)\varepsilon^{\frac{1}{2\alpha+1}}}F^{\frac{2(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}}(t) + \frac{C_{11}\varepsilon}{2(\alpha+1)}E(t_i) \\
&\leq \frac{2\alpha+1}{2\gamma^{\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}(\alpha+1)\varepsilon^{\frac{1}{2\alpha+1}}}F^{\frac{2(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}}(t) + \frac{C_{11}\varepsilon}{2(\alpha+1)}E(t),
\end{aligned}$$

ou seja

$$|u'(t_i)||u(t_i)| \leq C_{12}(\varepsilon)F^{\frac{2(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}}(t) + C_{13}\varepsilon E(t). \tag{3.48}$$

De (3.43), (3.46) e o fato de que $E = E(t)$ é decrescente, temos também que

$$
\begin{aligned}
2\gamma\int_{t_1}^{t_2}|u'(\xi)||u(\xi)|d\xi &\leq 2\gamma\left[\sup_{t\leq\xi\leq t+1}|u(\xi)|\right]\int_t^{t+1}|u'(\xi)|d\xi \\
&\leq 2\gamma\left[\sup_{t\leq\xi\leq t+1}|u(\xi)|\right]\left(\int_t^{t+1}|u'(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\left[\sup_{t\leq\xi\leq t+1}|u(\xi)|\right]F^{\alpha+1}(t) \\
&\leq \sqrt{\gamma}C_{11}^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}E^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}(t)F^{\alpha+1}(t) \\
&\leq \sqrt{\gamma}C_{11}^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}E_0^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}F^{\alpha+1}(t) \\
&= C_{14}F^{\alpha+1}(t). \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

Usando (3.43), (3.47)-(3.49), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\|u(\xi)\|^{2\alpha+2}d\xi &\leq 2C_{12}(\varepsilon)F^{\frac{2(\alpha+1)^2}{2\alpha+1}}(t)+2C_{13}\varepsilon E(t)+\frac{F^{2(\alpha+1)}(t)}{4\gamma}+C_{14}F^{\alpha+1}(t) \\
&= \left[2C_{12}(\varepsilon)F^{\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}}(t)+\frac{F^{2\alpha}(t)}{4\gamma}+C_{14}F^{\alpha-1}(t)\right]F^2(t) \\
&+ 2C_{13}\varepsilon E(t), \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

sabemos que $F(t) = (E(t) - E(t+1))^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}$ e como $E = E(t)$ é decrescente resulta que $0 \leq F(t) \leq c$, $c$-constante, $\forall\, t \geq 0$. Além disso, note que $\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha+1} > 0$, $2\alpha > 0$ e $\alpha - 1 \geq 0$. Logo

$$
\left(2C_{12}(\varepsilon)F^{\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}}(t)+\frac{F^{2\alpha}(t)}{4\gamma}+C_{14}F^{\alpha-1}(t)\right) \leq C_{15}(\varepsilon),\ \forall\, t \geq 0. \qquad (3.51)
$$

Este fato e (3.50) implicam que

$$
\int_{t_1}^{t_2}\|u(\xi)\|^{2\alpha+2}d\xi \leq C_{15}(\varepsilon)F^2(t)+2C_{13}\varepsilon E(t). \qquad (3.52)
$$

Por outro lado, temos que

$$
E(t) = |u'(t)|^2+\frac{1}{\alpha+1}\|u(t)\|^{2\alpha+2} \leq |u'(t)|^2+\|u(t)\|^{2\alpha+2}.
$$

Integrando de $t_1$ a $t_2$, usando (3.43), (3.51) e (3.52) resulta

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} E(\xi)d\xi &\leq \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2\alpha+2} d\xi \\ &\leq \frac{F^{2(\alpha+1)}(t)}{4\gamma} + C_{15}(\varepsilon)F^2(t) + 2C_{13}\varepsilon E(t) \\ &= \left(\frac{F^{2\alpha}(t)}{4\gamma} + C_{15}(\varepsilon)\right) F^2(t) + 2C_{13}\varepsilon E(t) \\ &\leq 2C_{15}(\varepsilon)F^2(t) + 2C_{13}\varepsilon E(t).\end{aligned}$$

Novamente, pelo teorema do valor médio para integrais, existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$(t_2 - t_1)E(t^*) = \int_{t_1}^{t_2} E(\xi)d\xi \leq 2C_{15}(\varepsilon)F^2(t) + 2C_{13}\varepsilon E(t).$$

Logo

$$\frac{1}{2}E(t^*) \leq 2C_{15}(\varepsilon)F^2(t) + 2C_{13}\varepsilon E(t). \tag{3.53}$$

Agora, integrando (3.42) de $t$ a $t^*$, temos

$$E(t) = 4\gamma \int_t^{t^*} |u'(\xi)|^2 d\xi + E(t^*)$$

De (3.43), (3.51), (3.53) e esta última igualdade obtemos

$$\begin{aligned}E(t) &\leq F^{2(\alpha+1)}(t) + 4C_{15}(\varepsilon)F^2(t) + 4C_{13}\varepsilon E(t) \\ &= \left(F^{2\alpha}(t) + 4C_{15}(\varepsilon)\right) F^2(t) + 4C_{13}\varepsilon E(t) \\ &\leq 4(\gamma+1)C_{15}(\varepsilon)F^2(t) + 4C_{13}\varepsilon E(t) \\ &= C_{16}(\varepsilon)F^2(t) + C_{17}\varepsilon E(t).\end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon$ tal que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{C_{17}}$ temos que existe uma constante $C_{18}$ independente de $t$ tal que

$$E(t) \leq C_{18}F^2(t),$$

ou ainda

$$E^{\alpha+1}(t) \leq C_{19}F^{2(\alpha+1)}(t).$$

Sabendo que $E$ é decrescente, a desigualdade acima nos leva a

$$\sup_{t\leq\xi\leq t+1}\left\{E^{\alpha+1}(\xi)\right\} \leq C_{19}\left(E(t) - E(t+1)\right).$$

Aplicando o Lema de Nakao, concluimos a demonstração de teorema (3.2).

$\square$

# Referências Bibliográficas


[1] Arosio, A. & Spagnolo, S. - *Global Solutions to the Cauchy Problem for a Nonlinear Hyperbolic Equation.* Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar, Vol. 6 edited by H. Brezis and J. L. Lions, Pitman, London, 1984.

[2] Bernstein, S. - *Sur une Classe d'équations Fonctionelles aux Derivées Partielles.* Isv. SSSR Serie Math. 4, pag 17-26, 1940.

[3] Brezis, H. - *Analyse Fonctionnelle, Thèorie et Applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, MASSON, 1987.

[4] Brito, E. H. - *The Damped Elastic Stretched String Equation Generalized: Existence, Uniqueness, Regularity and Stability.* Applicable Alalysis 13, pag 219-233,1982.

[5] Coddington, E. A. & Levinson, N. - *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill, New York, 1955.

[6] D'Ancona P. & Spagnolo, S. - *Global Solvability for the Degenerate Kirchhoff Equation with Real Analytic Data.* Invenciones Matematicae, 108, pag 247-262, 1992.

[7] Dickey, R. W. - *Infinite System of Nonlinear Oscilation Equations Related to the String.* Proc. of the A.M.S., Vol 23, pag 459-468, 1969.

[8] Ebihara, Y. - *On the Existence of Local Solution for Some Degenerate Quasilinear Hyperbolic Equations.* An. Acad. Bras. Ciências, Vol. 57 (2), pag 145-152, 1985.

[9] Ebihara, Y. & Medeiros L. A. & Milla Miranda, M. - *Local Solutions for a Nonlinear Degenerate Hyperpolic Equation.* Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications 10, pag 27-40, 1986.

[10] Kirchhorff, G. - *Vorlesungen über Mechanik.* Tauber, Leipzig, 1883.

[11] Lions, J. L. - *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.* Dunod, Gauthier-Villars, 1968.

[12] Lions, J. L. - *On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathmatical Physics*. Contemporary Development in Continuum Mechanics and Partial Differential Equation, Edited by G. M. de La Penha and L. A. Medeiros, North-Holland, Amsterdam, pag 285-346, 1977.

[13] Medeiros, L. A. - *Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações*. Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1983.

[14] Medeiros, L. A. & Mello, E. A. de - *A Integral de Lebesgue*. Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1989.

[15] Medeiros, L. A. & Miranda, M. M. - *On Nonlinear Wave Equation With Damping*. Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, Vol. 13, $n\underline{o}$ 2 y 3, pag 213-231, 1990.

[16] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M. - *Espaços de Sobolev, Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*. Instituto de Matemática, UFRJ, 2000.

[17] Menzala, G. P. - *Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1977.

[18] Milla Miranda, M. - *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*. Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1990.

[19] Nakao, M. - *Asymptotic Stability of the Bounded or Almost Periodic Solution of the Wave Equation with Nonlinear Dissipative Term*. Journal Mathematics Analisys Appl., 58, 1977.

[20] Nishihara, K. & Yamada, Y. - *On Global Solutions of Some Degenerated Quasilinear Hyperbolic Equations with Dissipative Terms*. Funkcialaj Ekvacioj, 33, pag 151-159, 1990.

[21] Pohozhaev, S. I. - *On a Class of Quasilinear Hiperbolic Equation*. Math. USSR Sbornik. 25, pag 145-158, 1975.

[22] Rivera Rodrigues, P. H - *On Local Strong Solutions of a Nonlinear Partial Differential Equation*. Applicable Analysis, Vol. 10, pag 93-104, 1980.

[23] Spagnolo, S. - *Solutions Analytiques d'une Équation Nonlinéare de type Hyperbolique*. Seminaire Vailant, Vol. 83, pag 25-43, Herman, Paris, 1983.