

# Equações Diferenciais Ordinárias

## Um curso introdutório

Coleção BC&T - UFABC

Textos Didáticos

**1**

Rodney Carlos Bassanezi

Equações Diferenciais Ordinárias  
Um curso introdutório

Coleção BC&T - UFABC  
Textos Didáticos  
Volume 1

À Silvia que me acompanhou amando todos  
esses anos e gerou meus filhos que geraram  
meus netos: Pontos de equilíbrio, assintoti-  
camente estáveis, de um sistema autônomo  
um tanto complexo.



# PREFÁCIO

Escrevemos este livro introdutório de Equações Diferenciais Ordinárias, pensando, não somente em utilizá-lo em cursos básicos da área de exatas mas também como ferramenta exploratória para alunos de outras áreas que buscam na modelagem matemática uma afirmação para suas experiências práticas.

O texto deveria apresentar, além de uma iniciação à modelagem matemática, um material relativamente elementar de dificuldade crescente, suficientemente interessante para aqueles que pretendem prosseguir nos estudos mais avançados. Desta forma, pensamos em um curso rápido, abordando sem demonstrações na maioria das vezes, tópicos essenciais ao entendimento de processos dinâmicos.

O texto é composto, essencialmente, de materiais provenientes de outros textos que escrevemos anteriormente, sendo que, alguns já se encontram esgotados no mercado ou foram usados como apostilas de cursos e isto poderia, talvez, justificar este nosso autoplágio.

Introduzimos inicialmente as equações de diferenças de primeira ordem que utilizam variações discretas e podem ser resolvidas por meio de processos indutivos ou utilizando programas computacionais elementares, sendo bastante adequadas para modelagem no ensino médio. Analisamos para as equações não lineares a estabilidade de seus pontos estacionários com a intenção de facilitar este estudo posterior com as equações diferenciais. Voltamos às equações de diferenças finitas nos capítulos finais para resolver os sistemas lineares e também quando apresentamos os sistemas não lineares.

No Capítulo 2, onde destacamos as EDO de primeira ordem, procuramos motivar o estudo dos processos variacionais com uma boa dose de modelos matemáticos. Alguns destes modelos foram formulados e desenvolvidos em cursos de especialização para professores de matemática, utilizando dados reais. Procuramos também abordar os principais métodos utilizados para resolver as equações de primeira ordem e apresentamos algumas equações

especiais que aparecem com frequência em modelos práticos. As equações exatas e fatores integrantes para se obter uma solução exata, apesar de serem bastante simples, utiliza conteúdo matemático mais avançado. Decidimos apresentá-los neste texto como uma preparação do aluno para as disciplinas de Cálculo de Várias Variáveis e Variável Complexa.

No Capítulo 3 estudamos essencialmente as EDO lineares de segunda ordem, sem a preocupação de estender os conceitos para dimensões mais altas o que é comum na maioria dos livros. O motivo desse enfoque é evitar, pelo menos momentaneamente, os pré requisitos exigidos para o entendimento dos espaços de soluções. Conceitos estudados em Álgebra Linear como dependência linear, espaços vetoriais etc são passados da maneira mais informal possível. O Teorema de existência e unicidade de soluções é também admitido sem demonstração - procuramos mostrar sua importância com exemplos e contra-exemplos.

No Capítulo 4 apresentamos os sistemas de equações diferenciais lineares clássicos com ênfase na análise de seus pontos estacionários. Estudamos aqui os sistemas compartimentais cuja característica estrutural facilita a formulação de modelos de fenômenos reais que têm variações proporcionais às quantidades embutidas em cada compartimento.

O último capítulo é dedicado aos sistemas não lineares autônomos, isto é, quando os campos de direções não têm o tempo dado explicitamente. Este tipo de sistema aparece frequentemente na modelagem de fenômenos biológicos.

Procuramos deixar ao longo do caminho uma série de exercícios e propostas de projetos bastante simples que podem ser formulados por meio de equações relativamente elementares. Tais projetos podem ser propostos em programas de Iniciação Científica como motivação à modelagem e a estudos mais avançados das equações ordinárias

As equações diferenciais constituem um dos mais notáveis sucessos do intelecto humano, e não gostaríamos de induzir no estudante a idéia de que tal disciplina seja apenas um amontoado de técnicas ou "receitas" de métodos matemáticos. Este curso rápido e, aparentemente superficial, deve ser somente o aperitivo para outros cursos mais completos. Salientamos que, para que o treinamento em equações diferenciais tenha algum valor a nível profissional e não fique apenas como curiosidade inóqua, é indispensável que este estudo seja completado no futuro.

Gostaríamos de agradecer às inúmeras pessoas que influenciaram em nossa formação matemática, em especial ao professor Nelson Onuchic que nos mostrou pela primeira vez a beleza e a importância das EDO, aos colegas que generosamente compartilham conosco de seu tempo e conhecimento (H. Taipo e A. Brandão).

Agradecemos ainda a valiosa colaboração do Jefferson Leite que, muitas vezes, deixou seu trabalho de pesquisa para preparar e editar este texto.

# SUMÁRIO

<b>Sumário</b>	<b>8</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
1.1 Modelos Matemáticos . . . . .	12
1.2 Modelos matemáticos e as equações variacionais . . . . .	14
<b>2 Equações de Diferenças</b>	<b>17</b>
2.1 Equação de diferenças de primeira ordem . . . . .	18
2.2 Modelos matemáticos com equações de primeira ordem . . . . .	20
2.3 Equações Lineares de Diferenças de segunda ordem . . . . .	23
2.4 Equações de diferenças não lineares . . . . .	28
<b>3 Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem</b>	<b>35</b>
3.1 Equação geral de primeira ordem . . . . .	39
3.2 Problema de valor inicial . . . . .	41
3.3 Equação diferencial fundamental . . . . .	42
3.4 Equações diferenciais autônomas . . . . .	43
3.5 Modelos Matemáticos com equações diferenciais de primeira ordem . . . . .	49
3.6 Equação com separação de variáveis . . . . .	59
3.7 Equações homogêneas . . . . .	65
3.8 Equações lineares de primeira ordem . . . . .	69
3.9 Equações especiais . . . . .	74
3.10 Equações exatas* . . . . .	85
3.11 Trajetórias ortogonais . . . . .	89
<b>4 Equações diferenciais lineares de segunda ordem</b>	<b>93</b>
4.1 Princípio de superposição . . . . .	94
4.2 Teorema de existência e unicidade de soluções . . . . .	97
4.3 Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes . . . . .	99



---

4.4	Solução geral da equação diferencial linear não-homogênea com coeficientes constantes . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Sistemas de equações diferenciais lineares</b>	<b>117</b>
5.1	Sistemas de duas equações de primeira ordem . . . . .	119
5.2	Estudo qualitativo de sistemas lineares bidimensionais . . . . .	122
5.3	Sistemas lineares não-autônomos: Estabilidade . . . . .	127
5.4	Modelos Compartimentais Lineares . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Sistemas de equações ordinárias autônomas quase lineares</b>	<b>137</b>
6.1	Um estudo qualitativo dos sistemas autônomos quase-lineares	139
6.2	Aplicações de sistemas autônomos quase-lineares . . . . .	144
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>163</b>



## INTRODUÇÃO

*“...Na verdade poderíamos dizer que a quantidade de equações que possuem soluções explícitas é praticamente nula, se comparada àquelas que não têm soluções, por mais liberais que sejamos quanto às operações aceitáveis. A importância do estudo de tais equações está no que podemos aprender delas e na utilização que delas fazemos para analisar as demais.”*

W. C. Ferreira <sup>1</sup>

As Equações Diferenciais constituem um tópico vastíssimo na Matemática que pode ser abordado de maneiras diversas, dependendo do objetivo proposto. Em nosso caso específico trataremos as equações diferenciais como modelos formulados para descrever situações reais e, neste sentido, vamos nos preocupar com técnicas de resoluções sem abrir mão do processo de modelagem. Desta forma, veremos as Equações Diferenciais sob o ponto de vista da “Matemática Aplicada”, embora tal termo seja por si só motivo de polêmica entre matemáticos. Caberia aqui a frase de J. B. Keller: “*A Matemática Aplicada é uma ciência que inclui a Matemática Pura como uma de suas divisões*”. Dizer que a Matemática está incluída na Matemática Aplicada pode ser uma afirmação muito forte e incorreta no momento, entretanto a história tem mostrado que a matemática de valor sempre tem chance de ser aplicada. Com relação a este aspecto, é interessante citar um texto de J. von Neumann: “*Eu penso que seria uma aproximação relativamente*

---

<sup>1</sup>(Extraído do livro “Equações Diferenciais com Aplicações” de R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira Jr, Edit. Harbra, 1988 - esgotado)

*boa da verdade (que é demasiada complexa para permitir qualquer coisa melhor que uma aproximação) dizer que as idéias matemáticas têm a sua origem em situações empíricas...Mas, uma vez concebidas, elas adquirem uma identidade e crescimento próprios governados quase que inteiramente por motivações estéticas...Entretanto, quando uma disciplina matemática se distancia de sua fonte empírica...existe um grave perigo de que ela se desenvolva em linhas de menor resistência e que a sua corrente principal, distante da fonte original, se ramifique em uma miríade de subdivisões insignificantes, tornando a disciplina em uma massa desorganizada de detalhes e complexidades”.*

Dentro da Matemática Aplicada as Equações Diferenciais têm um papel relevante na ligação e interação com outras ciências, desde sua origem em problemas ligados à Física e recentemente como ferramenta indispensável à Biologia com todas suas ramificações, compartilhando amplamente com alguns ramos da Química, Engenharia e Economia. Assim, acreditamos que os primeiros passos para a modelagem de fenômenos reais, seriam bastante trôpegos se fosse descartada uma iniciação às Equações Diferenciais e optamos por considerar a "Matemática Aplicada" não exatamente como uma ciência, mas como uma **atitude** no estudo da Matemática dentro do contexto científico em que ela se desenvolve. A Matemática Aplicada não deve ser considerada como uma disciplina estanque e descomprometida - ela é um instrumento intelectual poderoso que, através da abstração e formalização, sintetiza idéias as quais, embora semelhantes, surgem em situações as mais diversas e por isto mesmo camufladas na sua essência. O objetivo da Matemática é, então, extrair esta essência e formalizá-la em um contexto abstrato - **o modelo** - onde ela possa ser trabalhada intelectualmente, desenvolvida e absorvida com uma extraordinária economia de pensamento.

## 1.1 Modelos Matemáticos

Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica.

A modelagem é um processo dinâmico para se obter modelos, sendo caracterizada por etapas que se complementam:

**Experimentação:** Quando se tem um tema de estudo, a obtenção de dados experimentais ou empíricos são fundamentais para a compreensão do

problema e ajudam na estruturação, formulação e modificações eventuais dos modelos. Além disso, os dados experimentais decidem a validação dos modelos.

Os métodos experimentais são ditados pela natureza do experimento e objetivo da pesquisa e, via de regra, realizados por pesquisadores de áreas específicas relacionadas aos projetos. Entretanto, no caso educacional a obtenção de dados pode facilmente ser realizada por não-especialistas, via Internet.

**Abstração:** É o processo de seleção das variáveis essenciais responsáveis pela evolução do fenômeno estudado. Nesta fase são formuladas as hipóteses e "leis" que deverão ser testadas na validação do modelo. A analogia entre sistemas é fundamental para a formulação destas leis e simplificação dos modelos.

**Formulação do modelo:** O modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem usual por uma linguagem matemática. A construção do modelo segue de perto o uso de um dicionário que traduz as palavras chaves em alguma estrutura matemática. Assim, *variação de uma população* pode ser traduzido por:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}: & \text{derivada de } P(t) \text{ em relação ao tempo (variação contínua)} \\ & \text{ou} \\ P(t_2) - P(t_1): & \text{diferença da população em tempos distintos (var. discreta)} \\ & \text{ou} \\ \frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1}: & \text{variação média de uma população} \end{aligned}$$

Se tivermos como hipótese que *a variação populacional é proporcional à população*, usando a formulação de variação contínua, temos:

$$\frac{dP}{dt} = aP$$

**Resolução:** A resolução de um modelo depende da sua complexidade, podendo ser uma resolução analítica ou numérica. No caso de sistemas de equações diferenciais, muitas vezes, devemos nos satisfazer apenas com soluções qualitativas. No caso de um curso introdutório de EDO, o aprendizado de técnicas para resolver equações pode ser mais relevante que as demais etapas do processo de modelagem.

**Validação:** Validar um modelo matemático significa comparar a solução obtida com dados reais. A validação depende do grau de aproximação desejado e, na maioria das vezes esta etapa pode ser descartada quando se trata de um curso inicial de EDO.

**Modificação:** Se na validação do modelo o grau de aproximação desejado não é atingido devemos inserir novas variáveis no modelo ou modificar

a lei de formação, e assim o modelo original deve ser modificado iniciando novamente o processo. A formulação de novos modelos mais complexos, baseados em modelos simples é uma boa estratégia de ensino-aprendizagem.

**Aplicação:** A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. A linguagem oferecida pelas equações diferenciais e equações de diferenças é fundamental na transferência e entendimento da linguagem "natural", uma vez que a palavra chave variação aparece quase sempre nas situações reais.

## 1.2 Modelos matemáticos e as equações variacionais

Um problema real não pode ser representado de maneira exata em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Um modelo deve ser considerado apenas como um retrato ou uma simulação de um fenômeno e sua validação depende muito da escolha das variáveis e das hipóteses formuladas. É muito frequente em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento, obtermos equações para descrever as "variações" das quantidades (variáveis de estado) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, a dinâmica do fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas **equações diferenciais**, ao passo que se as variáveis envolvidas forem discretizadas, isto é, funções de uma malha de pontos, em que temos as médias das variações, então as equações do modelo serão denominadas **equações de diferenças**. De qualquer forma, podemos ter situações modeladas pelos dois tipos de equações. Por exemplo, A lei malthusiana de crescimento populacional dada por:

"A variação populacional é proporcional à população", pode ser traduzida por um modelo contínuo (equação diferencial)

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P$$

ou modelos discretos (equações de diferenças)

$$\frac{P(t_2) - P(t_1)}{t_2 - t_1} = \alpha P(t_1)$$

ou

$$P_{n+1} - P_n = \alpha P_n \Rightarrow P_{n+1} = \beta P_n$$

Por questão didática iniciaremos nosso estudo com as equações de diferenças uma vez que são operacionalmente mais simples.





## EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

*“Nas ciências exatas a validade dos modelos testa-se pela lógica e pela experimentação. Daí a necessidade de fazer a distinção muito clara entre modelo e a parte do mundo exterior que se supõe que ele representa”*

L. Garding

Existem situações em que as equações com variações discretas são mais apropriadas; por exemplo, quando o crescimento se dá em etapas discretas e não ocorre uma sobreposição da variável analisada, de gerações (no caso de uma dinâmica populacional) ou o de salários (no caso de um orçamento familiar).

Uma equação de diferenças estabelece uma relação envolvendo os valores de uma variável dependente para um conjunto discreto de valores (com retardamento) da variável independente. Por conveniência vamos supor sempre que a variável independente for o tempo, seus valores sejam tomados igualmente espaçados, isto é, consideramos  $t_2 - t_1 = k$ . Para simplificar tomamos tais espaços de tempo valendo uma unidade  $k = 1$ .

A **solução** de uma equação de diferenças é uma relação funcional que não envolve diferenças, definida para todos os números naturais  $n \in N$ , e satisfazendo a equação de diferenças, isto é, transformando-a numa identidade. A solução de uma equação de diferenças é obtida por um processo recursivo mas nem sempre podemos explicitar a solução geral de uma equação de diferenças quando a equação não é linear.

A forma geral de uma equação de diferenças linear de **ordem (n-m)** é dada por:

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_m y_{n-m} \quad (2.1)$$

ou

$$y_n = \sum_{k=1}^m a_k y_{n-k} \quad (2.2)$$

com  $a_k$  constantes;  $m < n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  e dadas  $(n-m)$  condições iniciais.

## 2.1 Equação de diferenças de primeira ordem

Uma equação de diferenças é de primeira ordem se  $(n-m) = 1$ . Sua expressão geral é dada por:

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1} \\ y_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (2.3)$$

O processo recursivo fornece:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & \alpha y_0 \\ y_2 & = & \alpha y_1 = \alpha^2 y_0 \\ y_3 & = & \alpha y_2 = \alpha^3 y_0 \\ \dots & \cdot & \dots \\ y_n & = & \alpha y_{n-1} = \alpha^n y_0 \end{array}$$

Neste caso, a solução geral de (2.3) é dada por

$$y_n = y_0 \alpha^n$$

Uma maneira alternativa para resolver a equação (2.3) é supor que a solução seja da forma

$$y_n = k \lambda^n$$

Substituindo esta expressão em (2.3), temos:

$$k \lambda^n = \alpha k \lambda^{n-1} \iff k \lambda^{n-1} [\lambda - \alpha] = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = \alpha \end{cases}$$

Desde que, para  $n = 0$  devemos ter  $y_0 = k \lambda^0$ , então  $k = y_0$ . Portanto,

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } y_0 = 0 \\ y_0 \alpha^n & \text{se } y_0 \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Observamos que quando  $\lambda \neq 0$ , podemos ter:

- Se  $|\lambda| < 1$ , então  $y_n$  é convergente, isto é, dado  $\epsilon > 0$ , existe um número natural  $n_0$  tal que se  $n > n_0$  então  $|y_n - y^*| < \epsilon$ ;
- Se  $|\lambda| = 1$ , então  $y_n$  é constante se  $\lambda = 1$  e é oscilante entre dois valores se  $\lambda = -1$ ;
- Se  $|\lambda| > 1$ , então  $y_n$  é divergente, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \pm\infty$ .

**Exemplo 2.1:**

O modelo malthusiano de crescimento populacional preconiza que “a população cresce numa progressão geométrica enquanto que o alimento cresce segundo uma progressão aritmética”. Considerando uma população inicial com  $P_0$  elementos, a tradução matemática de tal postulado é:

$$\begin{aligned} P_1 &= rP_0 \\ P_2 &= rP_1 = r^2P_0 \\ &\text{---} \\ P_n &= rP_{n-1} = r^n P_0 \end{aligned}$$

onde,  $r$  é a taxa de crescimento da população e 1 significa uma unidade de tempo considerada. Observamos que, em termos de diferenças, temos, neste caso, uma equação linear de primeira ordem pois,

$$P_n - P_{n-1} = rP_{n-1} - P_{n-1} = (r - 1)P_{n-1} = \alpha P_{n-1}$$

ou seja, o modelo malthusiano poderia ser enunciado por: “A variação populacional é proporcional à população, em cada instante” e sua solução é

$$P_n = P_0 r^n$$

Uma equação linear não autônoma da forma

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + b \\ y_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (2.5)$$

pode ser resolvida também por método recursivo:

$$\begin{aligned} y_1 &= ay_0 + b \\ y_2 &= ay_1 + b = a^2y_0 + (a + 1)b \\ y_3 &= ay_2 + b = a^3y_0 + (a^2 + a + 1)b \\ &\text{---} \\ y_n &= ay_{n-1} + b = a^n y_0 + (a^n + \dots + a + 1)b \end{aligned}$$

Logo, a solução pode ser escrita como:

$$\begin{cases} y_n = y_0 + nb & \text{se } a = 1 \\ y_n = a^n y_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} b & \text{se } a \neq 1 \end{cases}$$

Neste caso, se  $a \geq 1$  então  $y_n$  é divergente, ou seja,  $y_n \rightarrow +\infty$  se  $b > 0$  ou  $y_n \rightarrow -\infty$  se  $b < 0$  e  $|b| > y_0$ ; Agora, se  $0 < a < 1$ , então  $y_n \rightarrow \frac{b}{1-a}$ .

## 2.2 Modelos matemáticos com equações de primeira ordem

### Modelo 1 - Orçamento familiar

Consideremos uma família cuja renda mensal  $R_n$  é proveniente de um salário fixo  $R_0$  mais o rendimento da poupança  $P_n$  do mês anterior. Suponhamos também que o consumo mensal  $C_n$  desta família seja proporcional à sua renda mensal. Vamos procurar uma fórmula geral que forneça os valores da renda, poupança e consumo da família em cada mês relativamente a um mês inicial onde se conheça os valores de  $C_0$  e de  $P_0$ .

Neste caso, a variável independente é o tempo, dado em meses. Devemos buscar uma relação entre as variáveis independentes *renda*, *poupança* e *consumo* em função do tempo  $n$ .

Temos que:

o "A poupança do mês  $n$  é dada pela poupança do mês anterior ( $n - 1$ ) mais a sobra do mês  $n$ ", ou seja,

$$P_n = P_{n-1} + (R_n - C_n) \quad (2.6)$$

o "A renda do mês  $n$  é igual ao salário mais o rendimento da poupança do mês anterior", ou seja,

$$R_n = R_0 + rP_{n-1} \quad (2.7)$$

onde,  $r$  é o juro da poupança.

o "O consumo do mês é proporcional à renda", isto é,

$$C_n = \alpha R_n \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.8)$$

Agrupando as três equações, obtemos

$$P_n = (1 - \alpha)R_0 + [(1 - \alpha)r + 1] P_{n-1}$$

Simplificando as constantes, isto é, tomando  $b = (1 - \alpha)R_0$  e  $a = [(1 - \alpha)r + 1]$  na equação 2.6, obtemos uma equação de diferenças linear de ordem 1:

$$P_n = aP_{n-1} + bR_0$$

cuja solução é dada por:

$$P_n = \begin{cases} P_0 & \text{se } \alpha = 1 \\ a^n P_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} b & \text{se } \alpha \neq 1 \\ [(1 - \alpha)r + 1]^n P_0 + (1 - \alpha)R_0 \frac{1 - [(1 - \alpha)r + 1]^n}{1 - [(1 - \alpha)r + 1]} & \end{cases} \quad (2.9)$$

Observamos que  $\alpha = 1$  significa que o consumo mensal é igual à renda e portanto, neste caso, a poupança não varia.

Substituindo (1.9) nas equações (1.7) e (1.8), obtemos

$$R_n = \begin{cases} R_0 + rP_0 & \text{se } \alpha = 1 \\ R_0 + rP_0 a^n + rb \frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$C_n = \begin{cases} \alpha [R_0 + rP_0] & \text{se } \alpha = 1 \\ \alpha [R_0 + rP_0 a^n + rb \frac{a^n - 1}{a - 1}] & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

**Exercício 2.1** - Verifique qual a situação de uma família, depois de um ano, que tem R\$ 1000,00 na poupança, um salário fixo de R\$ 3000,00 e gasta 80% da renda mensal.

### Modelo 2 - Financiamento

Quando queremos comprar algo financiado, raramente nos questionamos a respeito do prejuízo tomado, simplesmente estamos preocupados se podemos ou não dispor daquela parcela fixa que pagamos mensalmente. Neste exemplo vamos analisar o problema de um financiamento.

Na compra de um carro é feito um financiamento do valor  $D_0 = R\$30.000,00$  que deve ser pago em 3 anos, em parcelas mensais fixas de  $P = R\$1200,00$ . Queremos saber:

- Qual o juro mensal pago?
- Se o juro mensal fosse o mesmo da poupança, quanto deveria pagar por mês para quitar a dívida em 3 anos?
- Quanto se deve dar de entrada para se ter uma parcela fixa de  $R\$500,00$ ,

um juro igual ao da poupança e terminar a dívida em 3 anos?

Temos que  $D_0$  é a dívida inicial; Então a dívida  $D_n$ , depois de transcorridos  $n$  meses da compra, é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja,

$$D_n = D_{n-1} + rD_{n-1} - P$$

ou seja,

$$D_n = (1 + r)D_{n-1} - P \quad (2.12)$$

Esta equação linear tem como solução (verifique)

$$D_n = (1+r)^n D_0 - P \frac{1 - (1+r)^n}{-r} \quad (2.13)$$

A dívida será quitada num tempo  $n$  quando  $D_n = 0$ . Assim, para a resposta da primeira questão devemos considerar que para  $n = 36$ ,  $D_{36} = 0$ , ou seja,

$$30(1+r)^{36} = -1,2 \frac{1 - (1+r)^{36}}{r}$$

ou, simplificando a expressão, temos

$$20r = \frac{1 - (1+r)^{36}}{(1+r)^{36}}$$

A resolução desta equação pode ser feita pelo método numérico mais simples, o da *bissecção*.

Sejam  $y = 20r$  e  $z = \frac{1 - (1+r)^{36}}{(1+r)^{36}}$ , devemos encontrar  $r$  de modo que  $y = z$ .

$$r = 0,01 \Rightarrow y = 0,25 < 0,30 = z$$

$$r = 0,02 \Rightarrow y = 0,50 < 0,51 = z$$

$$r = 0,03 \Rightarrow y = 0,75 > 0,65 = z \quad (\text{a solução de } y = z \text{ está no intervalo } r \in (0,02; 0,03))$$

$$r = \frac{0,02 + 0,03}{2} = 0,025 \Rightarrow y = 0,65 > 0,58 = z$$

$$r = \frac{0,02 + 0,025}{2} = 0,0225 \Rightarrow y = 0,56 > 0,55 = z$$

$$r = \frac{0,02 + 0,0225}{2} = 0,0212 \Rightarrow y = 0,53 \simeq 0,5301 = z$$

Portanto, o juro mensal de tal financiamento é, aproximadamente, 2,12% ao mês, o que responde a primeira questão.

Agora, se queremos saber qual a parcela fixa que deveria ser paga com um juro de  $r = 0,7\%$  (juro médio de uma poupança em 2008), basta isolar o valor de  $P$  na expressão 2.13, com este valor de  $r$

$$(1+r)^n D_0 = P \frac{1 - (1+r)^n}{-r} \Rightarrow P = \frac{r(1+r)^n D_0}{(1+r)^n - 1} \quad (2.14)$$

Assim para  $r = 0,007$ ,  $n = 36$  e  $D_0 = 30$ , teremos  $P = 0,94563$ , ou seja, cada parcela mensal deveria ser de R\$ 945,63.

No caso de se dar uma entrada  $E$ , a dívida inicial cai para  $(D_0 - E)$ . Então, para responder a terceira questão devemos usar a expressão

$$(1+r)^n (D_0 - E) = P \frac{1 - (1+r)^n}{-r} \quad (2.15)$$

com os valores  $r = 0,007$ ,  $n = 36$  e  $D_0 = 30$ , e  $P = 0,5$  e, teremos  $E = 14,13767$ , ou seja, a entrada deve ser de R\$14137,67.

## 2.3 Equações Lineares de Diferenças de segunda ordem

Uma equação geral de diferenças de segunda ordem é da forma

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} \quad (2.16)$$

com  $a, b$  constantes, e  $y_0$  e  $y_1$  dados.

A solução é obtida, como no caso de primeira ordem, considerando que  $y_n = k\lambda^n$  seja uma solução de (2.16). Então,

$$k\lambda^n - ak\lambda^{n-1} - bk\lambda^{n-2} = 0 \Rightarrow k\lambda^{n-2} [\lambda^2 - a\lambda - b] = 0$$

Assim, os valores de  $\lambda$  que satisfazem a condição de  $y_n = k\lambda^n$  ser solução de (2.16) são  $\lambda = 0$  e as raízes do *polinômio característico* de (2.16),

$$P(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b.$$

◦ Se  $\lambda = 0$  então  $y_n = 0$  para todo  $n$  (solução trivial) que só tem sentido se as condições iniciais forem nulas, isto é,  $y_0 = y_1 = 0$ .

◦ Se  $\lambda \neq 0$ , as raízes do polinômio característico são denominadas *autovalores* e obtidas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

Para as equações lineares vale o *princípio da superposição*, ou seja, se temos várias soluções então a combinação linear entre elas também é uma solução. No caso da equação (2.16), como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  foram determinados, justamente com a imposição de que  $k\lambda_1^n$  e  $k\lambda_2^n$  fossem soluções, temos que

$$y_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n \quad (2.17)$$

também é uma solução de (2.16) (verifique).

A expressão (2.17) será **a solução geral** de (2.16) se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , o que se dá quando  $a^2 + 4b > 0$ . Neste caso, as constantes  $A_1$  e  $A_2$  são determinadas através das condições iniciais:

$$\begin{aligned} \text{se } n = 0 &\Rightarrow y_0 = A_1 + A_2 \\ \text{se } n = 1 &\Rightarrow y_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{aligned}$$

donde,

$$A_2 = \frac{\lambda_1 y_0 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{e} \quad A_1 = \frac{-\lambda_2 y_0 + y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Quando  $a^2 + 4b = 0$  os autovalores são iguais, isto é,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$  e a solução geral de (1.16) será dada por:

$$y_n = A_1 \lambda_1^n + A_2 n \lambda_2^n = (A_1 + n A_2) \left(\frac{a}{2}\right)^n \quad \text{verifique!} \quad (2.18)$$

e as constantes  $A_1$  e  $A_2$  são dadas por

$$y_0 = A_1 \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{2y_1}{a} - y_0$$

Quando  $a^2 + 4b < 0$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números complexos conjugados:  $\lambda_1 = \alpha + \beta i = r e^{i\theta}$  e  $\lambda_2 = \alpha - \beta i = r e^{-i\theta}$  onde,  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$ . Neste caso, a solução geral de (2.16) será obtida usando a fórmula de Euler:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

pois  $\lambda_1^n = (\alpha + \beta i)^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta]$ .

Logo,

$$\begin{aligned} y_n &= A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n \\ &= A_1 r^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] + A_2 r^n [\cos n\theta - i \sin n\theta] \\ &= B_1 r^n \cos n\theta + i B_2 r^n \sin n\theta \end{aligned}$$

Agora, como a equação é linear, tanto a parte real  $u_n = B_1 r^n \cos n\theta$  como a parte imaginária  $v_n = B_2 r^n \sin n\theta$  também são soluções de 2.16. Logo, pelo princípio de superposição, obtemos a *solução geral real*:

$$y_n = B_1 r^n \cos n\theta + B_2 r^n \sin n\theta \quad (2.19)$$

Neste caso, a sequência  $y_n$  é oscilante com amplitude igual a  $r^n$  e frequência igual a  $\frac{1}{\theta}$ . Ainda,

- Se  $r > 1 \implies y_n$  é divergente;
- Se  $r < 1 \implies y_n$  é convergente;
- Se  $r = 1 \implies y_n$  é periódica;

**Exemplo 2.2.** Resolva a equação de diferenças

$$\begin{cases} y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} \\ y_0 = 1 \quad \text{e} \quad y_1 = 2 \end{cases}$$



Solução: O polinômio característico desta equação é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Então,  $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Logo, a solução geral é

$$y_n = A_1 + nA_2$$

Agora,  $y_0 = 1 \Rightarrow A_1 = 1$   
 $y_1 = 2 \Rightarrow 2 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = 1$

Logo a sequência gerada pela equação de diferenças é

$$y_n = 1 + n; \quad n \geq 0.$$

**Exemplo 2.3** Dada a equação de diferenças

$$\begin{cases} y_n = 2ky_{n-1} - 2k^2y_{n-2} \\ y_0 = 0 \text{ e } y_1 = 1 \end{cases}$$

determine as condições sobre o parâmetro  $k > 0$  para que a solução seja:

- (a) oscilatória crescente;
- (b) oscilatória decrescente;
- (c) periódica;

**Solução:** Os auto valores são números complexos dados pelas raízes da equação  $\lambda^2 - 2k\lambda + 2k^2 = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2k + \sqrt{4k^2 - 8k^2}}{2} = k(1 + i) \\ \lambda_2 &= \frac{2k - \sqrt{4k^2 - 8k^2}}{2} = k(1 - i) \end{aligned}$$

Então, como  $\lambda_1 = \alpha + \beta i = re^{i\theta} \Rightarrow r = k\sqrt{2}$  e  $\theta = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ .

A solução geral real é dada por

$$y_n = \left(k\sqrt{2}\right)^n \left[ B_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \right]$$

Considerando as condições iniciais vem:

$$y_0 = 0 \Rightarrow \left(k\sqrt{2}\right)^0 B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$y_1 = 1 \Rightarrow \left(k\sqrt{2}\right) \left[ B_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + B_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 1 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{k}$ . Logo, a solução que satisfaz as condições iniciais é dada por:

$$y_n = \left(k\sqrt{2}\right)^n \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

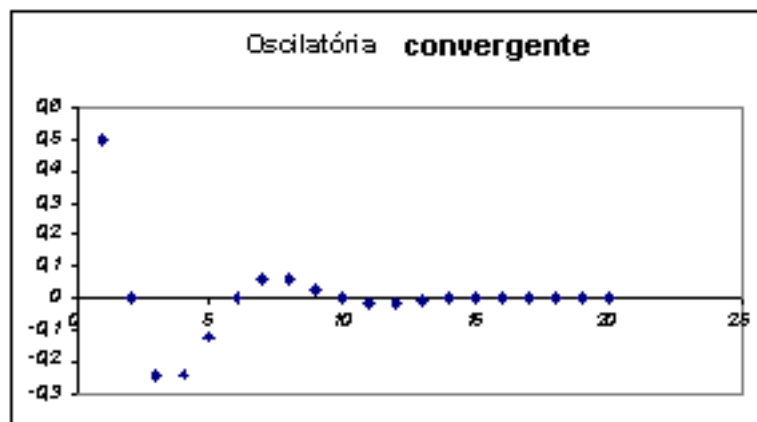


Figura 2.1: Condições para estabilidade da equação do Exemplo 2.3

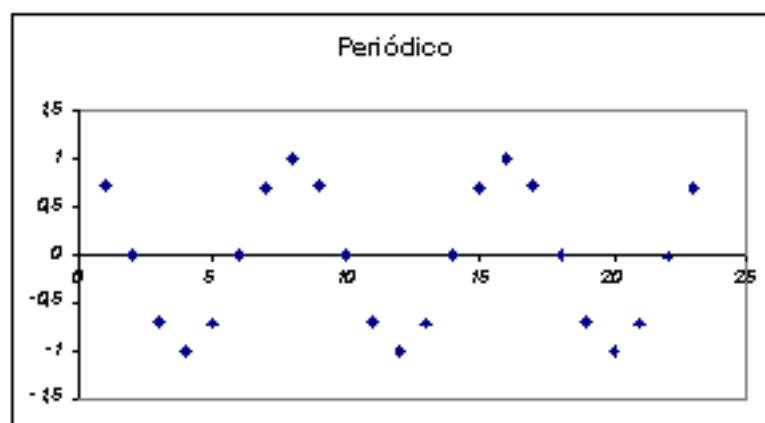


Figura 2.2: Condições para estabilidade da equação do Exemplo 2.3

- Se  $k\sqrt{2} > 1 \Leftrightarrow k > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_n$  é oscilatória crescente (divergente);
- Se  $k\sqrt{2} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_n$  é oscilatória decrescente (convergente);
- Se  $k\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_n$  é periódica;

**Observação:** O estudo de equações lineares de ordem superior a 2 é análogo ao de ordem 2. Assim, a solução geral da equação linear de ordem  $n$

$$y_n = f(y, y_1, \dots, y_{n-1}) = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_{n-1} y$$

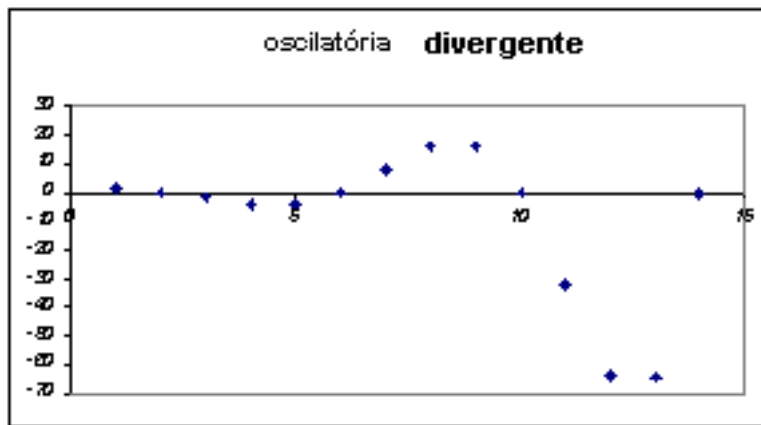


Figura 2.3: Condições para estabilidade da equação do Exemplo 2.3

é dada por:

$$y_n = \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^n$$

onde, os valores  $\lambda_i$  com  $1 \leq i \leq n$ , são as raízes do polinômio característico (autovalores):

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \dots - a_{n-1} \lambda$$

O único ponto de equilíbrio de uma equação linear é a origem  $P_0 = (0, 0, \dots, 0)$ . O ponto  $P_0$  é assintoticamente estável, isto é,  $y_n \rightarrow 0$  se, e somente se,  $|\lambda_i| < 1$  para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$

## Projeto

### Projeto 2.1: Formule e analise um modelo matemático para criação de Escargot

Numa criação de escargot consideramos a população consistindo de **A**dultos, **J**óvens e **O**vos (variáveis).

Hipóteses:

- (a) Cada adulto poem  $\alpha$  ovos viáveis a cada 4 meses;
- (b) Com 4 meses um escargot é considerado jovem;
- (c) Um jovem se torna adulto com 8 meses quando então poem ovos.

A condição inicial é  $P_0 > 0$  (adultos),  $J_0 = 0$  (jóvens) e  $O_0 = 0$  (ovos).

Relacione seu modelo com a clássica sequência de Fibonacci.

**Projeto 2.2:** Considere a equação logística de diferenças

$$y_{n+1} = ky_n(1 - y_n) \quad (2.20)$$

A equação (2.20) é de primeira ordem e não-linear.

Determine os pontos de equilíbrio da equação, isto é, verifique quando  $y_{n+1} = y_n = y^*$  ;

Examine o comportamento da sequência  $y_n$  para os valores do parâmetro  $k$ ;

- (a)  $k = 1$
- (b)  $0 < k < 1$
- (c)  $k = 3$

Faça os gráficos das sequências.

## 2.4 Equações de diferenças não lineares

Uma equação de diferenças não-linear de 1ª ordem é uma fórmula de recorrência do tipo

$$y_{n+1} = f(y_n) \quad (2.21)$$

onde  $f$  é uma combinação não linear de  $y_n$  (quadrática, potências, exponenciais etc).

A solução de (2.21) é uma expressão que relaciona  $y_n$  e  $y_0$  (condição inicial), para cada estágio  $n$ . Geralmente, não é possível obter tal solução diretamente quando se trata de equações não lineares.

### Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

Uma maneira de analisar estas equações é através de seus *pontos de equilíbrio*.

No contexto das equações de diferenças tem-se a estabilidade do processo quando não ocorre variações do estágio  $n$  para o estágio  $n+1$ , isto é, quando

$$y_{n+1} = f(y_n) = y_n = y^* \quad (2.22)$$

Da equação (2.22), tem-se um ponto de equilíbrio  $y^*$  quando

$$y^* = f(y^*) \quad (2.23)$$

isto é,  $y^*$  é um *ponto fixo* da função  $f$ .

Uma maneira simples para determinar os pontos de equilíbrio de uma equação não-linear é através dos *gráficos de Lamerey*:

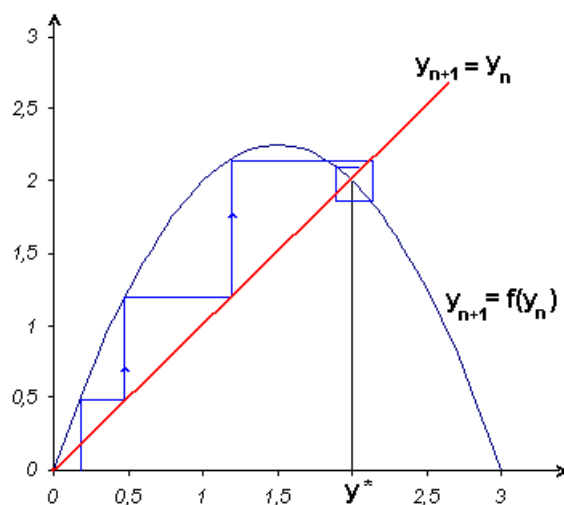


Figura 2.4: Determinação dos pontos estacionários

Consideramos, no sistema cartesiano, os valores de  $y_n$  no eixo das abscissas e  $y_{n+1}$  no eixo das ordenadas e obtemos o gráfico ajustado de  $y_{n+1} = f(y_n)$ . Os pontos de equilíbrio são dados pela interseção do gráfico de  $f$  com a bissetriz  $y_{n+1} = y_n$  (é um processo análogo ao método de Ford-Walford)

Observamos que no gráfico (1.4) temos dois pontos fixos de  $f$ :  $\bar{y} = 0$  e  $y^*$  com características diversas – Dado qualquer valor inicial  $y_0$ , a sequência  $y_n$  obtida por recorrência, se afasta de  $\bar{y} = 0$  e se aproxima do valor  $y^*$ . Neste caso dizemos que  $\bar{y} = 0$  é um ponto de equilíbrio *instável* e  $y^*$  é *assintoticamente estável*.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio  $y^*$  pode ser determinada pelo valor do módulo de

$$\lambda = \left[ \frac{df(y_n)}{dy_n} \right]_{y_n=y^*} \quad (2.24)$$

onde  $\lambda$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva  $f(y_n)$  no ponto  $y^*$ .

O parâmetro  $\lambda$  é o *autovalor* do equilíbrio  $y^*$  da equação (2.21).

Temos:

1. Se  $0 < |\lambda| < 1$ ,  $y^*$  é *localmente assintoticamente estável*, isto é, se  $y_n$  está “próximo” de  $y^*$  então  $y_n \rightarrow y^*$  ( $y_n$  converge para  $y^*$ ).

Ainda, se  $0 < \lambda < 1$  então a convergência é monótona (fig. 2.5); se  $-1 < \lambda < 0$ , a convergência é oscilatória (fig. 2.6),

2. Se  $|\lambda| > 1$ , o ponto de equilíbrio  $y^*$  é *instável* (repulsor)- figura (2.7):

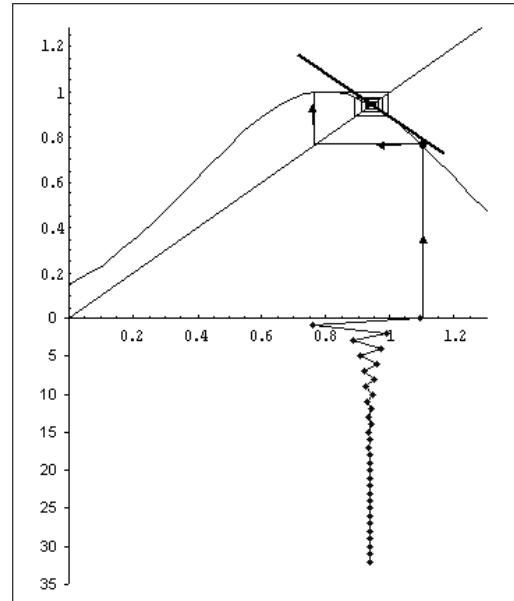
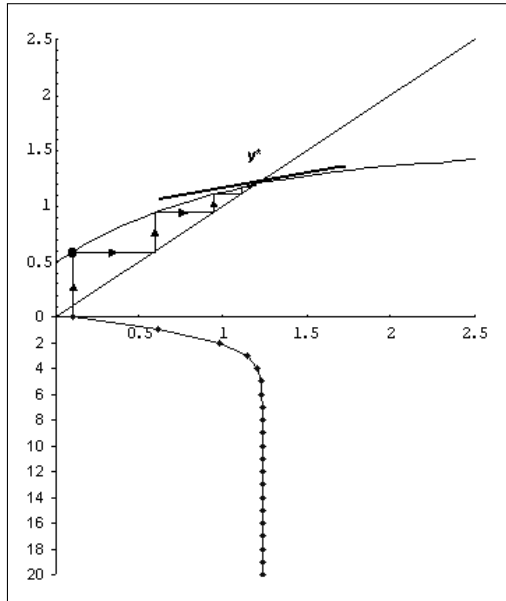


Figura 2.5: Convergência Monótona

Figura 2.6: Convergência oscilatória

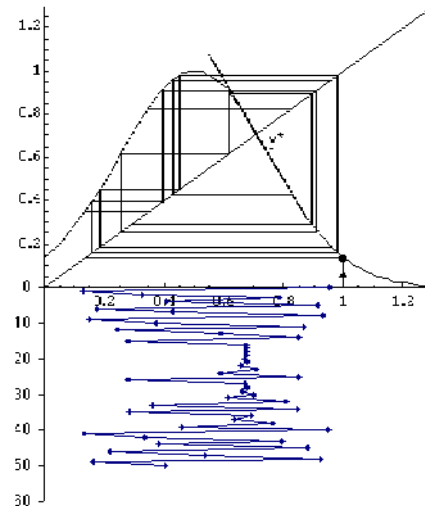
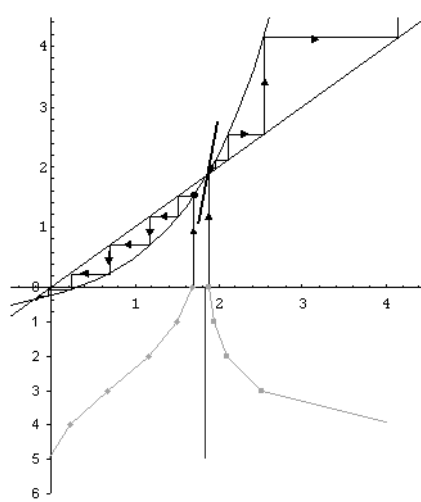


Figura 2.7: Nó instável e equilíbrio instável oscilante

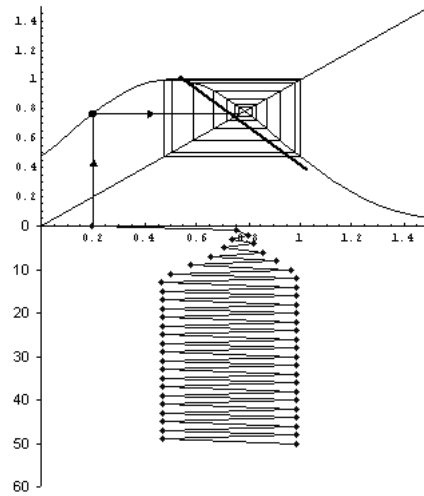


Figura 2.8: Ciclo limite

3. Se  $|\lambda| = 1$ , o ponto de equilíbrio é neutramente estável, ou simplesmente *estável*. Neste caso, a sequência  $y_n$ , a partir de algum  $n$ , oscila em torno do ponto  $y^*$  que é denominado *centro de um ciclo limite* (fig 2.8)

### Equação Logística Discreta

Consideremos a equação de diferenças não linear

$$y_{n+1} = f(y_n) = ry_n(1 - y_n), \quad \text{com } r > 0 \quad (2.25)$$

Os pontos de equilíbrio de (2.25) são dados pelos pontos fixos de  $f$ , ou seja,

$$y^* = f(y^*) = ry^*(1 - y^*)$$

ou

$$ry^{*2} - y^*(r - 1) = 0 \Leftrightarrow y^*[ry^* - (r - 1)] = 0$$

Portanto,

$$y_1^* = 0 \quad (\text{ponto trivial}) \quad \text{e} \quad y_2^* = 1 - \frac{1}{r} \quad (\text{ponto não trivial}) \quad (2.26)$$

Os autovalores associados à equação (2.25) são dados por

$$\lambda = \left. \frac{df(y_n)}{dy_n} \right|_{y_n=y^*} = r - 2ry_n \Big|_{y_n=y^*} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \text{para } y_1^* = 0, \quad \lambda_1 &= r \\ \text{para } y_2^* = 1 - \frac{1}{r}, \quad \lambda_2 &= 2 - r \end{aligned}$$

Então,

a) Se  $0 < r < 1$  o ponto  $y_1^* = 0$  é assintoticamente estável e  $y_2^* < 0$  é instável;

b) Se  $r = 1$ ,  $y_1^* = y_2^* = 0$  é um centro de um ciclo limite;

c) Se  $r > 1$ ,  $y_1^*$  é instável e  $y_2^*$  é assintoticamente estável se  $|\lambda_2| = |2 - r| < 1 \Leftrightarrow 1 < r < 3$

d) Se  $r = 3 \Rightarrow y_2^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  e  $\lambda_2 = -1$ , aparecem oscilações de período 2 (ciclos de 2 pontos), isto é, satisfazem o sistema

$$\begin{cases} y_{n+1} = f(y_n) \\ y_{n+2} = y_n \end{cases} \quad (2.28)$$

ou seja,

$$y_{n+2} = f(y_{n+1}) = f(f(y_n)) = y_n \quad (2.29)$$

e

$$y_2^* = f(f(y_2^*))$$

é um ponto fixo de  $f^2$ .

O modelo logístico discreto, dado pela equação (2.25), é um dos mais simples exemplos de equações de diferenças não-lineares e podemos notar a complexidade de seu desenvolvimento quando variamos o parâmetro  $r$ .

A formulação de modelos matemáticos com equações de diferenças ganhou força a partir dos trabalhos desenvolvidos por R.M. May (1975-1976) sobre a dinâmica populacional de certos insetos que não têm gerações que se sobrepõe e seus elementos são gerados periodicamente. O **modelo geral de May** é formulado considerando que:

“A variação da população entre duas gerações sucessivas depende do crescimento específico da população e da competição entre seus elementos”.

O modelo logístico discreto é um caso particular do modelo geral de May. De fato, a equação:

$$P_{t+1} - P_t = aP_t - bP_t^2, \quad a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0 \quad (2.30)$$

obedece as condições do modelo geral.



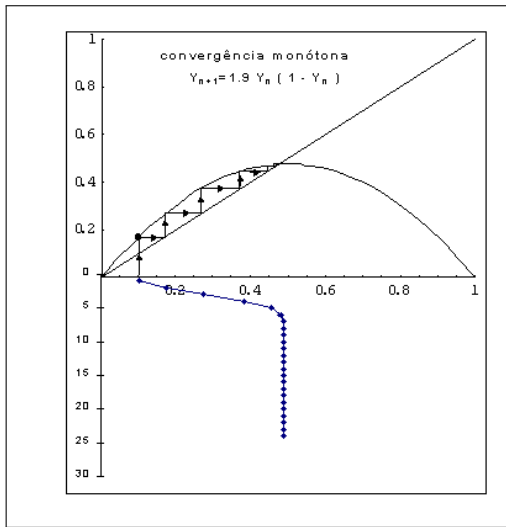


Figura 2.9: Assint. estável

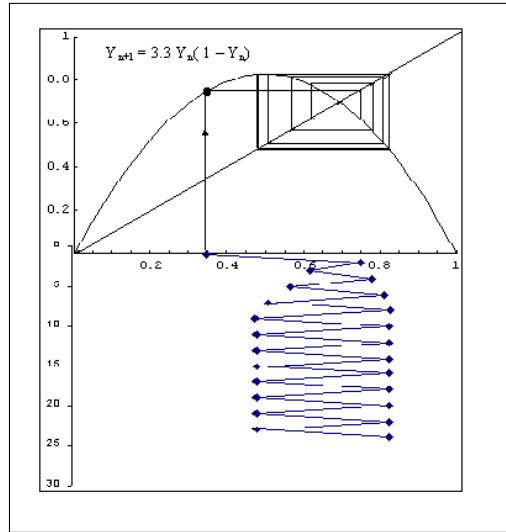


Figura 2.10: Ciclo de 2 pontos

A fórmula de recorrência (2.30) pode ser dada por

$$P_{t+1} = (a + 1)P_t \left( 1 - \frac{b}{a + 1}P_t \right) \quad (2.31)$$

Podemos obter uma *adimensionalização* deste modelo, considerando a seguinte mudança de parâmetro e variáveis:

$$a + 1 = r \text{ (taxa de crescimento intraespecífica) e } \frac{b}{a + 1}P_t = N_t \quad (2.32)$$

$k = \frac{a + 1}{b}$  é denominada *capacidade suporte* da população.

Considerando estas expressões na equação (3.30), obtemos

$$\frac{r}{b}N_{t+1} = r\frac{r}{b}N_t(1 - N_t) \quad (2.33)$$

ou

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) \quad (2.34)$$

A equação (2.34) é o *modelo logístico discreto* analisado anteriormente.

Modelos gerais discretos de dinâmica populacional, onde a população sofre um processo de autoinibição, são formulados com equações de diferenças não lineares da forma:

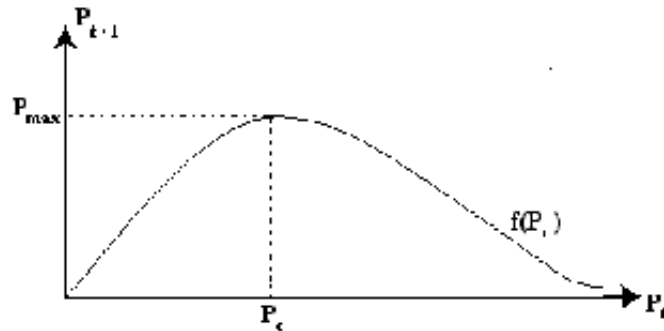


Figura 2.11: Forma típica do campo de variações em modelos discretos inibidos

$$P_{t+1} = f(P_t) = P_t F(P_t) \quad (2.35)$$

Em tais modelos espera-se que  $f(P_t)$  cresça até um valor máximo  $P_{\max}$  e depois decresça (fig. 2.9)

O estudante interessado em se aprofundar no estudo de modelos de dinâmica populacional com equações de diferenças poderá recorrer aos excelentes livros de L. Edelstein-Keshet [3] e J.D. Murray [4].

**Projeto 2:** Considere o modelo discreto de May (1975)

$$P_{t+1} = P_t f(P_t)$$

onde,  $f(P_t) = \exp\left[r\left(1 - \frac{P_t}{k}\right)\right]$  é densidade-dependente.

Faça um estudo deste modelo -

- Desenhe  $f$  como função de  $P_t$ ;
- Mostre que  $P_t$  cresce somente se  $P_t < k$ ;
- Mostre que  $P^* = k$  é um ponto de equilíbrio da equação;
- Determine condições sobre  $r$  e  $k$  para que  $P^* = k$  seja assintoticamente estável;
- Escolha  $r$  e  $k$  e use o programa Excel, ou mesmo uma calculadora para determinar valores sucessivos de  $P_t$ .

Desenhe os gráficos de Lamerey relacionando  $P_{t+1}$  com  $P_t$ .

Mais informações sobre os gráficos de Lamerey e estabilidade das equações de diferenças, veja [3] e [1].

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

”...A matemática não é somente uma linguagem. A Matemática é uma linguagem acrescida de raciocínio ; é como uma linguagem acrescida de lógica. A Matemática é uma ferramenta para o raciocínio.”

R. Feynman

De uma maneira geral, podemos dizer que temos uma equação diferencial (ou um sistema de equações diferenciais) se na equação (ou em cada equação do sistema) estão envolvidas funções incógnitas e suas derivadas.

Uma equação diferencial é dita *ordinária* (EDO) se a função incógnita depender apenas de uma variável. Se depender de mais de uma variável será denominada *equação diferencial parcial*.

A *ordem* de uma equação diferencial é indicada pela maior ordem de derivação que aparece na equação. Uma EDO de ordem  $n$  tem como expressão geral

$$F \left[ x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} \right] = 0 \quad (3.1)$$

onde,  $F$  é uma função de  $n + 1$  variáveis.

A equação 3.1 representa a relação entre a variável independente  $x$  e os valores da função incógnita  $y$  e suas  $n$  primeiras derivadas. Quando pudermos explicitar  $\frac{d^ny}{dx^n}$  na equação 3.1 teremos uma *forma normal da*

EDO de ordem  $n$ , isto é,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \quad (3.2)$$

As equações na forma normal podem sempre ser escritas na forma da equação 3.1, basta considerar

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right] = \frac{d^n y}{dx^n} - f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

Entretanto, uma equação na forma normal 3.2 pode acarretar mais de uma equação na forma 3.1. Por exemplo,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0$$

leva às duas equações na forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}$$

A *solução* de uma EDO, no intervalo  $I = (a, b)$ , é uma função  $y = \varphi(x)$  que, juntamente com suas derivadas, satisfaz a equação 3.2. Assim, resolver uma EDO 3.2, é encontrar uma função  $y = \varphi(x)$ , definida e derivável até a ordem  $n$  no intervalo  $I$ , que satisfaz a equação 3.2.

*Solução geral* de uma EDO é o conjunto de todas as suas soluções. Nas aplicações, geralmente estamos interessados em soluções particulares que satisfaçam uma dada *condição inicial*, ou condições complementares.

**Modelo 3 - Corpos em queda livre e balística** Queda livre é o movimento resultante unicamente da aceleração provocada pela gravidade.

Todos os corpos caem para o centro da terra com a mesma aceleração  $g$ .

A aceleração da gravidade  $g$  vale  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

A equação que descreve um corpo em queda livre é dada por:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \quad (3.3)$$

onde,  $m$  é a massa do corpo;  $g$  a aceleração da gravidade e  $\frac{dv}{dt}$  é a aceleração do corpo.

Uma *solução geral* desta equação é dada por:

$$v = \varphi(t) = -gt + c \quad (3.4)$$



Figura 3.1: Queda livre

onde  $c$  é uma constante qualquer. De fato, substituindo  $\varphi(t)$  na EDO 3.3, teremos uma identidade:

$$m \frac{d\varphi(t)}{dt} = m \frac{d(-gt + c)}{dt} = m(-g) = -mg$$

Se considerarmos agora  $\varphi(t)$  no instante inicial  $t = 0$ , teremos  $v_0 = \varphi(0) = c$ , ou seja,  $c$  é a velocidade inicial do corpo. Assim,

$$v(t) = -gt + v_0$$

é a *solução particular* de 3.3. Esta solução nos garante que dois corpos abandonados da mesma altura demoram o mesmo tempo para chegarem ao solo e chegam com a mesma velocidade. A queda de uma pena e uma pedra pode não surtir tal efeito porque o atrito com o ar retarda a queda da pena.<sup>1</sup>

### • Movimento balístico

O lançamento oblíquo é um exemplo típico de composição de dois movimentos. Galileu notou esta particularidade do movimento balístico no início do século XVII. Isso se traduz no princípio da simultaneidade: "Se um corpo apresenta um movimento composto, cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem e no mesmo intervalo de tempo."

O lançamento oblíquo ou movimento balístico estuda o movimento de corpos, lançados com velocidade inicial  $v_0$  da superfície da Terra.

<sup>1</sup>O físico italiano Galileu Galilei (1564-1642) realizou uma célebre experiência no início do século XVII, que desmentiu a crença dos gregos. Conta-se que pediu a dois assistentes que subissem no topo da torre de Pisa e de lá deixassem cair, cada um, um corpo de massas diferentes. Para surpresa geral dos presentes, os dois corpos chegaram ao solo no mesmo instante.



Figura 3.2: Torre de Pisa, onde Galileu realizou suas experiências

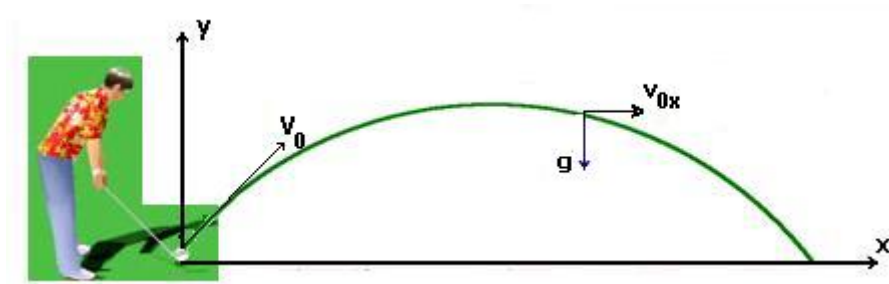


Figura 3.3: Lançamento oblíquo (balística)

O modelo de Galileu foi formulado supondo que um corpo pontual move-se num plano vertical com coordenadas retangulares:  $x$  (abscissa) e  $y$  (ordenada). Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  as coordenadas do corpo no instante  $t$ , então o movimento é regido pela lei de Newton: "massa  $\times$  aceleração = força" e pela lei da gravitação: "A Terra atrai os corpos que estão sobre a sua superfície com uma força vertical de intensidade  $mg$  onde  $m$  é a sua massa". Desta forma, obtemos o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

onde,  $g > 0$  é a aceleração da gravidade. Seja  $(x_0, y_0)$  a posição inicial do corpo e  $(v_{0x}, v_{0y})$  a velocidade do corpo quando  $t = 0$ . Integrando isoladamente cada equação do sistema, obtemos um novo sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_{0x} \\ \frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y} \end{cases}$$

cuja solução é uma parábola de eixo vertical dada pela curva paramétrica:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t + x_0 \\ y(t) = -gt^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases}$$

**Exemplo 3.1** A equação

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (3.5)$$

tem como solução

$$y(x) = Ce^{-x} \quad (3.6)$$

para qualquer constante  $C$  (verifique diretamente). Inversamente, pode-se mostrar que toda solução da EDO 3.5 tem a forma 3.6 portanto, 3.6 é a solução geral de 3.5.

**Exemplo 3.2** A equação diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1 \quad (3.7)$$

é satisfeita pelas funções  $y_1(x) = \sin x$  e  $y_2(x) = 1$  (verifique). Neste caso,  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções particulares de 3.7.

### 3.1 Equação geral de primeira ordem

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem na forma normal é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.8)$$

onde,  $f$  é uma função definida num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  com valores em  $\mathbb{R}$ . A solução de 3.8 é uma função  $y = \varphi(x)$  com  $x \in (a, b)$ , derivável e satisfazendo:

- (1)  $(x, \varphi(x)) \in A$
- (2)  $\frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x))$

A equação 3.8 estabelece uma relação entre as coordenadas de um ponto e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da solução, em cada ponto. Portanto, uma equação deste tipo define um *campo de direções*, ou de inclinações. As soluções de 3.8 são chamadas *curvas integrais* e têm a propriedade que a direção das retas tangentes, em cada ponto, coincide com a direção pré-estabelecida do campo naquele ponto. o lugar geométrico dos

pontos onde cada tangente à curva integral preserva uma direção constante são linhas chamadas *isóclinas*.

Obtemos a equação de uma isóclina considerando

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = k$$

onde,  $k$  é uma constante (inclinação da tangente).

**Exemplo 3.3** Dada a equação

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2$$

o campo de direções é obtido, considerando-se as isóclinas

$$y - x^2 = k$$

que, neste caso, são parábolas. Agora, para cada valor de  $k$  temos  $\frac{dy}{dx} = k$  em cada ponto da isóclina, e desta forma, obtemos o campo de direções (fig.3.4)

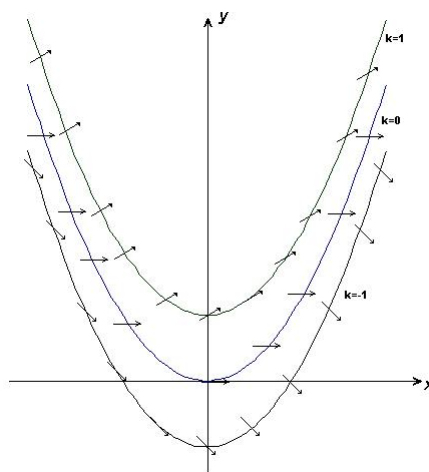


Figura 3.4: Campo de direções da equação

**Exemplo 3.4** O campo de direções da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

pode ser observado na fig. (3.5)



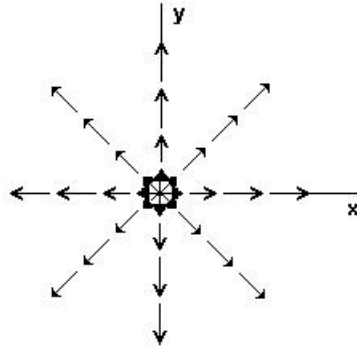


Figura 3.5: Campo de direções

Observe que as isóclinas são as retas  $y = kx$ , ( $k \neq 0$  constante).

Em cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  com  $x \neq 0$ , o coeficiente angular da reta tangente à curva integral é igual a  $\frac{y}{x}$ , coincidindo com o mesmo valor do coeficiente angular da reta isóclina que sai da origem e passa pelo ponto  $(x, y)$ . neste caso, as curvas integrais são da forma  $Y(x) = Cx$ ,  $C \neq 0$ , uma vez que estas retas coincidem em toda parte com a direção do campo.

**Exercício 3.1** Determine o campo de direções e isóclinas da equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

## 3.2 Problema de valor inicial

Os campos de direções, além de contribuírem para um melhor entendimento das equações diferenciais, também constituem um método gráfico para conhecer suas soluções aproximadas. Além deste método gráfico-geométrico, dispomos dos Teoremas de Existência e Unicidade de soluções para problemas de valor inicial (T.E.U.), também conhecidos por problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Em geral, estes teoremas se referem à existência e unicidade de soluções locais para o problema de Cauchy, isto é, soluções definidas em alguma vizinhança do ponto  $x_0$ , isto é, num intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.** *Teorema de Existência e Unicidade de Solução para o Problema de Cauchy .*

Suponha que em 3.9:

1)  $f(x, y)$  seja uma função contínua em um disco aberto  $D$ , de raio  $r$ , centrado no ponto  $(x_0, y_0)$ ,

$$D = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r\}$$

2)  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = g(x, y)$  exista e seja contínua em  $D$ .

Então, **existe** uma função  $y = \varphi(x)$  definida num intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  que satisfaz o problema de Cauchy 3.9. Ainda mais, se  $y = \psi(x)$  é outra solução de 3.9 no intervalo  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  então,  $\varphi(x) = \psi(x)$  no intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . Portanto, só existe uma **única** solução local para o problema de Cauchy.

**Observação:** Para a existência de solução basta a primeira hipótese.

Lembramos que o ponto  $(x_0, y_0)$  é denominado *valor inicial da solução* e  $\varphi(x_0) = y_0$  é a *condição inicial da solução*.

### 3.3 Equação diferencial fundamental

Dada uma função  $y = f(x)$ , podemos definir uma nova função  $z = A(x)$ , que representa a área sob o gráfico de  $f(x)$  num intervalo  $[x_0, x]$ , onde o extremo inferior  $x_0$  é fixo (fig. 3.6) O que Newton (1642-1727) percebeu resume-se em : *A taxa de mudança da função área  $A(x)$  com relação ao ponto  $x$  é igual, em cada ponto  $x = x^*$ , ao valor da função original neste ponto. Mas isto significa que  $A(x)$  é a antiderivada de  $f(x)$ .* Isto constitui o que se convencionou chamar de Teorema Fundamental do Cálculo.

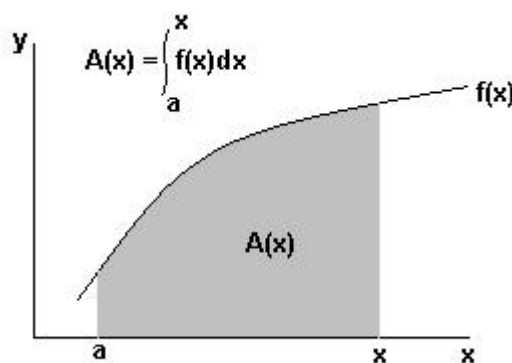


Figura 3.6: Esboço do Teorema Fundamental do Cálculo

A equação diferencial mais simples é exatamente o problema fundamental do Cálculo Diferencial e Integral e consiste no seguinte: dada uma função contínua  $f(x)$  definida no intervalo  $(a, b)$ , determinar todas as funções deriváveis  $y(x)$ , definidas em  $(a, b)$ , tais que

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (3.10)$$

Este problema pode ser facilmente resolvido considerando que

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \iff y(x) = d \int_{x_0}^x f(x) dx + C$$

Assim, a solução geral consiste de infinitas soluções "paralelas". Observe, entretanto, que se queremos uma solução  $y = \varphi(x)$  que satisfaça a condição inicial  $\varphi(x_0) = y_0$ , basta considerar  $C = \varphi(x_0)$ .

Observamos que se a função  $f(x)$  é definida e contínua no intervalo  $(a, b)$  então satisfaz às condições do T.E.U pois, neste caso,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

**Exemplo 3.6** Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad (3.11)$$

Temos que a solução geral é determinada por uma simples integração:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \iff dy = \cos x dx \iff y(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$$

Agora, usando a condição inicial, vem:

$$y(0) = 2 \iff 2 = \cos(0) + C \implies C = 1$$

Assim, a solução particular, que passa pelo ponto  $(0, 2)$  é  $y = \varphi(x) = \sin(x + 1)$ (fig. 3.11).

## 3.4 Equações diferenciais autônomas

Uma equação diferencial do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad (3.12)$$

onde a variável independente não comparece na definição do campo de direções, é dita *autônoma*.

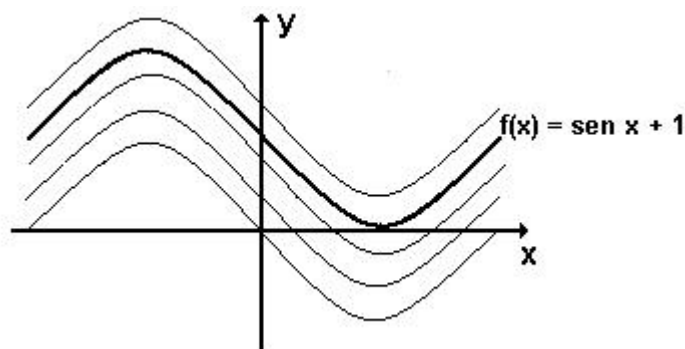


Figura 3.7: Soluções da equação diferencial (3.11)

Utilizando a manipulação formal introduzida por Liebnitz (1646-1716), podemos escrever a equação (3.12) na forma

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad (3.13)$$

cuja resolução é obtida, como na secção anterior, isto é,

$$x(y) = x(y_0) + \int_{y_0}^y \frac{1}{f(y)} dy \quad (3.14)$$

Para justificar a equação 3.14 necessitamos que  $\frac{1}{f(y)}$  seja bem definida no intervalo de interesse  $A$  ( $f(y) \neq 0$ ) e que seja contínua neste intervalo  $A$ . Pois, como  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \neq 0$  em  $A$ , o *Teorema da Função Inversa* garante que existe uma função inversa da função  $x(y)$ , isto é,  $y = F(x)$  tal que  $\frac{dF}{dx} = f(y)$  em  $A$ , o que justifica o procedimento formal.

Portanto, a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

é obtida pela solução do problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \\ x(y_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

e com a inversão da função  $x(y)$ .

Com as hipóteses de que  $f(y)$  é contínua e não se anula em  $A$  e que  $y_0 \in A$ , concluímos que o problema 3.15 tem solução, e é única em  $A$  (T.E.U.).

Observamos que o intervalo  $A$  não pode incluir pontos onde  $f(y)$  se anula. Os pontos  $y^*$  onde  $f(y^*) = 0$  são denominados *pontos estacionários*. O problema 3.15 com condição inicial  $y(x_0) = y^*$ , tem como solução  $y = \varphi(x) = y^*$  (constante), denominada *solução de equilíbrio*.

As equações autônomas aparecem na formulação de uma grande quantidade de modelos. Sempre que uma lei de formação afirma que: "*a taxa de variação de uma quantidade  $y(t)$  é proporcional a esta mesma quantidade*", temos uma equação autônoma da forma

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (3.17)$$

Como,  $f(y) = ky$ , então  $f(y^*) = 0$  se  $y^* = 0$ . Assim,  $y = y^*$  é a solução de equilíbrio de 3.17. Agora, de acordo com os argumentos anteriores, devemos procurar soluções separadamente nos dois intervalos  $-\infty < y < 0$  e  $0 < y < +\infty$ .

Consideramos inicialmente o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ky \\ y(x_0) = y_0 \neq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

e seu problema inverso  $\implies$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{ky} \\ x(y_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.19)$$

cuja solução é dada por

$$x(y) = \left| \int \frac{1}{ky} dy + C \right|_{x(y_0)=x_0} = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{ky} dy = x_0 + \frac{1}{k} [|\ln y| - |\ln y_0|] = x_0 + \frac{1}{k} \ln \left| \frac{y}{y_0} \right|$$

ou seja,

$$\ln \left| \frac{y}{y_0} \right| = k(x - x_0) \iff y = |y_0| e^{k(x-x_0)} \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 3.2** Considere a equação autônoma

$$\frac{dy}{dx} = ky + a$$

sua solução geral, para  $y \neq -\frac{a}{k}$ , é obtida considerando-se sua forma diferencial

$$\frac{1}{ky + a} dy = dx \iff \int \frac{1}{ky + a} dy = \int dx \implies x = \frac{1}{k} \ln |ky + a| + C$$

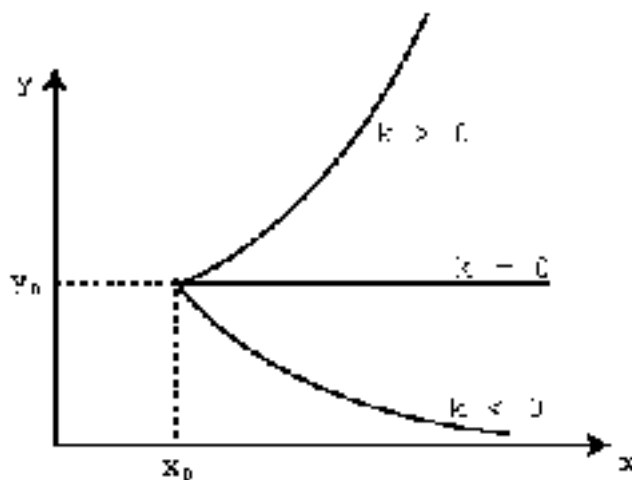


Figura 3.8: Soluções de 3.18

Portanto,

$$ky + a = e^{k(x-C)} \implies y = \frac{1}{k} [-a + e^{k(x-C)}], \quad y \neq -\frac{a}{k}$$

Neste caso,  $y \neq -\frac{a}{k}$  é a solução de equilíbrio.

**Exemplo 3.7** Encontre todas as soluções da EDO autônoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y) = \frac{y^2 - 1}{2} \quad (3.20)$$

A função  $f(y) = \frac{y^2-1}{2}$  é contínua em todo  $\mathbb{R}$  assim como  $\frac{df}{dy} = y$ . Logo pelo T.E.U. sabemos que, dado um ponto qualquer  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , existirá sempre uma solução única  $y = \varphi(x)$  de 3.20, satisfazendo  $y_0 = \varphi(x_0)$ .

Como  $f(y) = \frac{y^2-1}{2} = 0 \iff y = 1$  ou  $y = -1$ , então as funções constantes  $\varphi(x) = 1$  e  $\varphi(x) = -1$  são soluções de equilíbrio de 3.20.

Agora, para  $y \neq \pm 1$ , podemos escrever 3.20 na forma diferencial

$$\frac{dy}{y^2 - 1} = \frac{dx}{2} \quad (3.21)$$

Integrando membro-a-membro a equação 3.21, obtemos as soluções de 3.20 na forma implícita

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x + C \quad (C \text{ é uma constante arbitrária})$$

ou seja,

$$\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = Ke^x \quad \text{onde, } K = e^C \quad (3.22)$$

Para explicitar as soluções, devemos considerar as três regiões do plano separadas pelas soluções de equilíbrio:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \\ R_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 1\} \\ R_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -1\} \end{aligned}$$

a) Em  $R_1$ , temos que  $\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{y-1}{y+1}$ . Logo,

$$\frac{y-1}{y+1} = Ke^x$$

Resolvendo para  $y$  temos:

$$y = \varphi(x) = \frac{Ke^x + 1}{1 - Ke^x} \quad (3.23)$$

Observamos que  $\varphi(x)$  converge para 1 quando  $x \rightarrow -\infty$ , isto é,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{Ke^x + 1}{1 - Ke^x} = 1$$

Ainda,

$$\lim_{x \rightarrow \ln \frac{1}{K}^-} \frac{Ke^x + 1}{1 - Ke^x} = +\infty$$

b) Em  $R_2$ , temos  $\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = -\frac{y-1}{y+1} \implies Ke^x = \frac{1-y}{y+1}$ . Logo,

$$y = \varphi(x) = \frac{1 - Ke^x}{Ke^x + 1}$$

Neste caso, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - Ke^x}{Ke^x + 1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - Ke^x}{Ke^x + 1} = -1$$

c) Em  $R_3$ , é como no caso a) :

$$y = \varphi(x) = \frac{Ke^x + 1}{1 - Ke^x}$$

e os limites são dados por:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Ke^x + 1}{1 - Ke^x} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \ln \frac{1}{K}^+} \frac{Ke^x + 1}{1 - Ke^x} = -\infty$$

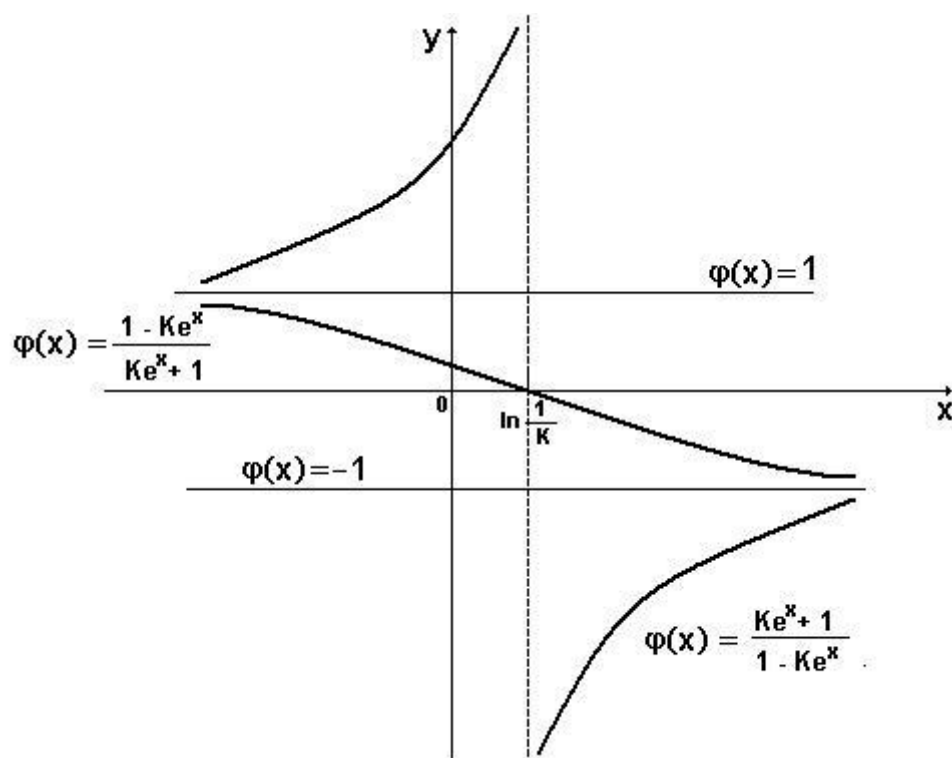


Figura 3.9: Soluções da equação autônoma 3.21

**Exercícios 3.2:** 1. Estude a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2 - 4}$$

2. (Desintegração radioativa): Seja  $m = m(t)$  a massa do material radioativo, no instante  $t$ . Este material se desintegra proporcionalmente a sua massa em cada instante.

a) Sabendo-se que a vida média de um determinado material radioativo é de 6000 anos, determine depois de quanto tempo sua massa será  $\frac{1}{5}$  da massa inicial.

b) Se 100 miligramas de tório<sup>234</sup> são reduzidos a 97,21 miligramas em cada dia, calcule a taxa de desintegração deste material e sua vida média.

3. Estude a equação autônoma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2}{y^2}$$

4. Resolva os problemas de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y(1 - y) \end{array} \right.$$



para

- a)  $y(0) = 0, 2;$
- b)  $y(0) = 1, 2.$

### 3.5 Modelos Matemáticos com equações diferenciais de primeira ordem

Antes de prosseguirmos com novos tipos de equações diferenciais e seus métodos de resolução vamos apresentar algumas aplicações relevantes do que já vimos.

#### Modelo 4- Absorção de drogas

Um problema fundamental em Farmacologia é saber como cai a concentração de uma droga no sangue de um paciente. O conhecimento deste fato permite estabelecer a dosagem a ser ministrada e o intervalo de tempo de cada aplicação. O modelo mais simples é obtido quando supomos que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração existente na corrente sanguínea em cada instante. Em termos matemáticos, se  $C = C(t)$  é a concentração de droga no sangue, então seu decaimento é dado por:

$$\frac{dC}{dt} = -kC \tag{3.24}$$

onde  $k > 0$  é uma constante determinada experimentalmente e depende do medicamento utilizado.

Suponhamos que seja ministrada uma dose inicial igual a  $C_0$ , absorvida pelo sangue instantaneamente. Salientamos que o tempo de absorção da droga é geralmente muito pequeno se comparado com o tempo entre as aplicações das doses.

A solução de 3.24 é dada por:

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

Suponhamos que depois de um tempo  $T$  uma segunda dose, de mesma quantidade  $C_0$ , seja administrada. Teremos então,

$$\begin{aligned} C(t) &= C_0 e^{-kt} \quad \text{se } 0 \leq t < T \\ C(T_-) &= C_0 e^{-kT} \quad \text{:quantidade de droga no sangue imediatamente antes da 2ª dose} \\ C(T_+) &= C_0 e^{-kT} + C_0 \quad \text{:quantidade de droga no sangue imediatamente depois da 2ª dose} \end{aligned}$$

Assim,  $C(T_+)$  passa a ser a concentração (inicial) de droga que começa a decair após o tempo  $T$ . Portanto, para  $T \leq t$ , teremos:

$$C(t) = [C_0 e^{-kT} + C_0] e^{-k(t-T)} = C_0(1 + e^{-kT})e^{-k(t-T)} \quad \text{para } T \leq t < 2T$$

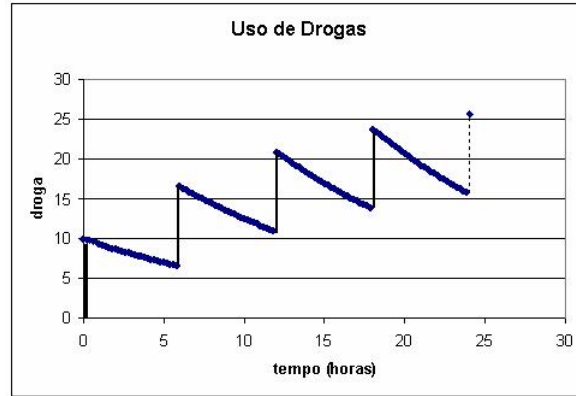


Figura 3.10: A droga decai exponencialmente em cada intervalo entre as aplicações

Continuando o tratamento, administrando outra dose de concentração  $C_0$  no instante  $2T$ , teremos:

$$\begin{aligned} C(2T_-) &= C_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} \\ C(2T_+) &= C_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} + C_0 = C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT}) \\ C(t) &= C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})e^{-k(t-2T)} \quad \text{se } 2T \leq t \end{aligned}$$

Depois da  $n$ -ésima aplicação, a quantidade de droga no sangue será

$$\begin{aligned} C(nT_+) &= C_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} + C_0 = C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT}) \\ C(t) &= C_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT})e^{-k(t-nT)} \quad \text{se } nT \leq t \end{aligned}$$

As expressões acima estabelecem as concentrações de droga administrada periodicamente. Observamos que a expressão

$$(1 + e^{-kT} + e^{-2kT} + \dots + e^{-nkT})$$

é a soma de uma progressão geométrica de  $(n + 1)$  termos, com o primeiro termo igual a 1 e a razão igual a  $e^{-kT}$ . Logo, podemos escrever

$$C(nT_+) = C_0 \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}$$

Desta forma, se o tratamento for por tempo ilimitado, ou seja, com  $n$  muito grande, podemos estabelecer o *nível de saturação* da droga

$$C_s = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}} = \frac{C_0}{1 - e^{-kT}} \quad (3.25)$$

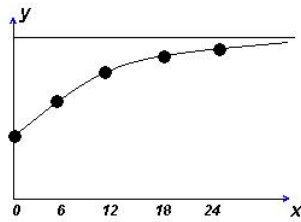


Figura 3.11: Saturação no organismo de uma droga

**Exercícios 3.3** (a) Conhecidos os valores de  $C_0$  e de  $C_s$ , determine o intervalo de aplicação  $T$ ;

(b) Calcule a dosagem  $C_0$  quando são conhecidos  $C_s$  e  $T$ ;

(c) Se a um paciente é dada uma dose inicial igual a  $C_s$  e, depois de um tempo  $T$  é administrada uma dose de concentração  $C^*$ , de modo que a concentração retorna ao nível inicial, mostre que para este tratamento periódico é necessário que

$$C^* = C_s(1 - e^{-kT}) = C_0$$

(d) Se a primeira dose é  $C_0$ , a segunda é  $\frac{C_0}{2}$ , a  $n$ ésima é  $\frac{C_0}{n}$ , então como devem ser os intervalos de tempo de administração da droga para que se atinja o mesmo nível de saturação com dosagens iguais?

**Modelo 4 - Dinâmica populacional**



**Modelo Malthusiano**

Seja  $P$  o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Este número é dependente do tempo e assim podemos escrever

$$\frac{dP}{dt} = P(t) \tag{3.26}$$

Na realidade,  $P(t)$  assume somente valores inteiros sendo pois uma função discreta de  $t$ . Entretanto, quando o número de indivíduos é suficientemente grande,  $P(t)$  pode ser aproximado por uma função contínua, variando continuamente no tempo.

Admitimos que a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população. Admitimos também que as taxas de fertilidade  $n$  e de mortalidade  $m$  sejam constantes. Estas hipóteses são realísticas em uma população grande que varia em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores do crescimento estão ausentes (a espécie tem recursos ilimitados e não interage com competidores ou predadores).

Temos que  $\alpha = n - m$  (coeficiente de natalidade menos o de mortalidade) é a *taxa de crescimento específico* da população  $P(t)$ , aqui considerada constante. Assim,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha. \quad (3.27)$$

Esta formulação matemática indica que a *variação relativa* da população é constante ou, em outras palavras, que a *variação da população é proporcional à própria população em cada período de tempo*.

**O modelo discreto (tempo discreto) de Malthus** é dado por

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t). \quad (3.28)$$

Considerando dada a população inicial  $P(0) = P_0$ , a solução de (3.28) é obtida por recorrência da expressão:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1 + \alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

ou seja,

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0 \quad (\text{cf. equação 1.4}) \quad (3.30)$$

Assim, dados dois censos  $P_0$  e  $P_t$ , a taxa de crescimento demográfico em  $t$  anos é obtida de (3.30), fazendo

$$(\alpha + 1)^t = P_t/P_0 \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \quad (3.31)$$

Por exemplo, se a população do Brasil de 1940 era  $P_0 = 41.236.351$  e, dez anos depois,  $P_{10} = 51.944.397$ , então a taxa de crescimento populacional média (relativa), entre 1940 e 1950 foi de:

$$\alpha = \sqrt[10]{\frac{51944397}{41236351}} - 1 = 1,0233539 - 1 = 0,0233539$$

ou, aproximadamente, 2,3% ao ano.

Se consideramos as populações entre os censos de 1940 e 1991 quando a população era de 146.825.475 habitantes,  $\alpha$  é dada por

$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146825475}{41236351}} - 1 = 0,0252131$ , o que nos permite afirmar que a população brasileira cresceu a uma taxa média de, aproximadamente, 2,5% ao ano nestes 51 anos.

Lembrando que  $P_t = (1 + \alpha)^t P_0$  pode ser escrito na forma exponencial

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+\alpha)t} \quad (3.32)$$

Podemos comparar a solução do Modelo de Malthus discreto (2.29) com a solução do o modelo contínuo correspondente, considerando que

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

e que  $P(t + \Delta t) - P(t) = \beta P(t) \Delta t$  (modelo discreto).

Assim, podemos escrever o modelo contínuo por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

cuja solução é dada por

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}$$

Portanto, os modelos discreto (com taxa  $\alpha$ ) e contínuo (com taxa  $\beta$ ) fornecem a *mesma solução* quando  $\beta = \ln(1 + \alpha)$ .

Se considerarmos o modelo Malthusiano para projetar a população brasileira, teremos  $\alpha = 0,0252131$  para o modelo discreto e  $\beta = 0,0249$  para o contínuo.

A equação

$$P(t) = 41,236 e^{0,0249t} \quad (3.34)$$

fornece a população (em milhões de habitantes) em cada ano  $t$  (veja Tabela 3.1)

Período	Censo demog.	mod. discreto	mod. contínuo
1940	41,236	41,236	41,570
1950	51,944	52,896	53,698
1960	70,992	67,851	69,365
1970	93,139	87,036	89,602
1980	119,003	111,645	115,744
1991	146,825	146,822	153,389
1996	156,804	166,288*	174,335

Tabela 3.1: Projeção de crescimento exponencial da população brasileira(em milhões de habitantes)

**Observação:**

Se ajustarmos o valor de  $\beta$ , usando os dados dos censos de 1940 a 1991, obtemos

$$\beta = 0,0256$$

e a curva ajustada é

$$P(t) = 41,57e^{0,0256t} \quad (3.35)$$

Tanto a expressão (3.34) como a (3.35) dão uma projeção para 1996 supervalorizada (veja Tabela 3.1) o que demonstra que considerar a taxa de crescimento média constante não é uma boa estratégia neste caso, pois a população irá aumentar indefinidamente, o que é irreal.

**Modelo Logístico contínuo (Verhurst)**

Se observamos a Tabela (3.1) vemos claramente que entre censos consecutivos, a partir de 1950 as taxas de crescimento relativo tendem a diminuir com o tempo. O primeiro modelo que atende à variação da taxa de crescimento (ou razão intrínseca do crescimento populacional) foi formulado pelo matemático belga Pierre F. Verhurst em 1837. O Modelo de Verhurst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um *limite máximo sustentável*, isto é, ela tende a se estabilizar. A equação incorpora a queda de crescimento da população que deve estar sujeita a um fator inibidor de proporcionalidade. Este modelo teve um impacto maior quando, no início do século XX, os pesquisadores americanos R. Pearl e L. Reed utilizaram-no para projetar a demografia americana ([1], pp.86-87).

O modelo de Verhurst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante. Assim

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \quad (3.36)$$

com  $\beta(P) = r \left( \frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right)$ ,  $r > 0$  e  $P_\infty$  sendo o valor limite da população. Desta forma  $f(P)$  tende a zero quando  $P \rightarrow P_\infty$ .

Explicitando  $\beta(P)$  na equação (3.36), e supondo que  $P(0) = P_0$  seja dado, temos o modelo clássico de Verhurst ou modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right) \\ P(0) = P_0, \quad r > 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Observamos que  $P(t) \equiv 0$  e  $P(t) \equiv P_\infty$  são soluções da equação diferencial dada em (3.37). A solução analítica de (3.37) é obtida por integração após a separação das variáveis, isto é,

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \int r dt;$$

Usando a técnica das frações parciais para resolver a integral do 1º membro, obtemos

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \int \left( \frac{1}{P} + \frac{1/P_\infty}{1 - P/P_\infty} \right) dp = \ln |P| - \ln \left| 1 - \frac{P}{P_\infty} \right|$$

Logo,

$$\ln \left| \frac{P(t)}{1 - P(t)/P_\infty} \right| = rt + c$$

Usando a condição inicial  $P(0) = P_0$ , podemos determinar o valor da constante de integração  $c$ :

$$c = \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P_\infty}} \right| = \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right|$$

Portanto

$$\ln \left| \left( \frac{P(t) P_\infty}{P_\infty - P(t)} \right) \right| = rt + \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right|$$

ou seja,

$$\ln \left| \frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)} \right| = rt \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{P_\infty - P} = \frac{P_0}{P_\infty - P_0} e^{rt}$$

Explicitando  $P(t)$ , temos

$$P(t) = \frac{P_\infty}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right)e^{-rt} + 1} = \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (3.38)$$

A curva  $P(t)$  é denominada *logística* (fig. 3.12) e, de sua expressão (3.39), podemos observar que

- a) Se  $P_0 < P_\infty$  então  $P_0 < P(t) < P_\infty$  e  $P(t)$  tende a  $P_\infty$ , crescendo. Neste caso a equação (??) mostra claramente que  $\frac{dP}{dt} > 0$ ;
- b) Se  $P_0 > P_\infty$  então  $P(t)$  tende a  $P_\infty$ , decrescendo (verifique que, neste caso,  $\frac{dP}{dt} < 0$ );
- c) Da equação (3.37) temos que

$$\frac{dP}{dt} = rP - r\frac{P^2}{P_\infty}$$

ou seja,  $\frac{dP}{dt}$ , como função de  $P$ , é uma parábola com concavidade voltada para baixo (veja fig. 3.12) e cujas raízes  $P = 0$  e  $P = P_\infty$  são os pontos de equilíbrio ou *soluções de equilíbrio* da equação diferencial (3.37), pois  $\frac{dP}{dt} = 0$  nestes pontos.

d) Como  $r > 0$ , temos que  $\frac{dP}{dt}$  é crescente se  $0 < P(t) < \frac{P_\infty}{2}$  e decrescente se  $\frac{P_\infty}{2} < P(t) < P_\infty$ . O valor máximo de  $\frac{dP}{dt}$ , relativamente a  $P$ , é atingido quando  $P = \frac{P_\infty}{2}$ , isto é, quando a população for igual à metade da população limite.

e) Se considerarmos em (3.38),  $P(t) = \frac{P_\infty}{2}$ , podemos determinar o instante  $t_m$  em que a população atinge a máxima variação:

$$\frac{P_\infty}{2} = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad \Rightarrow \quad e^{rt} = \frac{P_\infty - P_0}{P_0}$$

e portanto

$$t_m = \frac{1}{r} \ln \frac{P_\infty - P_0}{P_0}, \quad (3.39)$$



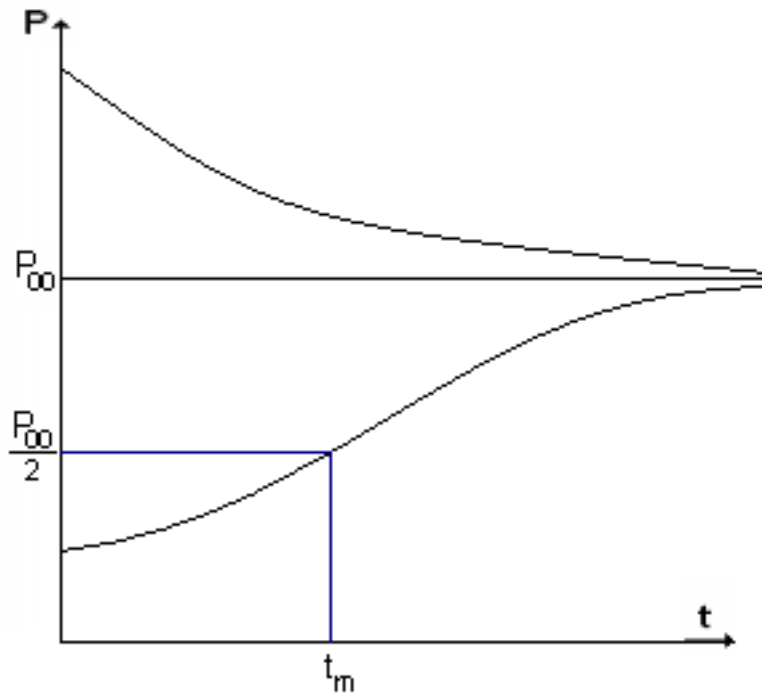


Figura 3.12: Curva logística

considerando que  $P_0 < \frac{P_\infty}{2}$ .

Assim, para  $t = t_m$  temos:

$$\text{i) } P(t_m) = \frac{P_\infty}{2} \quad (3.40)$$

$$\text{ii) } \frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_m} = r \frac{P_\infty}{2} \left( 1 - \frac{P_\infty/2}{P_\infty} \right) = \frac{r}{4} P_\infty > 0 \quad (3.41)$$

$$\text{iii) } \frac{d^2P}{dt^2} \Big|_{t=t_m} = r \frac{dP}{dt} - \frac{2r}{P_\infty} P \frac{dP}{dt} = r \frac{dP}{dt} \left( 1 - 2 \frac{P}{P_\infty} \right) \Big|_{P=\frac{P_\infty}{2}} = 0$$

logo  $t = t_m$  é um ponto de inflexão de  $P(t)$ . Desta forma,

$$\text{.Se } P_0 = \frac{P_\infty}{2} \Rightarrow t_m = 0$$

$$\text{.Se } \frac{P_\infty}{2} < P_0 < P_\infty \Rightarrow \text{a curva não tem ponto de inflexão.}$$

#### Modelo 5- Resfriamento de um corpo

Se um corpo de temperatura  $T$ , que não possui internamente nenhuma fonte de calor, é deixado em um meio ambiente com temperatura  $T_a$ , então a temperatura do corpo tende a se igualar à temperatura do meio ambiente.

Assim, se  $T < T_a$  o corpo se aquecerá e, caso contrário, irá se esfriar.

A temperatura do corpo, considerada uniforme, é uma função do tempo  $T = P_a$  e, pode-se verificar que quanto maior for o valor de  $|T - T_a|$  mais rápida será a variação de  $P_a$ . Newton evidenciou este fato enunciando a Lei de Resfriamento: "A taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte externa) é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente".

A formulação desta Lei em termos matemáticos é a equação homogênea:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_a) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (3.42)$$

onde,  $\kappa > 0$  pois se  $T < T_a$ ,  $\frac{dT}{dt} > 0$  e se  $T > T_a$ ,  $\frac{dT}{dt} < 0$ .

Observamos que  $T(t) = T_a$  é a solução de equilíbrio de 3.42 e significa que se a temperatura de um corpo é igual à do meio ambiente, então ela não irá variar.

A solução de 3.42 é obtida, considerando

$$\frac{dT}{(T - T_a)} = -\kappa dt \iff \int \frac{dT}{(T - T_a)} = \int -\kappa dt$$

Integrando ambos os membros, teremos

$$\ln |(T - T_a)| = -\kappa t + C$$

ou seja,

$$T(t) = T_a + K e^{-\kappa t}, \quad K \text{ constante real}$$

Usando  $T(0) = T_0$ , obtemos  $K = T_0 - T_a$ . Logo, a solução do problema de Cauchy 3.42 é dada por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\kappa t} \quad (3.43)$$

Observamos que, neste modelo matemático, a temperatura do corpo "atinge" a temperatura ambiente somente no limite em que  $t \rightarrow +\infty$ ; entretanto, na realidade, a temperatura ambiente é atingida sempre num tempo finito! Este fato pode dar a impressão que o modelo não se presta para simular situações reais de estabilidade; entretanto em termos de modelagem matemática  $t \rightarrow +\infty$  deve ser interpretado por: "t assume valores relativamente grandes comparados com a evolução das variáveis". Podemos denotar por  $t_\infty$  o tempo necessário para que o corpo atinja 99% da temperatura ambiente. Em termos numéricos isto significa que, se o erro relativo for de 1% ou menos, podemos considerar  $T(t)$  como sendo praticamente  $T_a$ . Aplicando na equação 3.29, vem

$$\begin{aligned}
\pm \frac{99}{100} T_a &= T_a + (T_0 - T_a) e^{-\kappa t_\infty} \\
e^{-\kappa t_\infty} &= \left| 0,01 \frac{T_a}{T_0 - T_a} \right| \\
-\kappa t_\infty &= \ln \left| 0,01 \frac{T_a}{T_0 - T_a} \right| \\
\Rightarrow t_\infty &= \frac{1}{\kappa} \ln \left| \frac{100(T_0 - T_a)}{T_a} \right|
\end{aligned}$$

**Aplicação:** O coeficiente de resfriamento de uma pessoa adulta quando morre é aproximadamente  $\kappa = 1,3$ . Agora, se o ambiente onde está sendo velado o corpo está a uma temperatura de  $25^0C$ , podemos determinar o tempo que levará para que a temperatura do corpo seja próxima da temperatura ambiente.

Supondo que  $T_0 = 36,5^0C$ , temos

$$t_\infty = \frac{1}{1,3} \ln \left| \frac{100(36,5 - 25)}{25} \right| = 2,945hs$$

Se quisermos cometer um erro relativo menor ou igual a 0,1%, devemos tomar  $T(t_\infty) = \frac{999}{1000} T_a$ . E, neste caso,

$$t_\infty = \frac{1}{1,3} \ln \left| \frac{1000(36,5 - 25)}{25} \right| = 4,71hs$$

**Observação:-** Dada a equação homogênea

$$\frac{dy}{dx} = ay + b \quad (3.44)$$

Considerando que seu ponto de equilíbrio é  $y^* = -\frac{b}{a}$ , substituindo este valor na equação 3.30 obtemos sua equação equivalente, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = ay + b = a\left(y - \frac{b}{a}\right) = a(y - y^*)$$

## 3.6 Equação com separação de variáveis

Uma equação diferencial de primeira ordem é dita separável, ou de variáveis separadas, se puder ser posta na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \quad (3.45)$$

ou na forma diferencial, usando o formalismo de Liebnitz,

$$f(y)dy = g(x)dx \quad (3.46)$$

onde, as funções  $f$  e  $g$  são contínuas em algum intervalo de  $\mathbb{R}$ .

Integrando a equação 3.46 membro-a-membro, obtemos:

$$F(y) = \int f(y)dy = \int g(x)dx = G(x) \quad (3.47)$$

Se pudermos inverter a função  $F$ , a solução de 3.45 será  $y = \varphi(x) = F^{-1}(G(x))$ .

**Exemplo 3.8** Consideremos a equação

$$\frac{dy}{dx} = x^3(1+y) \quad (3.48)$$

Neste caso, temos  $g(x) = x^3$  e  $f(y) = \frac{1}{1+y}$ . Observamos que a função  $f(y)$  não é contínua para  $y = -1$  e a função constante  $\varphi(x) = -1$  é a solução de equilíbrio de 3.33. Assim, podemos separar as soluções para  $y < -1$  e  $y > -1$ .

Suponhamos que  $y < -1$  e integramos membro-a-membro a equação 3.33 na forma diferencial, isto é,

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x^3 dx$$

e, obtemos

$$\ln(|1+y|) = \frac{x^4}{4} + C \quad (3.49)$$

e, como  $y < -1$ , então  $|1+y| = -1-y \implies \ln(|1+y|) = \ln(-1-y)$ . Agora, explicitando  $y$  em 3.34 temos

$$y = -1 - e^{\frac{x^4}{4}+C} = -1 - Ke^{\frac{x^4}{4}}, \text{ K é uma constante real.}$$

Para  $y > -1$ , a solução será:

$$y = -1 + Ke^{\frac{x^4}{4}}$$

Observamos que nem sempre podemos inverter a função  $F(y)$  dada na expressão 3.47. Neste caso, deixamos a solução na forma implícita 3.47.

**Exemplo 3.9** Consideremos a equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-2+x)}{x(1-2y)} \quad (3.50)$$

Temos que a função  $g(x) = \frac{(-2+x)}{x}$  não é contínua para  $x = 0$ . Por outro lado, a função  $f(y) = \frac{1-2y}{y}$  também não é contínua para  $y = 0$ . Separando as variáveis e escrevendo 3.50 na forma diferencial, temos:

$$\frac{(1-2y)}{y} dy = \frac{(-2+x)}{x} dx$$

Integrando membro-a-membro a expressão anterior vem:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-2y)}{y} dy &= \ln |y| - 2y + C_1, \quad y \neq 0 \\ \int \frac{(-2+x)}{x} dx &= -2 \ln |x| + x + C_2, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Neste caso, a solução de 3.50 é dada na forma implícita

$$\ln |y| - 2y = -2 \ln |x| + x + C$$

Equações da forma diferencial:

$$f_1(y)g_1(x)dx = f_2(y)g_2(x)dy \quad (3.51)$$

onde os coeficientes das diferenciais são decompostos em fatores que dependem somente de  $x$  ou de  $y$ , são também equações com variáveis separadas. Dividindo ambos os lados da expressão 3.51 por  $f_1(y)g_2(x)$ , obtemos:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx = \frac{f_2(y)}{f_1(y)} dy$$

A integral geral desta equação é dada por:

$$\int \frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx - \int \frac{f_2(y)}{f_1(y)} dy = C$$

Observamos que a divisão por  $f_1(y)g_2(x)$  pode acarretar a perda das soluções particulares que anulam  $f_1(y)$  ou  $g_2(x)$ .

**Exemplo 3.10** Dada a equação

$$x \cos y dy = (x + 1) \sin y dx$$

Considerando intervalos de  $\mathbb{R}$ , onde  $x \neq 0$  e  $y \neq k\pi$ , podemos escrevê-la na forma

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy - \frac{x+1}{x} dx = 0$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos y}{\sin y} dy - \int \frac{x+1}{x} dx &= C \iff \ln |\sin y| - [x + \ln |x|] = C \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{\sin y}{x} \right| = x + C \\ \left| \frac{\sin y}{x} \right| &= Ke^x \implies \frac{\sin y}{x} = \pm e^C e^x \implies \boxed{y = \arcsin(x + Ke^x)} \end{aligned}$$

Obtivemos esta solução geral dividindo cada membro da equação original por  $x \sin y$ , supondo que  $x \sin y \neq 0$ . Igualando cada fator deste produto a zero, temos, respectivamente,  $x = 0$  e  $y = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Substituindo estes valores na equação inicial comprovamos que  $y = k\pi$  e  $x = 0$  são soluções desta equação.

**Exercícios 3.3** - Resolva as equações

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\operatorname{sen} x}$ , | Resp.: $y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$                  |
| 2) $(1 + y^2) dx = (1 + x^2) dy$                            | Resp.: $x + y = C(1 - xy)$  |
| 3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y^2)}{xy}$                    | Resp.: $x^2(1 + y^2) = C$   |
| 4) $\frac{dy}{dx} = \sin(x - y)$                            | Resp.: $x + C = \cot g\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ |

**Modelo 6 - Princípio da Alometria**

O princípio da alometria, muito utilizado em biomatemática, estabelece que, num mesmo indivíduo, “a razão entre os crescimentos específicos (relativos) de seus órgãos é constante”.

Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  os “tamanhos” dos órgãos ou partes distintas do corpo de um mesmo indivíduo, num instante  $t$ . Então, o modelo matemático que traduz o princípio da alometria é dado por:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \alpha \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} \quad (3.52)$$

com  $x(t) > 0$ ,  $y(t) > 0$  para todo  $t \geq 0$ , onde  $\alpha$  é a taxa de proporcionalidade do crescimento relativo, ou *coeficiente de alometria*.

Na equação (3.52) as variáveis  $x$  e  $y$  são dependentes de  $t$ . Usando a regra da cadeia podemos escrever (3.52) na forma de uma equação autônoma onde o tempo  $t$  não aparece explicitamente, ou seja,

$$\frac{dx}{dy} = \alpha \frac{x}{y} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha} \frac{y}{x} \quad (3.53)$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{dx}{x} = \alpha \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \alpha \ln y + k$$

onde  $k$  é a constante de integração que pode ser escrita na forma

$$k = \ln a \quad (a > 0).$$

Então,

$$\ln x = \ln(ay^\alpha) \Rightarrow x = ay^\alpha \quad (3.54)$$

A equação (3.54), solução de (3.53), fornece a *relação alométrica* entre as variáveis  $x$  e  $y$ .

### Aplicação 1- Crescimento de Peixes (modelo de von Bertalanffy)

O peso  $p(t)$  de cada espécie de peixe, dado pelo modelo de von Bertalanffy estabelece que “o crescimento do peso do peixe é proporcional à área de sua superfície externa (anabolismo) e o decaimento é proporcional à energia consumida (catabolismo)”

$$\frac{dp}{dt} = \alpha A - \beta p \quad (3.55)$$

onde,

$\alpha$  é a constante de anabolismo, representando a taxa de síntese de massa por unidade de área do peixe;

$\beta$  é a constante de catabolismo, representando a taxa de diminuição da massa por unidade de massa.

A área  $A$  da superfície externa é proporcional a  $p^{2/3}$ . Isto é dado pelo princípio da alometria.

De fato: temos que

- o peso é proporcional ao volume e
- o volume é proporcional ao cubo do comprimento  $\Rightarrow p = k_1 \ell^3$ .
- a área é proporcional ao quadrado do comprimento  $\Rightarrow A = k_2 \ell^2$ .

Portanto,

$$A = kp^{2/3}$$

Então, o modelo de von Bertalanffy para **crescimento (em peso) de peixes** é dado por

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \quad (3.56)$$

que é uma equação de Bernoulli e será analisada na próxima secção.

Do Princípio da Alometria, podemos obter também um **modelo para o crescimento em tamanho** (*comprimento do peixe*).

Consideremos  $l = l(t)$  o comprimento de um peixe no instante  $t$ , a relação alométrica entre peso e comprimento é:

$$\lambda \frac{\frac{dp}{dt}}{p} = \frac{\frac{dl}{dt}}{\ell} \iff \ell(t) = b[p(t)]^\lambda$$

Aplicando esta relação em (3.41), obtemos

$$\lambda \frac{\alpha p^{2/3} - \beta p}{p} = \frac{\frac{dl}{dt}}{\ell} \Rightarrow \lambda(\alpha p^{-1/3} - \beta)\ell = \frac{dl}{dt}$$

O valor de  $\lambda$  depende da espécie considerada, variando com a forma do peixe, para  $\lambda < \frac{1}{3}$  se tem a forma “arredondada” e  $\lambda > \frac{1}{3}$  se for longelíneo. Consideramos, por simplicidade,  $\lambda = \frac{1}{3}$ , de acordo com a alometria isométrica  $p = k\ell^3$  ou  $\ell = bp^{1/3}$ .

Substituindo  $p^{-1/3}$  pela expressão alométrica, o modelo de crescimento em comprimento de peixes é dado pela equação autônoma:

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = \lambda(b\alpha - \beta\ell) \\ \ell(0) \simeq 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

A equação (3.57) pode ser escrita na forma

$$\frac{dl}{dt} = \beta\lambda \left( \frac{b\alpha}{\beta} - \ell \right) \quad (3.58)$$

cuja solução que pode ser obtida por separação de variáveis, considerando  $\ell(0) \simeq 0$ , é dada por (verifique):

$$\ell(t) = \frac{b\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta\lambda t}) \quad (3.59)$$

Podemos observar que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\ell(t) \rightarrow \frac{b\alpha}{\beta} = \ell_{\max}$  (comprimento máximo) e portanto



$$\ell_{\max} = b(p_{\max})^{1/3}$$

A equação

$$\ell(t) = \ell_{\max}(1 - \ell^{-rt}); \quad r = \beta\lambda \quad (3.60)$$

é denominada equação de von Bertalanffy para o crescimento, em comprimento, de peixes.

As equações de von Bertalanffy (3.56) e (3.60) são baseadas, fundamentalmente, no processo inibitório dos crescimentos, em peso e em comprimento. O cálculo dos valores assintóticos  $p_{\max}$  e  $\ell_{\max}$  pode ser realizado pelo método de Ford-Walford (veja projetos de modelagem).

### 3.7 Equações homogêneas

Uma função  $f(x, y)$  é homogênea de grau  $n$  se

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad (3.61)$$

**Exemplo 3.4-**  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  é uma função homogênea de segundo grau pois  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x, y)$ .

Se  $f(x, y)$  é homogênea de grau zero, então

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Em analogia com esta definição, dizemos que uma EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

é homogênea se a função  $f(x, y)$  for homogênea de grau zero, isto é,

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.62)$$

Para resolver uma equação homogênea, o caminho natural é fazer a mudança de variável  $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx \implies \frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$  na equação 3.62.

$$x \frac{dz}{dx} + z = F(z)$$

ou

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(z) - z}{x} \quad (3.63)$$

que pode ser resolvida separando-se as variáveis.

**Exemplo 3.5-** Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

Observamos que a função  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$  não é definida na reta  $y = x$  e, portanto, não devemos esperar que existam soluções passando por pontos desta reta. Fora desta reta  $f$  é contínua e com derivadas contínuas em relação às variáveis  $x$  e  $y$ .

Temos que  $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{x+y}{x-y} = f(x, y) \implies f$  é homogênea de grau zero. Então, considerando  $y = zx \implies \frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$ , a equação original pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} \implies x \frac{dz}{dx} + z = \frac{1+z}{1-z} \implies \frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2}{x(1-z)}$$

que pode ser resolvida separando as variáveis e integrando

$$\frac{1-z}{1+z^2} dz = \frac{1}{x} dx \implies \int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx + C$$

e portanto,

$$\text{arc tg } z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln x + C$$

Então, a solução da EDO, na forma implícita é:

$$\text{arc tg } \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left[ \ln \left( 1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 \right) \right] = \ln x + C$$

**Exemplo 3.11-** Uma equação diferencial do tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} \quad (3.64)$$

onde,  $a_1, a_2, b_1$  e  $b_2$  são constantes, é homogênea.

Se considerarmos a equação

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_1 x + b_1 y} \quad (3.65)$$

verificamos que 3.64 e 3.65 têm a mesma solução geral nos pontos em que forem simultaneamente definidas as funções

$$f(x, y) = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

Se o ponto  $(0, 0)$  é o único ponto de descontinuidade simultânea para ambas as equações elas são ditas equivalentes; neste caso, o ponto  $(0, 0)$  é chamado ponto singular isolado. O estudo das soluções na vizinhança do ponto singular é de grande interesse nos problemas de estabilidade das soluções.

### Equações quase homogêneas

Equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2x + b_2y + c_1}{a_1x + b_1y + c_2} \quad (3.66)$$

onde,  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  e  $c_2$  são constantes, é denominada quase homogênea. A equação 3.66 não é homogênea mas uma mudança de variáveis que leva o ponto singular de 3.66 na origem  $(0, 0)$ , transforma-a numa equação homogênea.

O ponto singular de 3.66 é a raiz do sistema

$$\begin{cases} a_2x + b_2y + c_1 = 0 \\ a_1x + b_1y + c_2 = 0 \end{cases}$$

sendo pois dado por:

$$\left( \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1} \right)$$

Então, devemos tomar a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = u + \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1} \\ y = v + \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{b_1a_2 - b_2a_1} \end{cases}$$

**Exemplo 3.12** Encontre a curva integral que passa pelo ponto  $(1, -3)$  e satisfaz a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 2}{x + 1}$$

nos pontos em que  $x \neq -1$ .

**Solução:** As funções  $f(x, y) = \frac{x+y+2}{x+1}$  e  $\frac{df}{dy} = \frac{1}{x+1}$  são descontínuas no conjunto  $A = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}$ . Como o ponto  $(1, -3) \notin A$ , então o T.E.U. garante que existe uma única solução  $y = \varphi(x)$  com  $\varphi(1) = -3$ .

A equação é quase homogênea e seu ponto singular é  $(-1, -1)$ . Tomamos então a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = u - 1 \\ y = v - 1 \end{cases} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

e a equação original fica sendo:

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u-1) + (v-1) + 2}{(u-1) + 1} = \frac{u+v}{u} = 1 + \frac{v}{u}$$

que é agora homogênea. Fazendo

$$z = \frac{v}{u} \implies v = zu \implies z + u \frac{dz}{du} = \frac{dv}{du} = 1 + \frac{v}{u} = 1 + z.$$

obtemos a equação

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{u}$$

cujas solução geral é

$$z = \ln |u| + C = \ln |Ku|$$

onde  $K = \ln C$  ( $C > 0$  é uma constante de integração arbitrária). Como

$$z = \frac{v}{u} \implies v = u \ln |Ku|$$

Finalmente, retornando às variáveis iniciais teremos

$$y + 1 = (x + 1) \ln |K(x + 1)|, \text{ com } x \neq -1.$$

ou

$$y = \varphi(x) = (x + 1) \ln |K(x + 1)| - 1$$

Usando a condição inicial  $\varphi(1) = -3$ , teremos:

$$-3 = 2 \ln 2K - 1 \implies \ln 2K = -1 \implies K = \frac{1}{2e}$$

Portanto, a solução particular do problema de valor inicial é dada por:

$$\varphi(x) = (x + 1) \left[ \ln \frac{|(x + 1)|}{2} - 1 \right] - 1, \quad (x \neq -1).$$

**Exercícios 3.4-** 1) Estudar a equação homogênea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - y}$$

e sua equivalente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - y}{y}$$

2) Resolver a equação

$$x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Resp.:  $y = \varphi(x) = x \sin \ln Cx$

3) Estude as equações equivalentes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y-x} \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{x}$$

4) Estude a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y+x}$$

### 3.8 Equações lineares de primeira ordem

O tipo de equações que vamos apresentar agora é bastante simples na sua forma, mas apresenta várias idéias que serão generalizadas depois, o que torna seu estudo mais importante.

Uma equação diferencial de primeira ordem é **linear** se for da forma:

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y = g(x) \quad (3.67)$$

onde,  $h$  e  $g$  são definidas e contínuas num intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , o que satisfaz o Teorema de existência e unicidade para todo  $x_0 \in (a, b)$ .

A equação 3.67 é dita linear porque a operação  $\left[\frac{d}{dx} + h(x)\right]$ , efetuada sobre  $y$  é uma operação linear, ou seja,

$$\left[\frac{d}{dx} + h(x)\right](\alpha y_1 + y_2) = \alpha \left[\frac{d}{dx} + h(x)\right](y_1) + \left[\frac{d}{dx} + h(x)\right](y_2)$$

Vamos apresentar agora dois métodos gerais para resolver a equação 3.67.

#### Método do fator integrante

Podemos observar que a expressão

$$\left[\frac{dy}{dx} + h(x)y\right] \quad (3.68)$$

é "quase" a derivada de um produto de funções. Se assim fosse, a solução da equação estaria reduzida a uma simples integração. Suponha então que exista uma função  $\lambda(x)$  que multiplicada pela expressão 3.68 nos dê:

$$\lambda(x) \frac{dy}{dx} + \lambda(x)h(x)y(x) = \frac{d}{dx} [\lambda(x)y(x)]$$

A função  $\lambda(x)$  deve portanto satisfazer a equação:

$$\frac{d\lambda(x)}{dx} = \lambda(x)h(x) \iff \frac{d\lambda}{\lambda} = h dx \iff \lambda(x) = e^{\int h dx}$$

$\lambda(x)$  é denominado *fator de integração*.

Aplicando o fator de integração na equação 3.52 temos

$$e^{\int h dx} \left[ \frac{dy}{dx} + h(x)y \right] = \frac{d}{dx} \left[ y(x)e^{\int h dx} \right] = g(x)e^{\int h dx}$$

Logo,

$$y(x)e^{\int h dx} = \int g(x)e^{\int h dx} dx + C$$

Então, a solução geral de 3.67 é:

$$y = \varphi(x) = e^{-\int h dx} \left[ \int g(x)e^{\int h dx} dx + C \right] \quad (3.69)$$

**Exemplo 3.13** Resolver a equação linear

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1} = x^2 - 1$$

Observamos que aqui a função  $h(x) = -\frac{1}{x+1}$  não é definida para  $x = -1$ , portanto devemos procurar soluções fora deste ponto.

O fator integrante é dado por:  $\lambda(x) = e^{-\int \frac{1}{x+1} dx} = e^{-\ln(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ .

Logo,

$$\frac{1}{x+1} \left[ \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{y}{x+1} \right] = \frac{g(x)}{x+1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{y}{x+1} &= \int \frac{g(x)}{x+1} dx + C = \int (x-1) dx + C \\ &= \left( \frac{x^2}{2} - x + C \right) \end{aligned}$$

E portanto

$$y(x) = (x+1) \left( \frac{x^2}{2} - x + C \right)$$

### Método da variação da solução homogênea

Quando na equação (3.68) tivermos  $g(x) = 0$ , diremos que a equação é *linear homogênea*

$$\frac{dy}{dx} + h(x)y = 0 \quad (3.70)$$

A solução geral de 3.70 pode ser simplesmente obtida por separação de variáveis

$$\int \frac{dy}{y} = \int -h(x)dx \iff \ln y = - \int h(x)dx + C$$

ou

$$y = \varphi(x) = Ke^{-\int h(x)dx} \quad (3.71)$$

Consideremos a equação linear não homogênea 3.68 ( $g(x)$  não é identicamente nula), o método de variação da solução da homogênea consiste em procurar um parâmetro variável  $K(x)$  de modo que a solução da equação 3.67 seja da forma

$$y = \varphi(x) = K(x)e^{-\int h(x)dx} \quad (3.72)$$

Substituindo 3.72 na equação 3.67, obtemos

$$-K(x)h(x)e^{-\int h(x)dx} + \frac{dK}{dx}e^{-\int h(x)dx} + h(x)K(x)e^{-\int h(x)dx} = g(x)$$

Logo,

$$\frac{dK}{dx} = g(x)e^{\int h(x)dx} \implies K(x) = \int g(x)e^{\int h(x)dx} dx + C$$

Substituindo esta expressão em 3.72 obtemos a solução geral de 3.67:

$$\varphi(x) = \left[ \int g(x)e^{\int h(x)dx} dx + C \right] e^{-\int h(x)dx}$$

igual à obtida em 3.69.

**Exemplo 3.14** Resolva a equação

$$\frac{dy}{dt} = (\tan t)y + \cos t \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

**Solução:** os coeficientes são funções contínuas no intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Vamos procurar inicialmente a solução geral da homogênea associada, isto é, da equação

$$\frac{dy}{dt} = (\tan t)y$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt \implies \ln |y| = -\ln |\cos t| + C$$

A constante de integração  $C$  (arbitrária) pode ser colocada na forma  $C = \ln A$ . Assim, podemos escrever

$$|y| = \frac{A}{|\cos t|}$$

No intervalo  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , temos  $|\cos t| = \cos t$ . logo,

a) Se  $y > 0 \implies y = \frac{A}{\cos t}$ ;

b) Se  $y < 0 \implies y = -\frac{A}{\cos t}$

Portanto, a solução geral da equação homogênea é

$$y = \frac{K}{\cos t}$$

Considerando agora  $K = K(x)$  e substituindo  $y = \frac{K(x)}{\cos t}$  na equação linear original, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\cos t \frac{dK}{dt} + K \sin t}{\cos^2 t} &= \frac{\sin t}{\cos t} \frac{K}{\cos t} + \cos t \\ \implies \frac{dK}{dt} &= \cos^2 t \end{aligned}$$

Portanto,

$$K(t) = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C$$

E a solução geral é então dada por:

$$y = \varphi(t) = \frac{1}{\cos t} \left[ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C \right]$$

### Exercícios 3.4 - Resolva as equações

1.  $\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = t$
2.  $\frac{dy}{dt} + y = 3$
3.  $\frac{dy}{dx} - y = \cos 2x$
4.  $\frac{dx}{dt} + tx = t$



**Modelo 7 - Digestão de ruminantes** Os animais ruminantes possuem um sistema complexo para digerir os alimentos. Simplificando, podemos dizer que eles engolem o alimentos sem mastigar, indo para a primeira cavidade do estômago chamada rume. Após serem ruminados estes alimentos seguem para o abomaso (coagulador), onde são digeridos. Posteriormente seguem para o duodeno e, em seguida são eliminados em forma de fezes. Se desejamos conhecer o efeito do alimento em cada compartimento, devemos saber como se dá o fluxo deste em todo período da digestão.

Vamos considerar que o fluxo de alimentos entre os 3 compartimentos selecionados se dá de uma maneira contínua; O modelo matemático, proposto por Blaxter, Graham e Wainman (1956) é o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1x \\ \frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y \\ z = Q - x - y \end{cases} \quad (3.73)$$

onde, as variáveis de estado são:

$x = x(t)$  a quantidade de alimentos no rume, no instante  $t$ ;

No início,  $x(0) = Q$ .

$y = y(t)$  a quantidade de alimentos no abomaso, no instante  $t$ ; com  $y(0) = 0$ .

$z = z(t)$  a quantidade de alimentos que chegou no duodeno até o instante  $t$ ; com  $z(0) = 0$ .

$Q$  a quantidade total de alimento ingerido no processo (constante).

Os parâmetros  $k_i$  são as taxas de transferências entre os compartimentos, consideradas positivas.

A solução do sistema 3.73 se reduz à resolução de suas equações individualmente; Senão vejamos:

Considerando somente a primeira equação do sistema 3.73 temos um problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1x \\ x(0) = Q \end{cases}$$

cuja solução é dada por:  $x(t) = Qe^{-k_1t}$ . Substituindo esta função  $x$  na segunda equação de 3.73 obtemos outro problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k_1Qe^{-k_1t} - k_2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

cuja equação diferencial é linear e não homogênea. Vamos resolvê-la usando o método da variação da solução homogênea;

A solução geral da homogênea associada é  $y(t) = Ke^{-k_2t}$ ; tomando  $K = K(t)$  e substituindo  $y(t) = K(t)e^{-k_2t}$  na equação diferencial, obtemos

$$-k_2Ke^{-k_2t} + \frac{dK}{dt}e^{-k_2t} = k_1Qe^{-k_1t} - k_2Ke^{-k_2t} \quad (3.74)$$

ou seja,

$$\frac{dK}{dt} = k_1Qe^{(k_2-k_1)t} \implies K(t) = \int k_1Qe^{(k_2-k_1)t} dt = \frac{k_1Q}{(k_2-k_1)}e^{(k_2-k_1)t} + C$$

Portanto,

$$y = \left[ \frac{k_1Q}{(k_2-k_1)}e^{(k_2-k_1)t} + C \right] e^{-k_2t} = \frac{k_1Q}{(k_2-k_1)}e^{-k_1t} + Ce^{-k_2t}$$

Usando a condição inicial  $y(0) = 0$ , temos

$$y = \frac{k_1Q}{(k_2-k_1)}e^{-k_1t} + \frac{k_1Q}{(k_1-k_2)}e^{-k_2t} \quad (k_2 \neq k_1) \quad (3.75)$$

Se tivermos  $k_2 = k_1$ , então, já na equação 3.74 tiramos

$$\frac{dK}{dt} = k_1Q \implies K(t) = k_1Qt + C$$

e, neste caso, considerando a condição inicial  $y(0) = 0 \implies C = 0$  e a solução é dada por:

$$y = k_1Qte^{-k_1t} \quad (3.76)$$

Com a terceira equação de 3.73 determinamos  $z(t)$ :

$$\text{Se } (k_2 \neq k_1) \implies z(t) = Q - Qe^{-k_1t} - \left[ \frac{k_1Q}{(k_2-k_1)}e^{-k_1t} + \frac{k_1Q}{(k_1-k_2)}e^{-k_2t} \right] = Q - \frac{k_1Q}{(k_2-k_1)} [k_2e^{-k_1t} - k_1e^{-k_2t}];$$

$$\text{Se } (k_2 = k_1) \implies z(t) = Q [1 - te^{-k_1t} (1 + k_1Q)].$$

Podemos observar que quando  $t$  for muito grande, não haverá mais alimentos em  $x$  e em  $y$ , e tudo terá chegado em  $z$ . Em termos matemáticos escrevemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = Q$$

### 3.9 Equações especiais

Até o momento resolvemos um número muito reduzido de tipos de equações diferenciais de primeira ordem mas, na verdade, existem poucos tipos destas equações que podem ser resolvidos por meio de métodos analíticos. Muitas vezes devemos fazer uma mudança conveniente da variável dependente e transformar a equação original numa equação linear. Algumas equações ganharam notoriedade por suas aplicações e foram batizadas com o nome de seu criador. Veremos, a seguir, algumas destas equações.

## Equações de Bernoulli

Uma equação é dita de Bernoulli se for da forma

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)y^n \quad (3.77)$$

onde,  $g$  e  $h$  são funções contínuas em um intervalo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  e  $n$  é uma constante qualquer.

### Observações:

◦ Se  $x_0 \in (a, b)$ , então o problema de valor inicial  $y_0 = \varphi(x_0)$  tem uma única solução se  $n = 0$  ou  $n \geq 1$  (Verifique);

◦ Se  $n = 0$ , a equação 3.77 é linear;

◦ Se  $n = 1$ , a equação 3.77 é linear homogênea;

Vamos então supor que  $n \neq 0$  e  $n \neq 1$ — Considerando na equação 3.77 a mudança de variável

$$y = z^k$$

obtemos:

$$kz^{k-1} \frac{dz}{dx} + g(x)z^k = h(x)z^{kn}$$

ou

$$\frac{dz}{dx} + \frac{g(x)}{k} \frac{z^k}{z^{k-1}} = h(x) \frac{z^{kn}}{z^{k-1}} \quad (3.78)$$

e, para que a equação 3.78 se torne linear basta considerar  $kn - (k - 1) = 0$ , ou seja,  $k = \frac{1}{1-n}$ . Portanto, tomando  $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ , obtemos a equação linear

$$\frac{dz}{dx} + \frac{g(x)}{k} z = h(x)$$

**Exemplo 3.15** Resolva a equação

$$x \frac{dy}{dx} - y + y^3 = 0 \quad (3.79)$$

**Solução:** Para  $x \neq 0$ , podemos escrever a equação na forma de uma equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^3$$

Assim, tomando  $y = z^{\frac{1}{1-3}} = z^{-\frac{1}{2}} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} \frac{dz}{dx}$ . Substituindo estes valores na equação original obtemos a equação linear:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = \frac{2}{x} \quad (3.80)$$

onde as funções  $g(x) = h(x) = \frac{2}{x}$  são contínuas para  $x \neq 0$ .

Consideremos inicialmente a linear homogênea

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = 0$$

que pode ser resolvida por separação de variáveis

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2}{x}dx \implies \int \frac{dz}{z} = \int -\frac{2}{x}dx \implies \ln |z| = -2 \ln |x| + C = \ln \left| \frac{A}{x^2} \right|$$

Portanto,

$$|z| = \frac{A}{x^2} \implies z = \pm \frac{A}{x^2}$$

como  $z = 0$  também é solução da equação homogênea, então sua solução geral é dada por

$$z = \frac{K}{x^2}, \quad K \in \mathbb{R} \quad (3.81)$$

Considerando agora  $z = \frac{K(x)}{x^2}$  e substituindo na equação 3.80, vem

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dK}{dx}x^2 - 2xK}{x^4} = -\frac{2}{x} \frac{K}{x^2} + \frac{2}{x}$$

Logo,

$$\frac{dK}{dx} = 2x \implies K(x) = x^2 + k$$

Portanto,

$$z(x) = \frac{x^2 + k}{x^2}$$

Como  $y = z^{-\frac{1}{2}}$ , então a solução geral de 3.79 é

$$y(x) = \left[ \frac{x^2 + k}{x^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + k}}$$

**Exemplo 3.16** Resolva a equação de Bernoulli

$$x^3 \frac{dy}{dx} = x^2 y + y^4 \operatorname{tg} x$$

Solução: Considere a mudança de variável  $y = z^{-\frac{1}{3}}$  para obter a equação linear

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{3}{x}z - \frac{3}{x^3} \operatorname{tg}(x)$$

A solução geral da homogênea associada é

$$z(x) = \frac{K}{x^3}$$

Considerando  $z(x) = \frac{K(x)}{x^3}$  na equação linear vem:

$$\frac{dK}{dx} = -3tg(x)$$

Logo,

$$K(x) = -3 \int tgx \, dx = -3 \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = 3 \ln |\cos x| + C$$

Portanto,

$$z(x) = \frac{K(x)}{x^3} = \frac{3 \ln |\cos x| + C}{x^3}$$

Então,

$$y(x) = \left[ \frac{3 \ln |\cos x| + C}{x^3} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

é a solução geral da equação inicial.

**Exercícios 3.17** Resolva as equações de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = xy + x\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} - y = x\sqrt{y}$$

$$\frac{dx}{dt} + t = t^2$$

**Modelo 8- Equações de von Bertalanffy para crescimento de peixes**

O modelo de von Bertalanffy para **crescimento (em peso) de peixes** é dado por

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^{2/3} - \beta p \\ p(0) \simeq 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

A equação (3.82) é autônoma de 1<sup>ª</sup> ordem e  $f(p) = \alpha p^{2/3} - \beta p$  é não linear em  $p$ .

A resolução de (3.82) segue os mesmos passos utilizados para a resolução de uma equação de Bernoulli

Considerando em (3.82) a mudança de variável  $z = p^{1-2/3} = p^{1/3}$ , obtemos a equação linear

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}(\alpha - \beta z)$$

cuja solução é dada por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} + ke^{-\frac{\beta}{3}t}$$

E portanto, a solução geral de (3.82) é dada por

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{k\beta}{\alpha}e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3 \quad (3.83)$$

Quando  $t = 0$ , o valor de  $p(0)$  é desprezível - Considerando então

$$p(0) \simeq 0,$$

podemos determinar o valor da constante de integração  $k$ :

$$p(0) = 0 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 + \frac{k\beta}{\alpha}\right)^3 \Rightarrow k = -\frac{\alpha}{\beta}$$

usando este valor em (2.28), obtemos

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3 \quad (3.84)$$

Quando  $t$  cresce, o peso do peixe tende a  $p_{\max} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$  que será seu peso máximo.

Para algumas espécies de peixes o amadurecimento das gônadas, condição necessária para o acasalamento, acontece quando a *variação* do crescimento em peso é máxima.

Em termos matemáticos, o valor de  $p(t)$  que maximiza  $\frac{dp}{dt}$  é obtido considerando  $\frac{d^2p}{dt^2} = 0$  (condição necessária);

Derivando duas vezes a equação (3.84), obtemos

$$\frac{d^2p}{dt^2} = 3 \left(\frac{\beta}{3}\right)^2 p_{\max} e^{-\frac{\beta}{3}t} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right) \left(3e^{-\frac{\beta}{3}t} - 1\right)$$

Então  $\frac{d^2p}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow t = 0$  ou  $t = \frac{3\ln 3}{\beta}$ .

Temos ainda que  $\frac{dp}{dt} = 0$  se  $t = 0$  ou  $t \rightarrow +\infty$  e  $\frac{dp}{dt} > 0$  se  $t > 0$ . Então,  $t^* = \frac{3\ell_n 3}{\beta}$  é um ponto de inflexão da curva  $p(t)$  (equação e

$$p(t^*) = p_{\max}(1 - e^{-\ell_n 3})^3 = 0,296p_{\max}$$

O controle de pesca, muitas vezes, é baseado nos cálculos efetuados acima. Por exemplo, no pantanal matogrossense um *pacú* só pode ser embarcado se tiver com peso superior a 3kg. Considera-se que

$$p(t^*) = 3 \Rightarrow p_{\max} = \frac{3}{0,296} \simeq 10kg$$

e que um peixe, desta espécie, com menos de 3kg ainda não procriou.

Do Princípio da Alometria, podemos obter também um **modelo para o crescimento em tamanho** (*comprimento do peixe*).

Consideremos a relação alométrica:

$$\ell(t) = b[p(t)]^\lambda, \quad \text{obtida de} \quad \lambda \frac{\frac{dp}{dt}}{p} = \frac{d\ell}{dt} \frac{1}{\ell}$$

O valor de  $\lambda$  depende da espécie considerada, variando com a forma do peixe. Consideramos, por simplicidade,  $\lambda = \frac{1}{3}$ , de acordo com a alometria isométrica  $p = k\ell^3$  ou  $\ell = bp^{1/3}$ .

Substituindo  $p^{-1/3}$  pela expressão alométrica, o *modelo de crescimento em comprimento de peixes* é dado pela equação autônoma:

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dt} = \lambda(b\alpha - \beta\ell) \\ \ell(0) \simeq 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

e cuja solução, considerando  $\ell(0) = 0$ , é dada por uma função exponencial assintótica

$$\ell(t) = \frac{b\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta\lambda t}) \quad (3.86)$$

Podemos observar que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\ell(t) \rightarrow \frac{b\alpha}{\beta} = \ell_{\max}$  (comprimento máximo) e portanto

$$\ell_{\max} = b(p_{\max})^{1/3}$$

As equações de von Bertalanffy (3.82) e (3.85) são baseadas, fundamentalmente, no processo inibitório dos crescimentos, em peso e em comprimento. O cálculo dos valores assintóticos  $p_{\max}$  e  $\ell_{\max}$  pode ser realizado pelo

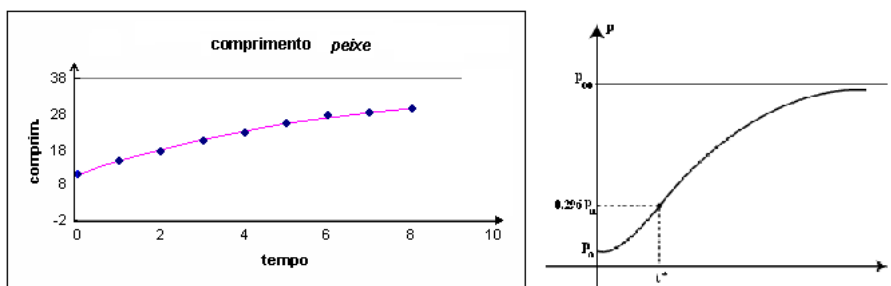


Figura 3.13: Crescimento do peixe em comprimento e peso

método de Ford-Walford quando temos alguma estatística destas variáveis [1].

O Modelo de von Bertalanffy para o metabolismo de peixes (equação (3.82)) pode ser modificado se considerarmos o crescimento de outros animais. A generalização é baseada na mudança da expressão alométrica que relaciona o peso do animal com área de sua superfície externa. Se considerarmos que a área  $A$  é proporcional a  $p^\gamma$ , obtemos um modelo generalizado de metabolismo dado por:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \alpha p^\gamma - \beta p \\ p(0) = p_0, \quad \text{com } 0 < \gamma < 1 \end{cases} \quad (3.87)$$

**Exercício 3.4-** Faça um estudo do modelo dado pelo problema de valor inicial 3.87.

### Equações de Clairaut

As equações de Clairaut deram origem ao estudo das soluções singulares. A forma geral destas equações é

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (3.88)$$

sendo  $f$  uma função derivável.

Para resolver uma equação deste tipo o procedimento a ser utilizado é a substituição

$$z = \frac{dy}{dx}$$

Assim, a equação 3.88 é reescrita como

$$y = xz + f(z) \quad (3.89)$$



Derivando a equação 3.89 em relação à variável  $x$ , obtemos

$$z = x \frac{dz}{dx} + z + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx}$$

ou

$$\frac{dz}{dx} \left[ x + \frac{df}{dz} \right] = 0$$

Assim,  $\frac{dz}{dx} = 0$  ou  $x + \frac{df}{dz} = 0$ .

Se  $\frac{dz}{dx} = 0$  então  $z = c$  (constante) e, neste caso,  $y = cx + f(c)$ ;

Se  $x = -\frac{df}{dz}$ , a equação 3.89 vem dada por

$$y = -z \frac{df}{dz} + f(z)$$

A solução singular da equação de Clairaut é dada na forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = f(t) - tf'(t) \end{cases}$$

onde  $t$  é um parâmetro.

**Exemplo 3.18** Resolva a equação

$$y = x \frac{dy}{dx} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^3$$

**Solução:** Tomando  $z = \frac{dy}{dx}$ , obtemos

$$y = xz + z^3$$

Derivando em relação a  $x$  vem:

$$z = x \frac{dz}{dx} + z + 3z^2 \frac{dz}{dx}$$

ou

$$\frac{dz}{dx} [x + 3z^2] = 0$$

logo,

Se  $\frac{dz}{dx} = 0 \implies$  a solução geral é dada pelo feixe de retas  $y = cx + c^3$ ;

Se  $x + 3z^2 = 0 \implies x = -3z^2$  e a solução singular (envoltória) é dada na forma paramétrica, com o parâmetro  $t = z$

$$\begin{cases} x = -3t^2 \\ y = (-3t^2)t + t^3 = -2t^3 \end{cases}$$

ou, eliminando o parâmetro  $t$ , obtemos a solução  $y$  em função de  $x$  :

$$y = \frac{2}{3}x \sqrt{-\frac{x}{3}}, \quad x \leq 0.$$

## Equações redutíveis às de primeira ordem

Algumas vezes uma equação diferencial de ordem superior pode ter sua ordem reduzida com a substituição

$$p = \frac{dy}{dx}$$

quando  $y$  ou  $x$  não aparecem explicitamente na equação

**Exemplo 3.19** Resolver a equação:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$$

**Solução:** Observamos que nem  $x$  ou  $y$  aparecem explicitamente na equação. Portanto, considerando-se a substituição  $p = \frac{dy}{dx}$ , podemos escrever

$$\frac{dp}{dx} - p = 0$$

cuja solução geral é dada por:

$$p(x) = C_1 e^x$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^x \implies y = C_1 e^x + C_2.$$

**Exemplo 3.20** Considere a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Neste caso,  $x$  não aparece explicitamente na equação. Tomando ainda  $p = \frac{dy}{dx}$ , obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

Substituindo na equação original temos:

$$p \frac{dp}{dy} + y = 0$$

que é uma equação a variáveis separadas e cuja solução, na forma implícita, é dada por:

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \implies p = \pm \sqrt{K - y^2}$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{K - y^2}$$

Separando as variáveis e integrando, vem

$$\int \frac{dy}{\sqrt{K - y^2}} = \pm \int dx$$

ou seja,

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{K}} = \pm (x + C_2) \implies y = \sqrt{K} \sin(x + C_2) = \sqrt{K} [\sin x \cos C_2 + \cos x \sin C_2]$$

Como as constantes que aparecem na solução geral são arbitrárias, podemos dizer que a solução geral é:

$$y = k_1 \sin x + k_2 \cos x$$

**Exercícios 3.6** Resolva as equações

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

### Modelo 9 - Corda suspensa (catenária)

A *catenária de Leibnitz* é o modelo de uma curva obtida por Johann Bernoulli que traduz a configuração de uma corda homogênea, flexível e inextensível, suspensa por suas extremidades em equilíbrio sob a ação de seu peso. Pode ser visualizada nos cabos de transmissão de energia, ou num varal de roupas.

Consideramos um sistema de coordenadas retangulares  $-xy$  com origem no ponto mais baixo da curva (fig. 3.14).

Seja  $P(x, y)$  um ponto genérico da corda. Vamos considerar o pedaço  $OP$  que está em equilíbrio devido à ação das forças:

- $T$  : tensão atuando tangencialmente em  $P$  e formando um ângulo  $\alpha$  com o eixo- $x$ ;
- $H$  : tensão da corda no ponto  $O$ , atuando horizontalmente;
- $ps$  : peso do pedaço  $OP$  da corda cujo comprimento é  $s$ , agindo verticalmente em sentido contrário do eixo- $y$  onde,  $p$  é o peso por unidade de comprimento.

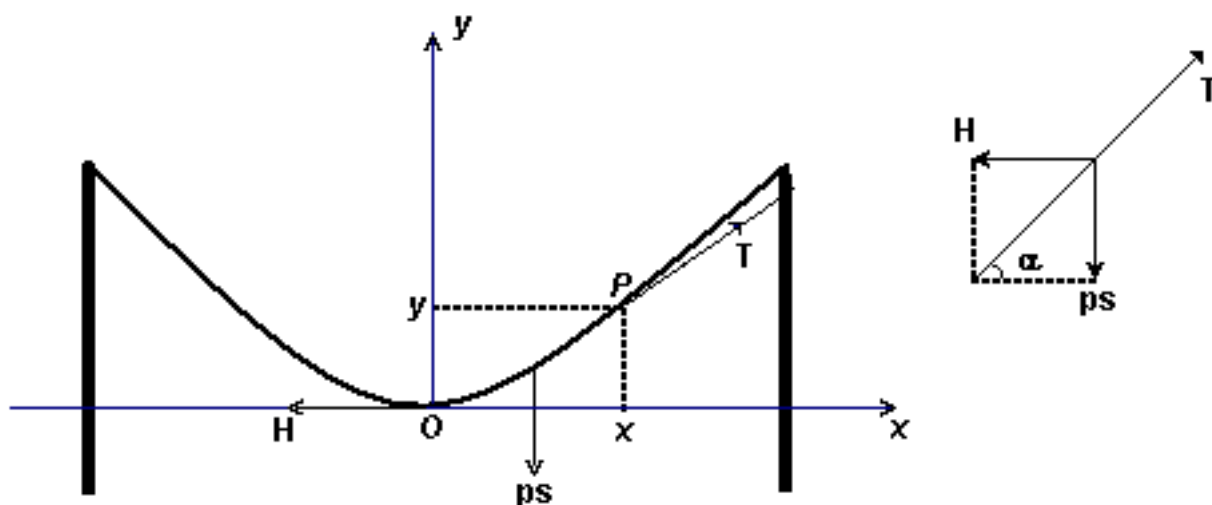


Figura 3.14: Catenária de Liebnitz

O fato do trecho  $OP$  estar em equilíbrio implica que  $H + T + ps = 0$ . Decompondo esta equação sôbre os eixos coordenados obtemos;

$$\begin{aligned} H &= T \cos \alpha \\ ps &= T \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.90)$$

Dividindo, membro a membro as equações 3.90, obtemos

$$\tan \alpha = \frac{ps}{H} = ks$$

por outro lado, como  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$ , então

$$\frac{dy}{dx} = ks \quad (3.91)$$

Derivando ambos os lados de 3.91 em relação a  $x$ , obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k \frac{ds}{dx} = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (3.92)$$

A solução da equação 3.92 é a *catenária*.

O artifício utilizado para sua resolução é o mesmo empregado na resolução da equação de Clairaut, isto é, tomamos  $\frac{dy}{dx} = z$  e obtemos uma equação de variáveis separáveis:

$$\frac{dz}{dx} = k\sqrt{1 + z^2}$$

ou

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k dx$$

Integrando, obtemos:

$$\ln \left( z + \sqrt{1+z^2} \right) = kx + C_1 \quad (3.93)$$

Agora, como para  $x = 0$  temos  $z(0) = y'(0) = 0$ , então  $C_1 = 0$ .

Assim, a solução 3.93 pode ser escrita como:

$$z + \sqrt{1+z^2} = e^{kx}$$

ou,

$$1 + z^2 = e^{2kx} - 2ze^{kx} + z^2 \implies 2z = (e^{2kx} - 1) e^{-kx}$$

Logo,

$$z = \frac{1}{2} (e^{kx} - e^{-kx}) \quad (3.94)$$

Como  $\frac{dy}{dx} = z$ , então

$$y = \frac{1}{2} \int (e^{kx} - e^{-kx}) dx = \frac{1}{2k} (e^{kx} + e^{-kx}) + C_2$$

Como  $y(0) = 0$ , temos  $C_2 = -\frac{1}{k}$  e portanto a equação da catenária é dada por:

$$y = \frac{1}{k} \left( \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{k} (\cosh kx - 1) \quad (3.95)$$

### 3.10 Equações exatas\*

A forma mais geral de equações diferenciais de primeira ordem que podemos resolver é

$$\frac{d}{dx} [\varphi(x, y)] = 0 \quad (3.96)$$

para alguma função  $\varphi(x, y)$  e cuja solução é simplesmente  $\varphi(x, y) = k$  (constante) de onde, algumas vezes se pode explicitar  $y$  como função de  $x$ . É muito importante reconhecer quando uma equação diferencial de primeira ordem tem a forma da equação 3.96 pois assim, podemos ter uma solução analítica mesmo que seja numa forma implícita.

A diferencial total de  $\varphi(x, y(x))$  é dada por:

$$\frac{d}{dx} [\varphi(x, y(x))] = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx}$$

então, uma equação diferencial

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3.97)$$

pode ser escrita sob a forma 3.96 se, e somente se, existe uma função  $\varphi(x, y)$  tal que

$$M(x, y) = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{e} \quad N(x, y) = \frac{d\varphi}{dy} \quad (3.98)$$

Neste caso, dizemos que 3.97 é *exata*.

O *condição de Euler* nos dá elementos para saber quando uma forma diferencial

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

é a diferencial total de alguma função  $\varphi(x, y)$  :

*Condição de Euler* : Sejam  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  funções contínuas e com derivadas parciais contínuas num retângulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \text{ e } c < y < d\}$ . Existe uma função  $\varphi(x, y)$  tal que  $M(x, y) = \frac{d\varphi}{dx}$  e  $N(x, y) = \frac{d\varphi}{dy}$  se, e somente se,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (3.99)$$

A demonstração da condição de Euler é equivalente à técnica para resolver uma equação exata - É o que faremos no próximo exemplo.

**Exemplo 3.21** Encontrar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} [2x \sin y + e^x \cos y] dx + [x^2 \cos y - e^x \sin y] dy = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (3.100)$$

**Solução:** Sejam

$$\begin{cases} M(x, y) = 2x \sin y + e^x \cos y \\ N(x, y) = x^2 \cos y - e^x \sin y \end{cases} \quad (3.101)$$

temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x \cos y - e^x \sin y \\ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x \cos y - e^x \sin y \end{cases} \implies \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Logo, como a condição de Euler está satisfeita em todo  $\mathbb{R}^2$ , existe uma função  $\varphi(x, y)$  tal que  $M(x, y) = \frac{d\varphi}{dx}$  e  $N(x, y) = \frac{d\varphi}{dy}$ .

$\frac{d\varphi}{dx} = M(x, y) \implies \varphi(x, y) = \int M(x, y)dx + H(y) = \int [2x \sin y + e^x \cos y] dx + H(y)$ .

Logo,

$$\varphi(x, y) = [x^2 \sin y + e^x \cos y] + H(y)$$

Para determinar o valor de  $H(y)$  usamos a outra parte da condição de Euler

$$N(x, y) = \frac{d\varphi}{dy} = [x^2 \cos y - e^x \sin y] + \frac{dH}{dy}$$

Assim, concluímos que  $\frac{dH}{dy} = 0 \implies H(y) = k$  (constante). Então,

$$\varphi(x, y) = [x^2 \sin y + e^x \cos y] + k$$

e a solução geral da equação diferencial (3.100) é a família de curvas  $\varphi(x, y) = 0$ , ou seja,

$$x^2 \sin y + e^x \cos y = c \quad (3.102)$$

A condição inicial  $y(0) = \frac{\pi}{4}$  permite determinar o valor de  $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e, portanto, a solução do problema de valor inicial 3.100 é dada pela curva

$$x^2 \sin y + e^x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Exemplo 3.22** Resolver a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x - y^2}$$

*Solução:* para  $x \neq y^2$ , podemos reescrever a equação dada, colocando na forma diferencial

$$(x - y) dx + (y^2 - x) dy = 0$$

Agora, tomando

$$\begin{cases} M(x, y) = x - y \\ N(x, y) = y^2 - x \end{cases}$$

temos,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

e, portanto a condição de Euler é satisfeita em todo plano.

Consideramos pois

$$\varphi(x, y) = \int M(x, y) dx + H(y) = \int (x - y) dx + H(y) = \frac{x^2}{2} - xy + H(y)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \frac{d\varphi}{dy} = -x + \frac{dH}{dy} \implies (y^2 - x) = -x + \frac{dH}{dy} \\ \implies \frac{dH}{dy} &= y^2 \implies H(y) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação é a família de curvas

$$\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^3}{3} + c = 0$$

### Fator integrante para equações exatas

Em alguns casos em que a equação  $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$  não é exata, podemos encontrar uma função  $I(x, y)$  de modo que a nova equação

$$I(x, y) \left[ M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} \right] = 0 \quad (3.103)$$

seja exata e se  $I(x, y) \neq 0$ , então as soluções das equações  $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$  e  $I(x, y) \left[ M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} \right] = 0$  são as mesmas. A função  $I(x, y)$  que torna a equação 3.103 exata é denominada *fator integrante*.

Infelizmente não existe método para encontrar o fator integrante de uma dada equação. De qualquer maneira, para que 3.103 seja exata, deve satisfazer a condição de Euler:

$$\frac{\partial}{\partial y} [I(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} [I(x, y)N(x, y)]$$

ou seja,

$$M \frac{\partial I}{\partial y} + I \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial I}{\partial x} + I \frac{\partial N}{\partial x}$$

é a condição necessária e suficiente para que  $I(x, y)$  seja fator integrante de 3.96

### Exemplo 3.23 A equação

$$[xy + x^2 + 1] + x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

não é exata pois  $\frac{\partial M}{\partial y} = x$  e  $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ .

Um fator integrante da equação diferencial é  $I(x, y) = \frac{1}{x}$  (verifique).



**Exercícios 3.7**

1. Resolva a equação diferencial exata  $\left[y + x + \frac{1}{x}\right] + x \frac{dy}{dx} = 0$ .
2. Mostre que  $I(x, y) = \frac{1}{x^2}$  é um fator integrante da equação  $-ydx + (x - 2x^2 \tan y)dy = 0$ . Resolva a equação.

**3.11 Trajetórias ortogonais**

Um problema interessante é encontrar as trajetórias ortogonais de uma família de curvas e podemos usar equações diferenciais para determinar tais trajetórias.

Suponhamos que  $\varphi(x, y, c) = 0$  represente uma família de curvas no plano- $xy$ , uma *trajetória ortogonal* a esta família é uma curva que intercepta cada ponto da família num ângulo reto. Por exemplo, a trajetória ortogonal ao feixe de retas  $y = cx$  que passam na origem é qualquer circunferência centrada na origem. Analogamente, a família de circunferências  $x^2 + y^2 = c^2$  tem como trajetória ortogonal qualquer reta que passa pela origem. Exemplos menos diretos são obtidos via equações diferenciais:

Dada uma curva  $y = f(x)$  suave (derivável) em  $(a, b)$ , a equação da *reta tangente* à curva num ponto  $(x_0, y_0) \in (a, b)$  é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

onde,  $m = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)$  é o coeficiente angular da reta tangente. A equação da *reta normal* à curva no mesmo ponto  $(x_0, y_0)$  tem o coeficiente angular igual a  $(-\frac{1}{m})$ . Assim, dada a família de curvas  $\varphi(x, y, c) = 0$ , encontramos inicialmente o coeficiente angular  $\frac{dy}{dx}$  da reta tangente a algum elemento da família, no ponto arbitrário  $(x, y)$ , derivando  $\varphi$  em relação a  $x$ , isto é,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \quad (3.104)$$

A equação diferencial 3.104 tem como solução a família de curvas  $\varphi(x, y, c) = 0$ . Portanto, as trajetórias ortogonais de  $\varphi(x, y, c) = 0$  são as curvas soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \quad (3.105)$$

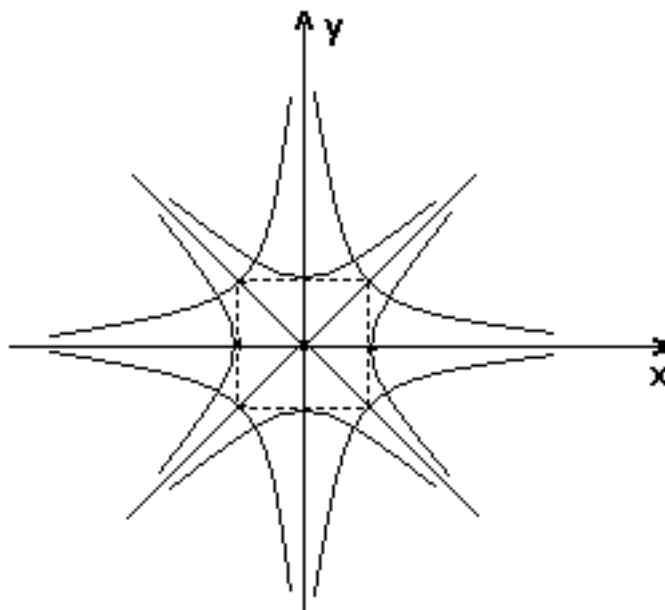


Figura 3.15: Hipérboles ortogonais

**Exemplo 3.24** Encontrar as trajetórias ortogonais à família de hipérboles  $xy = k$ , com  $k \neq 0$ .

Solução: Seja  $\varphi(x, y, c) = k - xy = 0$ , então

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\frac{-y}{-x} = -\frac{y}{x}$$

Logo, a família de trajetórias ortogonais será dada pela equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

ou seja,  $y^2 - x^2 = k$  que também é uma família de hipérboles.

**Exemplo 3.25** Encontrar as trajetórias ortogonais da família de elipses concêntricas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \quad (3.106)$$

**Solução:** Escrevemos a equação diferencial da família de elipses  $\varphi(x, y, c) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - c^2 = 0$  :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x}{y}$$

A equação diferencial das trajetórias ortogonais é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y}{x}$$

ou

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{dx}{x} \implies b^2 \ln |y| = a^2 \ln |x| + \ln c$$

Logo, as trajetórias ortogonais são as curvas

$$y^{b^2} = cx^{a^2}$$

Observe que se  $a = b$ , teremos em 3.106 uma família de circunferências concêntricas (centro na origem) e suas trajetórias ortogonais são as retas  $y = cx$ .

**Exercícios 3.8** Encontre as trajetórias ortogonais das circunferências:

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2$$

e das hipérboles:

$$y = c \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$



## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

*“O instrumento que permite aplainar a diferença entre teoria e prática, entre pensamento e experimento, é a Matemática”*

D. Hilbert

Uma EDO de ordem  $n$  é uma equação do tipo

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

ou, na forma normal

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

$y = \varphi(x)$  é uma solução da EDO, em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  se

$$F\left(x, \varphi, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \dots, \frac{d^n\varphi}{dx^n}\right) = 0.$$

A maior parte das equações de ordem superior não têm soluções analíticas, isto é, não existem regras ou métodos que permitam exibir suas soluções em termos de funções elementares, embora suas soluções existam e possam, quase sempre, ser determinadas por métodos numéricos. Nosso interesse aqui é estudar as equações que têm soluções analíticas o que reduz

drasticamente nosso estudo às equações lineares ou àquelas que podem ser transformadas em lineares.

Uma equação diferencial de *ordem n linear* é da forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)y = f(x) \quad (4.1)$$

com  $a_n(x) \neq 0$  no intervalo de interesse. Os zeros de  $a_n(x)$  são denominados *pontos singulares* da equação.

Se definirmos o operador  $L$  por:

$$L[y] = \left[ a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x) \right] [y] = f(x)$$

Temos que  $L$  é um operador diferencial

$$L = \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

e portanto, é *linear*, isto é,

$$L[\lambda y_1 + y_2] = \lambda L[y_1] + L[y_2]$$

Os argumentos utilizados para estudar as equações diferenciais lineares de ordem  $n$  são os mesmos, independentemente da ordem  $n$ . Assim, por simplicidade analisamos somente as equações de segunda ordem neste texto, ou seja,

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (4.2)$$

onde as funções coeficientes  $a_k(x)$  e  $f(x)$  serão **supostamente contínuas e de valores reais**, a menos que outra hipótese seja explicitada.

Observamos mais uma vez que a redução na ordem das equações lineares não atrapalha sua generalidade.

## 4.1 Princípio de superposição

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dita *homogênea* se  $f(x) \equiv 0$ , ou seja,

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (4.3)$$

Para as equações lineares homogêneas vale o **Princípio da superposição**:

Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação homogênea 4.3 em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , então a combinação linear

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

em que os  $C_i, i = 1, 2$ , são constantes arbitrárias, é também solução de 4.3.

De fato, Sejam  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  soluções de 4.3. Substituindo  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$  em 4.3, obtemos

$$\begin{aligned} & a_2(x) \left[ C_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right] + a_1(x) \left[ C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} \right] + a_0(x) [C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ = & C_1 \left[ a_2(x) \frac{d^2 y_1}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy_1}{dx} + a_0(x) y_1 \right] + C_2 \left[ a_2(x) \frac{d^2 y_2}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy_2}{dx} + a_0(x) y_2 \right] \\ = & C_1 \times 0 + C_2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

#### Observações:

a) Se  $y = \varphi(x)$  é uma solução da equação diferencial linear homogênea então  $y = K\varphi(x)$  também é solução ( $K$  constante qualquer):

b) A função identicamente nula  $y = 0$  é sempre solução de uma equação linear homogênea.

**Exercício 3.1** Dada a equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$$

mostre que  $y_1 = e^x$ ;  $y_2 = e^{-x}$ ;  $y_3 = 3e^x$ ;  $y_4 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$  são soluções da equação.

**Definição 2.** Dizemos que uma família de funções  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  é **linearmente dependente** em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , se existem constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  não todas nulas, tais que

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) = 0$$

A família de funções  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  é **linearmente independente** se

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) = 0 \implies C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

No caso de apenas duas funções  $\varphi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$ , elas são linearmente dependentes se existe uma constante  $C$  tal que

$$\varphi_1(x) = C \varphi_2(x) \iff \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = C$$

em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Exemplos 4.1** a)  $\varphi_1(x) = \sin x$  e  $\varphi_2(x) = \cos x$  são linearmente independentes em todo  $\mathbb{R}$ , pois  $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$  não é constante se  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $\varphi_1(x) = e^x$  e  $\varphi_2(x) = e^{-x}$  são linearmente independentes em todo  $\mathbb{R}$ , pois  $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq C$  se  $x \in \mathbb{R}$ .

c)  $\varphi_1(x) = \sin 2x$  e  $\varphi_2(x) = \cos x \sin x$  são linearmente dependentes em todo  $\mathbb{R}$ , pois  $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{\sin 2x}{\cos x \sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x \sin x} = 2$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definição 3.** Sejam  $y_1 = \varphi_1(x)$  e  $y_2 = \varphi_2(x)$  funções diferenciáveis em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , o determinante

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}$$

é chamado wronskiano das funções  $y_1$  e  $y_2$ .

**Teorema 1.** Sejam  $y_1 = \varphi_1(x)$  e  $y_2 = \varphi_2(x)$  funções diferenciáveis em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Se o wronskiano das funções  $y_1$  e  $y_2$  for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo  $I$  então as funções são linearmente independentes.

Equivalentemente: Se as funções  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente dependentes em  $I$  então  $W(y_1, y_2) = 0$  para todo  $x \in I$ .

**Prova:** Se as funções  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente dependentes em  $I$  então existe uma constante  $C$  tal que  $y_1 = Cy_2 \implies \frac{dy_1}{dx} = C \frac{dy_2}{dx}$ ; Logo,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda \frac{dy_2}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} = 0$$

A recíproca deste teorema não é verdadeira, isto é, podemos ter

$$W(y_1, y_2) = 0$$

e as funções  $y_1$  e  $y_2$  serem linearmente independentes em  $I$ .

Por exemplo, sejam  $y_1 = x^2$  e  $y_2 = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ , definidas em  $\mathbb{R}$ .

Assim, para  $x \geq 0$ ,  $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0$  e para  $x \leq 0$ ,  $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0$ .

Entretanto, as funções  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes em  $\mathbb{R}$  pois se  $C_1 x^2 + C_2 x|x| = 0$  para todo  $x \in (-\infty, +\infty)$  e, em particular para  $x = 1$  e  $x = -1$ , teremos  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \implies C_1 = C_2 = 0$ .



**Observação:** Em  $I = (-\infty, 0)$  ou em  $I = (0, +\infty)$  as funções são linearmente dependentes (verifique).

Para as soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem *homogênea* vale o seguinte resultado:

**Teorema 2.** *As soluções  $y_1$  e  $y_2$  da equação*

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

*são linearmente independentes em  $I$  se, e somente se,  $W(y_1, y_2) \neq 0$  para todo  $x \in I$ .*

**Prova:** Suponhamos primeiramente que  $W(y_1, y_2) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Então, pelo Teorema 1 segue que  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes.

Reciprocamente, se  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes, suponhamos que exista um ponto  $x_0 \in I$  tal que  $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ . Neste caso, existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  não nulas, tais que

$$C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0 \implies C_1\frac{dy_1}{dx}(x_0) + C_2\frac{dy_2}{dx}(x_0) = 0$$

Com tais constantes consideremos a função

$$\varphi(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

Como  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação diferencial 4.3 então, pelo princípio da superposição,  $\varphi(x)$  também é solução da equação. Ainda mais

$$\varphi(x_0) = 0 \text{ e } \frac{d\varphi}{dx}(x_0) = 0$$

Como  $\psi \equiv 0$  é uma solução de 4.3, segue da unicidade do Teorema que  $\varphi(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Logo,

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$$

ou seja,  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente dependentes, absurdo. Portanto,  $W(y_1, y_2)$  deve ser diferente de 0 para todo  $x \in I$ .

## 4.2 Teorema de existência e unicidade de soluções

Para uma equação diferencial linear de segunda ordem um problema de Cauchy ou de valor inicial é

$$\begin{cases} \text{Resolver:} & a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \\ \text{Satisfazendo:} & y_0 = y(x_0) \text{ e } \frac{dy}{dx}(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

**Teorema 3 (Existência e unicidade de soluções).** *Sejam  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  e  $f(x)$ , do problema (4.4), funções contínuas em um intervalo  $I$  da reta  $\mathbb{R}$ , com  $a_2(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Se  $x_0$  é algum ponto deste intervalo  $I$ , então existe uma única solução  $y = \varphi(x)$  para o problema de valor inicial (4.4).*

**Exemplo 4.2** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 2x \\ y(0) = 1 \text{ e } \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Verifique se a função  $y = \varphi(x) = \frac{5}{8}e^{2x} + \frac{3}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}x$  é a única solução do problema de valor inicial 4.5.

**Solução:** Substituindo  $\varphi(x)$  na equação de 4.5, temos

$$\left[ \frac{20}{8}e^{2x} + \frac{12}{8}e^{-2x} \right] - 4 \left[ \frac{5}{8}e^{2x} + \frac{3}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}x \right] = 2x$$

ou seja,  $\varphi(x)$  satisfaz a equação. Agora, como a equação é linear e as funções  $a_2(x) = 1$ ;  $a_1(x) = 0$ ;  $a_0(x) = -4$  e  $f(x) = 2x$  são contínuas para todo  $x \in \mathbb{R}$ , com  $a_2(x) = 1 \neq 0$  em  $\mathbb{R}$ , o Teorema 4.2 garante que  $\varphi(x) = \frac{5}{8}e^{2x} + \frac{3}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}x$  é a única solução do problema de valor inicial 4.5.

**Exemplo 4.3** Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 6 \\ y(0) = 3; \frac{dy}{dx}(0) = 1 \end{cases}$$

$y = \varphi(x) = kx^2 + x + 3$  é solução do problema (verifique). Neste caso, existem infinitas soluções dependendo do valor do parâmetro  $k \in (-\infty, +\infty)$  - Isto ocorre porque o coeficiente  $a_2(x) = x^2$  se anula no ponto  $x_0 = 0$ , não satisfazendo portanto, uma condição do teorema de existência e unicidade (Teorema 3).

### 4.3 Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Dentre as equações diferenciais lineares, as mais simples são as *homogêneas com coeficientes constantes*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (4.6)$$

Uma *base de soluções* de 4.6 é um par de funções  $y_1$  e  $y_2$ , soluções de 4.6, que são linearmente independentes em  $I$ .

**Teorema 4.** *Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções de (4.6), linearmente independentes em  $I$  então, toda solução  $y = \varphi(x)$  de (4.6) é uma combinação linear de  $y_1$  e  $y_2$ , isto é*

$$y = \varphi(x) = C_1y_1 + C_2y_2 \quad (4.7)$$

**Prova:** Queremos mostrar que 4.7 é a forma geral de qualquer solução de 4.6.

Seja  $y = \psi(x)$  uma solução de 4.6 e seja  $x = x_0$  um ponto do intervalo  $I$  para o qual  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ ; Suponhamos ainda que

$$\psi(x_0) = \psi_0; \quad \psi'(x_0) = \psi'_0. \quad (4.8)$$

Vamos provar que existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  tais que a solução  $y = \varphi(x) = C_1y_1 + C_2y_2$  satisfaz as mesmas condições iniciais 4.8 de  $\psi$  e assim,  $\psi \equiv \varphi$  pelo Teorema 4.3 (TEU). Para que isto aconteça devemos ter

$$\begin{aligned} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) &= \psi_0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) &= \psi'_0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

O sistema 4.9, nas incógnitas  $C_1$  e  $C_2$ , tem solução desde que

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} (x_0) = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$$

#### Solução geral da equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes

Vimos no Capítulo anterior que  $y = e^{ax}$  é solução da equação linear de primeira ordem  $\frac{dy}{dx} - ay = 0$ . Para as equações de segunda ordem vamos procurar também soluções do tipo  $y = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Suponhamos que  $y = e^{\lambda x}$  seja uma solução da equação 4.6

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$$

Então  $y = e^{\lambda x}$  deve satisfazer a equação 4.6, ou seja,

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \implies e^{\lambda x} [\lambda^2 + a \lambda + b] = 0 \implies \lambda^2 + a \lambda + b = 0$$

O polinômio  $P(\lambda) = \lambda^2 + a \lambda + b$  é denominado *polinômio característico* da equação 4.6 e suas raízes são dadas por

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Dependendo do valor do discriminante  $\Delta = a^2 - 4b$ , as raízes do polinômio característico podem ser:

- reais distintas se  $\Delta = a^2 - 4b > 0$ ;
- reais iguais se  $\Delta = a^2 - 4b = 0$ ;
- complexas conjugadas se  $\Delta = a^2 - 4b < 0$ .

**Caso 1:**  $\Delta = a^2 - 4b > 0 \implies$  as raízes são reais e distintas  $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \neq \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ .

Neste caso, as soluções  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  e  $y_2 = e^{\lambda_2 x}$  são linearmente independentes ( $\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq C$ ). Logo, a solução geral de 4.6 é dada por:

$$y = \varphi(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (4.10)$$

#### Exemplo 4.4

a) Encontrar a solução geral da equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

b) Encontrar a solução particular que satisfaz a condição inicial

$$y(1) = 0 ; y'(1) = 1$$

**Solução:**

a) O polinômio característico da equação é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$e, \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} .$$

### 4.3 Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Logo, a solução geral é

$$y = \varphi(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

b) Como  $y(1) = 0 \implies 0 = C_1 e^3 + C_2 e^2$ ;

Como  $y'(1) = 1 \implies 1 = 3C_1 e^3 + 2C_2 e^2$ .

Resolvendo o sistema, encontramos os valores  $C_1 = \frac{1}{e^3} = e^{-3}$  e  $C_2 = -\frac{1}{e^2} = -e^{-2}$ . Portanto, a solução particular que satisfaz as condições iniciais é dada por:

$$y_p = \varphi_p(x) = e^{-3} e^{3x} - e^{-2} e^{2x}$$

**Caso 2:**  $\Delta = a^2 - 4b = 0 \implies$  as raízes são reais e iguais,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{a}{2}$ . Assim, obtivemos somente uma solução. Para encontrar outra solução  $y_2$ , linearmente independente de  $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ , vamos supor que  $y_2 = u(x)y_1$ . Substituindo na equação 4.6, obtemos

$$[u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''] + a[uy_1' + u'y_1] + buy_1 = 0$$

Separando os termos desta equação, temos

$$u[y_1'' + ay_1' + by_1] + [u''y_1 + 2u'y_1' + au'y_1] = 0$$

Como  $y_1$  é solução da EDO, o primeiro termo é nulo, logo resta

$$u''y_1 + 2u'y_1' + au'y_1 = 0$$

Considerando agora a função  $g(x) = \frac{du}{dx} \iff u(x) = \int g(x)dx$ , reduzimos a ordem da equação anterior, ou seja,

$$y_1 \frac{dg}{dx} + 2g \frac{dy_1}{dx} + agy_1 = 0$$

Substituindo o valor de  $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$  nesta equação vem:

$$e^{-\frac{a}{2}x} \frac{dg}{dx} + 2g \left(-\frac{a}{2}\right) e^{-\frac{a}{2}x} + age^{-\frac{a}{2}x} = 0 \implies e^{-\frac{a}{2}x} \frac{dg}{dx} = 0 \implies \frac{dg}{dx} = 0$$

Portanto,  $g(x) = \frac{du}{dx} = C$  (constante arbitrária). Tomando pois  $C = 1$ , obtemos  $u(x) = x$ .

Desta forma, obtivemos a solução  $y_2 = xy_1 = xe^{-\frac{a}{2}x}$ , linearmente independente de  $y_1$ .

Portanto, a solução geral da EDO 4.6, quando  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ , é

$$y = \varphi(x) = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x} = e^{-\frac{a}{2}x} (C_1 + C_2 x) \quad (4.11)$$

**Exemplo 4.5** Resolver a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

Solução: As raízes do polinômio característico são obtidas da equação

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Neste caso, as raízes são iguais:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$  e, portanto, a solução geral será:

$$y = \varphi(x) = e^{3x} (C_1 + C_2x)$$

**Caso 3:**  $\Delta = a^2 - 4b < 0 \implies$  as raízes são complexas conjugadas,  $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$  e  $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}i$ ; ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Considerando os valores reais  $\alpha = -\frac{a}{2}$  e  $\beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ , teremos  $\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + \beta i \\ \lambda_2 = \alpha - \beta i \end{cases}$

Formalmente, teríamos a solução geral dada por uma função complexa

$$y = \varphi(x) = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} [C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x}] \quad (4.12)$$

Na prática, é preferível trabalhar com soluções reais e, neste caso, para obtê-las devemos utilizar a **fórmula de Euler**:

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Aplicando a fórmula de Euler na expressão 4.12, obtemos:

$$y = \varphi(x) = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \sin \beta x] = e^{\alpha x} [K_1 \cos \beta x + iK_2 \sin \beta x]$$

Consideremos as funções reais (parte real e parte imaginária de  $\varphi(x)$ )

$$\begin{aligned} u(x) &= K_1 e^{\alpha x} \cos \beta x \\ v(x) &= K_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

**Proposição 4.**  $u(x), v(x)$  são soluções de 4.6, linearmente independentes.

De fato: Como  $y = u(x) + iv(x)$  é solução de 4.6, então

$$\left[ \frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{du}{dx} + bu \right] + i \left[ \frac{d^2v}{dx^2} + a\frac{dv}{dx} + bv \right] = 0$$

Portanto,  $\left[ \frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{du}{dx} + bu \right] = 0$  e  $\left[ \frac{d^2v}{dx^2} + a\frac{dv}{dx} + bv \right] = 0$  pois um número complexo é zero se, e somente se, suas partes real e imaginária são nulas. Logo,  $u(x)$  e  $v(x)$  satisfazem a equação 4.6. Ainda, é fácil verificar que  $u(x)$  e  $v(x)$  são linearmente independentes em  $\mathbb{R}$  (verifique!).

Desta forma, podemos afirmar que a solução geral real de 4.6, quando  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , é dada por:

$$y = \varphi(x) = e^{\alpha x} [K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x] \quad (4.13)$$

**Exemplo 4.6** Encontrar a solução geral (real) da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Solução: O polinômio característico  $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 3$  tem raízes complexas  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}i$ .

As soluções complexas são

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(-\frac{1}{2} + \sqrt{2}i)x} = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \cos \sqrt{2}x + i \sin \sqrt{2}x \right] \\ y_2 &= e^{(-\frac{1}{2} - \sqrt{2}i)x} = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \cos \sqrt{2}x - i \sin \sqrt{2}x \right] \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\frac{1}{2}x} \cos \sqrt{2}x \\ v(x) &= e^{-\frac{1}{2}x} \sin \sqrt{2}x \end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes em  $\mathbb{R}$ , e então podemos considerar a solução geral real, dada por:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x \right]$$

## 4.4 Solução geral da equação diferencial linear não-homogênea com coeficientes constantes

Consideremos a equação linear de segunda ordem não-homogênea, com coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x) \tag{4.14}$$

onde, a função  $f(x)$  é contínua em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . A solução geral desta equação é obtida do seguinte resultado:

**Teorema 5.** *Sejam  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  duas soluções linearmente independentes da equação homogênea*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{4.15}$$

*e seja  $y_p(x)$  qualquer solução da equação não-homogênea 4.14. Então, toda solução de 4.14 é da forma*

$$y(x) = \varphi(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x) \tag{4.16}$$

**Prova:** Vamos mostrar inicialmente que a diferença de duas soluções quaisquer da equação não-homogênea 4.14 é uma solução da equação homogênea 4.15

De fato, sejam  $\psi_1$  e  $\psi_2$  soluções de 4.14; Aplicando a função diferença  $g(x) = [\psi_1 - \psi_2]$  em 4.15, vem

$$\left[ \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + a \frac{d\psi_1}{dx} + b\psi_1 \right] - \left[ \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + a \frac{d\psi_2}{dx} + b\psi_2 \right] = f(x) - f(x) = 0$$

Logo,  $g(x) = [\psi_1 - \psi_2]$  é solução da equação homogênea 4.15.

Seja  $y = \varphi(x)$  uma solução qualquer de 4.14 e  $y_p(x)$  uma solução particular de 4.14, então a função  $g(x) = \varphi(x) - y_p(x)$  deve ser uma solução da equação homogênea 4.15, e portanto, se  $g(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \implies$

$$\varphi(x) = g(x) + y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x)$$

**Exemplo 4.7** Resolver a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2x$$

Solução: Vamos determinar inicialmente a solução geral da equação homogênea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

A equação característica  $\lambda^2 + 1 = 0$  tem como raízes os valores  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = -i$ . Logo, a solução geral da equação homogênea é

$$y = \varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Por outro lado,  $y_p(x) = 2x$  é uma solução da equação não-homogênea (verifique!)- Então, a solução geral é

$$y = \varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x$$

**Exemplo 4.8** Sabendo-se que  $y_1(x) = x$ ;  $y_2(x) = x + e^{-x}$  e  $y_3(x) = 3 + x + e^{-x}$  são três soluções de uma equação linear não-homogênea de segunda ordem, determine a solução geral desta equação.

Solução: Sabemos que a diferença de duas soluções de uma equação não-homogênea é solução da equação homogênea associada (vide demonstração do Teorema 3.6);

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= y_2(x) - y_1(x) = e^{-x} \\ \varphi_2(x) &= y_3(x) - y_2(x) = 3 \end{aligned}$$



Como,  $\varphi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$  são linearmente independentes, então  $\varphi(x) = C_1e^{-x} + C_2$  é a solução geral da equação homogênea. Portanto, a solução geral da não-homogênea é dada por:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2 + x$$

Exemplos práticos de aplicações das equações lineares com coeficientes constantes são os modelos de oscilações mecânicas e de circuitos elétricos (veja Modelos 8 e 9).

Vimos que a solução geral da equação 4.14 é dada pela soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular de 4.14, isto é,

$$\varphi(x) = g(x) + y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x)$$

Neste caso, o problema maior é encontrar uma solução particular  $y_p(x)$ . Isto pode ser facilitado quando a função  $f(x)$  for um polinômio, uma função exponencial  $e^{ax}$  ou trigonométricas simples:  $\sin \alpha x$  ou  $\cos \alpha x$ , ou composições destas funções.

Vamos resolver, por dois métodos distintos, a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

## Método dos coeficientes indeterminados

### (método do “chutômetro”)

Procuraremos soluções particulares que têm a ”mesma cara” que a função  $f(x)$ . Assim,

- o Se  $f(x)$  é um polinômio de grau  $n$ , tomamos  $y_p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  :
  - o Se  $f(x) = \beta e^{ax}$ , consideramos  $y_p(x) = be^{ax}$  (se  $a \neq \lambda_i, i = 1, 2$  raízes do polinômio característico da homogênea) e  $y_p(x) = b_1e^{ax} + b_2xe^{ax}$  (se  $a = \lambda_i$ );
  - o Se  $f(x) = \beta \cos \alpha x$  ou  $\beta \sin \alpha x \implies y_p(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ .
- Em qualquer caso devemos determinar os coeficientes de  $y_p(x)$ .

**Exemplo 4.9** Resolva a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = k$$

Solução: O primeiro passo é encontrar a solução da homogênea associada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \iff \lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

A solução geral da homogênea é dada por:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right]$$

Neste caso simples, uma equação particular da não-homogênea é dada por  $y_p(x) = k$  (verifique) e portanto, sua solução geral é

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right] + k$$

**Exemplo 4.10** Resolva a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 2e^{-x}$$

Solução: Consideremos como solução particular  $y_p(x) = be^{ax} \implies \frac{dy_p(x)}{dx} = abe^{ax} \implies \frac{d^2y_p(x)}{dx^2} = a^2be^{ax}$ . Substituindo estes valores na equação, obtemos;

$$a^2be^{ax} + abe^{ax} + be^{ax} = be^{ax} [a^2 + a + 1] = 2e^{-x}$$

Para se ter esta igualdade tomamos  $a = -1$  e  $b = 2$ . A solução geral é

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right] + 2e^{-x}$$

**Exemplo 4.11** Resolva a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 2 \cos x$$

Solução: Neste caso consideramos como solução particular

$$\begin{aligned} y_p(x) = (A \cos x + B \sin x) &\implies \frac{dy_p(x)}{dx} = (-A \sin x + B \cos x) \\ &\implies (-A \sin x + B \cos x) = 2 \cos x \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação, obtemos

$$\begin{aligned} (-A \cos x - B \sin x) + (-A \sin x + B \cos x) + (A \cos x + B \sin x) &= 2 \cos x \\ \implies (-A \sin x + B \cos x) &= 2 \cos x \end{aligned}$$

Então, basta tomar  $A = 0$  e  $B = 2$ ; A solução geral será:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right] + 2 \cos x$$

**Exemplo 4.12** Resolva a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 - 2x + 1$$

Solução: A equação característica  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  tem como raízes os valores:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  e, portanto, a solução geral da homogênea associada é

$$\varphi(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

Consideremos a solução particular da forma:  $y_p(x) = (ax^2 + bx + c) \implies \frac{dy_p(x)}{dx} = (2ax + b) \implies \frac{dy_p^2(x)}{dx^2} = 2a$ . Substituindo na equação não homogênea, vem

$$\begin{aligned} 2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) &= x^2 - 2x + 1 \\ 4ax^2 + (-8a + 4b)x + (2a - 4b + 4c) &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4a=1 \\ -8a+4b=-2 \\ 2a-4b+4c=1 \end{cases}$$

Logo,  $a = \frac{1}{4}$ ;  $b = 0$  e  $c = \frac{1}{8} \implies y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}$  e a solução geral será

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}$$

Observamos que nos exemplos anteriores, a solução particular tem a mesma característica da função  $f(x)$ . Este fato nem sempre deve acontecer em casos mais gerais.

## Método da variação de parâmetros

Suponhamos que

$$\varphi(x) = C_1y_1 + C_2y_2$$

seja a solução geral da equação homogênea associada à equação 4.14. O método de variação de parâmetros consiste em procurar uma solução particular da forma

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \tag{4.17}$$

com alguma liberdade para escolher as funções  $u(x)$  e  $v(x)$ . Nosso objetivo é tornar o método tão simples quanto possível.

Calculando

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = u \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{du}{dx} + v \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dv}{dx} = \left[ u \frac{dy_1}{dx} + v \frac{dy_2}{dx} \right] + \left[ y_1 \frac{du}{dx} + y_2 \frac{dv}{dx} \right]$$

vemos que  $\frac{dy_p^2(x)}{dx^2}$  não conterà derivadas de segunda ordem de  $u(x)$  e  $v(x)$  se

$$\left[ y_1 \frac{du}{dx} + y_2 \frac{dv}{dx} \right] = 0 \quad (4.18)$$

Vamos então impor a equação 4.18 como uma condição sôbre as funções  $u(x)$  e  $v(x)$ . Neste caso, calculando  $\frac{dy_p^2(x)}{dx^2}$ , obtemos

$$\frac{dy_p^2(x)}{dx^2} = u \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{du}{dx} \frac{dy_1}{dx} + v \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{dy_2}{dx} \quad (4.19)$$

Substituindo os valores 4.17, 4.18 e 4.19 na equação não homogênea 4.14, obtemos

$$\left[ u \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{du}{dx} \frac{dy_1}{dx} + v \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{dy_2}{dx} \right] + a \left[ u \frac{dy_1}{dx} + v \frac{dy_2}{dx} \right] + b [uy_1 + vy_2] = f(x)$$

$\implies$

$$u \left[ \frac{d^2 y_1}{dx^2} + a \frac{dy_1}{dx} + by_1 \right] + v \left[ \frac{d^2 y_2}{dx^2} + a \frac{dy_2}{dx} + by_2 \right] + \left[ \frac{du}{dx} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{dy_2}{dx} \right] = f(x)$$

Os dois primeiros colchetes são nulos pois  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação homogênea. Então, temos

$$\left[ \frac{du}{dx} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{dy_2}{dx} \right] = f(x) \quad (4.20)$$

Consequentemente,  $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$  é uma solução da equação não-homogênea se  $u(x)$  e  $v(x)$  satisfizerem o sistema

$$\begin{cases} y_1 \frac{du}{dx} + y_2 \frac{dv}{dx} = 0 \\ \frac{du}{dx} \frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{dy_2}{dx} = f(x) \end{cases} \quad (4.21)$$

Multiplicando a primeira equação por  $\frac{dy_1}{dx}$ , a segunda por  $y_1$  e subtraindo-as, obtemos

$$\left[ y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right] \frac{dv}{dx} = y_1 f(x) \implies \frac{dv}{dx} = \frac{y_1 f(x)}{\left[ y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right]}$$

E, portanto,

$$v(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} dx = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad (4.22)$$

Da mesma forma obtemos

$$u(x) = \int \frac{-y_2 f(x)}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} dx = \int \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad (4.23)$$

**Exemplo 4.13** Encontrar uma solução particular, pelo método de variação de parâmetros, da equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 2 \cos x$$

Solução: Como vimos no Exemplo 4.11, a solução da homogênea associada é

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right]$$

com  $y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$  e  $y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$

A solução particular deve ser da forma

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

onde,

$$v(x) = \int \frac{\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{bmatrix} 2 \cos x}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} dx = 2 \int e^{\frac{1}{2}x} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \cos x dx$$

Analogamente,

$$u(x) = \int \frac{-\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{bmatrix} 2 \cos x}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} dx = -2 \int e^{\frac{1}{2}x} \left( \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \cos x dx$$

Observamos que, neste exemplo, a resolução pelo método de variação de parâmetros é muito mais complicada que o método do "chutômetro".

**Exemplo 4.14** Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + y = \tan x \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

no intervalo  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

Solução: A solução geral da homogênea associada é (verifique)

$$\varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

A solução particular  $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$  é obtida quando

$$v(x) = \int \frac{\cos x \tan x}{W(\sin x, \cos x)} dx = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$u(x) = - \int \sin x \tan x dx = - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \sin x - \ln |\sec x + \tan x|$$

Logo,

$$y_p(x) = \cos x [\sin x - \ln |\sec x + \tan x|] + \sin x [-\cos x] = -\cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

E a solução geral é

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

Agora, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são determinadas pelas condições iniciais

$y(0) = 1 = C_1$  e  $\frac{dy}{dx}(0) = 1 = C_2 - 1 \implies C_2 = 2$ . Daí, a solução do problema é

$$y(x) = \cos x + 2 \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

Como pretendemos que neste texto tenha apenas o conteúdo básico e simples das equações diferenciais, achamos por bem não incluir as equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes variáveis. O leitor interessado poderá encontrá-las facilmente em outros livros de EDO, por exemplo em [2 e 5].

### Modelo 10- Sistemas mecânicos (Oscilador harmônico amortecido)

Sistemas mecânicos, dados na forma de osciladores harmônicos amortecidos, são encontrados com muita frequência na prática: amortecedores de carros, balanço de pontes, vibrações de motores elétricos etc. Um sistema mecânico consiste essencialmente de um corpo que se movimenta sujeito às forças externas.



Consideremos um corpo de massa  $m$  sobre o qual age uma força  $f$  a cada instante  $t$ . A 2ª Lei de Newton estabelece a relação entre a *aceleração* (variação da velocidade) do corpo e a resultante  $F$  de todas as forças aplicadas sobre ele, no mesmo instante, isto é,

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = F \tag{4.24}$$

Para caracterizar um movimento específico é necessário que se tenha o ponto de partida  $x_0 = x(t_0)$  e sua velocidade inicial  $v_0 = \left( \frac{dx}{dt} \right) (t_0)$ . Estas condições podem ser reunidas no problema de Cauchy:

$$\begin{cases} m \frac{dx^2}{dt^2} = F \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) \\ x(t_0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{4.25}$$

As dificuldades na resolução de (4.25) dependem do tipo de função  $F(x, v, t)$  que aparece na equação. Uma situação física de grande interesse é o *problema das vibrações mecânicas* onde  $F$  é uma função relativamente simples. Vamos analisar o comportamento de uma partícula de massa  $m$ , constante, restrita ao movimento sobre uma reta e sob a ação de três tipos de forças:

$F_1(t) = kx(t)$ , é uma força elástica que tende a restaurar a posição de equilíbrio em  $x = 0$ , agindo sempre no sentido oposto ao deslocamento ( $k > 0$  é o *coeficiente de elasticidade*);

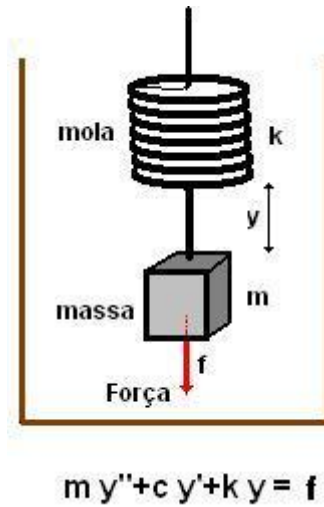


Figura 4.1: Esquema de um oscilador harmônico amortecido

$F_2(t) = -c \frac{dx}{dt}$ , com  $c > 0$ , é a força provocada pela resistência ao movimento do corpo (ou partícula) mergulhado em um meio viscoso;

$F_3(t) = f(t)$  é uma força externa conhecida e dependente do tempo.

A composição (soma) destas forças é dada por:

$$F(t) = -kx - c \frac{dx}{dt} + f(t) \quad (4.26)$$

As vibrações mecânicas, sujeitas a estas 3 forças podem ser representadas na fig. 4.1 :

Assim, a segunda Lei de Newton fornece a equação

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (4.27)$$

que é denominada **modelo clássico de um oscilador harmônico amortecido** e tem sido de grande importância nas aplicações em Engenharia e na Física, sendo um paradigma para o desenvolvimento inicial da Física Atômica.

Consideremos inicialmente que  $f(t) = 0$  (não há força externa agindo sobre o sistema) em 4.27:

O polinômio característico da equação homogênea é dado por

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

cujas raízes são



$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Temos 3 casos distintos em relação aos valores dos parâmetros  $c$ ,  $m$  e  $k$ :  
 a) Se  $c^2 > 4mk$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e distintos e *negativos*. Portanto,

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Assim, quando o coeficiente de viscosidade  $c$  é suficientemente grande então o movimento é *superamortecido*.

b) Se  $c^2 = 4mk \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} < 0$  e

$$x(t) = Ae^{-\frac{c}{2m}t} + Bte^{-\frac{c}{2m}t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

Neste caso o amortecimento é mais lento (*amortecimento crítico*).

c)  $c^2 < 4mk \Rightarrow \lambda_1 = \alpha + \beta i$  e  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ , com  $\alpha = \frac{-c}{2m} < 0$ . Então,

$$x(t) = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Neste caso, o movimento é dito *subamortecido*.

Um modelo particular de interesse de oscilações harmônicas é quando a força externa  $f(t)$  é periódica com período  $\frac{2\pi}{w_0}$ , não existe amortecedor ( $c = 0$ ) e  $f(t) = F \cos w_0 t$ , com  $F$  constante. Com estas hipóteses a equação 4.27 é escrita como:

$$\frac{dx^2}{dt^2} + w_0^2 = F \cos w_0 t \quad (4.28)$$

A solução geral de (4.28) é dada por

$$x(t) = (A \cos w_0 t + B \sin w_0 t) + \frac{F}{2w_0} t \sin w_0 t \quad (\text{verifique!}) \quad (4.29)$$

O primeiro termo da solução (4.29) é uma função periódica e portanto limitada para todo  $t$ . Entretanto, quando  $t \rightarrow +\infty$ , o 2º termo de (4.29) oscila entre  $+\infty$  e  $-\infty$ . Este fenômeno é conhecido como *ressonância*. Pontes, carros, navios, motores, etc, são sistemas vibratórios e uma força periódica externa, com a mesma frequência que sua frequência natural, pode causar muitos estragos. Este é o motivo pelo qual uma tropa de soldados não passa marchando sobre uma ponte.

O fenômeno de ressonância pode, entretanto, ser muito útil em determinadas situações como arrancar árvores, aumentar o volume de um rádio, jogar “cabo-de-guerra”, tirar um carro de um atoleiro etc.

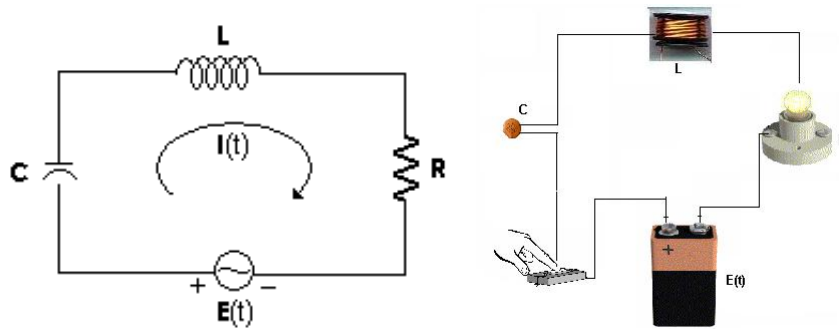


Figura 4.2: Circuito elétrico e seus componentes

### Modelo 11 - Circuitos Elétricos RLC

Um circuito elétrico RLC, esquematizado na fig. 4.2, contém os seguintes dispositivos:  $R$  (resistores),  $C$  (capacitores) e  $L$  (indutores) - Um circuito elétrico é uma sequência fechada de dispositivos conectados.

Os elementos relacionados no circuito elétrico, também chamadas *dipolos*, possuem duas extremidades que são conectadas com outros dipolos - As medidas importantes na descrição do estado de cada dipolo são:

a) *Corrente elétrica*:  $I_{ab}(t)$  que passa do ponto  $a$  para o ponto  $b$ . A Corrente elétrica é a manifestação da eletricidade - ela mede o *fluxo de carga* (variação positiva da carga) por unidade de tempo:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \quad (4.30)$$

b) *Queda de tensão*:  $V_{ab}(t)$  entre dois pontos  $a$  e  $b$  do circuito - A queda de tensão é a *diferença de potencial* entre os pontos  $a$  e  $b$ :

$$V_{ab}(t) = V_a(t) - V_b(t) \quad (4.31)$$

Agora, para cada tipo de dipolo existe uma relação entre a corrente e a queda de tensão:

- Lei de Ohm: “A queda de tensão em um resistor é proporcional à corrente que passa por ele”

$$V_{ab}(t) = RI_{ab}(t) \quad (4.32)$$

A constante positiva  $R$  é a *resistência*;

- Lei de Henry: “A queda de tensão em um indutor é proporcional à variação da corrente que passa por ele”

$$V_{cd}(t) = L \frac{dI_{cd}(t)}{dt} \quad (4.33)$$

A constante positiva  $L$  é a *indutância*;

• “A carga acumulada por um capacitor é proporcional à diferença de potencial entre seus polos”

$$q_{ef}(t) = cV_{ef}(t) \quad (4.34)$$

A constante positiva  $c$  é a *capacitância*.

Da equação (4.34), vem que

$$q_{ef}(t) = \int_{t_0}^t I_{ef}(t) dt = cV_{ef}(t)$$

ou

$$I_{ef}(t) = c \frac{dV_{ef}(t)}{dt}, \quad \text{com } V_{ef}(t_0) = 0 \quad (4.35)$$

A *Lei das malhas* estabelece que num circuito fechado “a soma das quedas de tensões é nula”, isto é,

$$V_{ab}(t) + V_{cd}(t) + V_{ef}(t) + V_{gh}(t) = 0$$

onde,

$$V_{gh}(t) = -E(t)$$

Logo,

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{c} \int_{t_0}^t I dt - E(t) = 0 \quad (4.36)$$

Derivando (4.36) em relação a  $t$ , obtemos o modelo que fornece a corrente  $I(t)$  em cada instante  $t$ :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{c} I = \frac{dE}{dt} \quad (4.37)$$

Este modelo é análogo ao do oscilador harmônico para vibrações mecânicas (equação (4.27)), existindo uma equivalência mecânica-elétrica entre eles.

$$\begin{aligned}L &\leftrightarrow m \\R &\leftrightarrow c \\ \frac{1}{c} &\leftrightarrow k \\ \frac{dE}{dt} &\leftrightarrow f(t)\end{aligned}$$

Esta equivalência ou analogia permite construir circuitos elétricos ajustáveis de tal forma que possam simular uma vibração mecânica – Este é o princípio de funcionamento dos computadores analógicos.

**Exercícios 4.2** Resolva as equações usando os métodos do "chutômetro" e variações dos parâmetros;

1)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + ky = 0$ ;

Encontre condições sobre o valor de  $k$  para que a solução geral da equação seja assintoticamente estável.

2)  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2 \sin x$ ;

3)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = k$ ;

## SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

*“De que irei me ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?”*

Cauchy

*“Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito”*

Fenellon

Um sistema de equações diferenciais de ordem  $n$  são  $n$  equações de primeira ordem, simultâneas, em várias variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_3}{dt} = f_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \hline \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Uma solução de 5.1 são  $n$  funções  $x_j = \varphi_j(t); j = 1, 2, \dots, n$  tais que

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad j = 1, 2, \dots, n$$

**Exemplo 5.1** Dado o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$$

temos que  $x_1(t) = t$ ;  $x_2(t) = t^2$  e  $x_3(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$  é uma solução do sistema pois satisfazem as três equações simultâneas.

Além de importantes aplicações dos sistemas de EDO, temos algumas motivações teóricas que, por si só, poderiam ser a motivação deste capítulo. A principal delas é a possibilidade de transformar qualquer equação diferencial explícita de ordem  $n$ ,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

em um sistema de  $n$  equações de primeira ordem. Para isto, basta considerarmos

$$y_1 = y; \quad y_2 = \frac{dy}{dx}; \quad \dots; \quad y_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

e, teremos

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (5.2)$$

Uma maneira simplificada de escrever o sistema 5.2 é na forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y}) \quad (5.3)$$

onde,

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ - \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ - \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{Y}) \\ f_2(t, \mathbf{Y}) \\ - \\ f_n(t, \mathbf{Y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ - \\ F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Um sistema de equações diferenciais é linear de ordem  $n$  se cada função  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  do sistema 5.4 é linear, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (5.5)$$

Na forma vetorial, teremos

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx} \\ \frac{dx_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

ou

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} \quad (5.7)$$

onde,  $A$  é a matriz dos coeficientes.

Nosso objetivo neste texto é somente introduzir o estudo de sistemas diferenciais que poderão ser vistos posteriormente com mais detalhes. Aqui estamos interessados apenas nos sistemas lineares de ordem 2.

## 5.1 Sistemas de duas equações de primeira ordem

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (5.8)$$

O sistema 5.8 é dito linear de segunda ordem pois pode ser reduzido à uma única equação linear de segunda ordem em  $x(t)$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \beta \frac{dx}{dt} + \alpha x = 0, \quad (5.9)$$

onde,

$$\begin{aligned} \beta &= a_{11} + a_{22} \\ \alpha &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \quad (5.10)$$

De fato, se derivarmos a primeira equação de 5.8 , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_{11} \frac{dx}{dt} + a_{12} \frac{dy}{dt}$$

Agora, substituindo os valores de  $\frac{dy}{dt}$  e de  $y$  (tirado da primeira equação de 5.8), vem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_{11} \frac{dx}{dt} + a_{12} \left[ a_{21}x + \frac{a_{22}}{a_{12}} \left( \frac{dx}{dt} - a_{11}x \right) \right] = (a_{11} + a_{22}) \frac{dx}{dt} + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) x$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = 0$$

Já vimos que sua solução geral é dada por

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \quad (5.11)$$

A quantidade  $\delta = \beta^2 - 4\alpha = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$  é denominada *discriminante*.

Observamos que o sistema 5.8, na forma vetorial, é dado por:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Da matriz dos coeficientes  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  podemos verificar que

$$\alpha = \det A \quad \text{e} \quad \beta = \text{traço de } A.$$

**Exemplo 5.2** Encontrar a solução geral do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases} \iff \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Solução:** O sistema linear pode ser transformado numa equação linear de segundo grau

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2 = 0$$

pois, neste caso,  $\beta = 0$  e  $\alpha = -2$ .

as raízes do polinômio característico são  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ . portanto, a solução geral do sistema é

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

Agora, da primeira equação do sistema tiramos o valor de  $y(t) = \frac{dx}{dt} - x$ , ou seja,

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[ \sqrt{2}C_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}C_2 e^{-\sqrt{2}t} \right] - \left[ C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t} \right] \\ &= (\sqrt{2}C_1 - C_1) e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}C_2 + C_2) e^{-\sqrt{2}t} \end{aligned}$$



**Exemplo 5.3** O sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases} \iff \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é equivalente à equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x - 1 = 0$$

cuja solução é:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1$$

Observamos que  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$  é uma solução particular do sistema. Agora, substituindo a expressão de  $x(t)$  na segunda equação do sistema, obtemos a solução  $y(t)$ :

$$\frac{dy}{dt} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \implies y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + K$$

Assim, a solução geral do sistema é (verifique):

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1 \\ y(t) &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1 \end{aligned}$$

**Proposição 6.** *Considere o sistema geral de equações diferenciais lineares de segunda ordem:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \iff \frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Então, o polinômio característico da equação de segundo grau correspondente é dado pelo determinante

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = [(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}] = 0$$

ou seja,

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

donde,

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ (a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right] \quad (5.13)$$

**Exemplo 5.4** Encontrar a solução geral do sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y\end{aligned}$$

**Solução:** As raízes do polinômio característico da equação de segundo grau correspondente são obtidas de

$$P(\lambda) = [(1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 10] = 0$$

o que nos dá  $\lambda_1 = 3i$  e  $\lambda_2 = -3i$ .

A solução geral real é dada por (verifique):

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t \\ y(t) &= -\frac{(3C_2 - C_1)}{5} \cos 3t + \frac{(3C_1 + C_2)}{5} \sin 3t\end{aligned}$$

## 5.2 Estudo qualitativo de sistemas lineares bidimensionais

Seja o sistema bidimensional linear autônomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (5.14)$$

onde os coeficientes são considerados constantes. Podemos observar que no ponto  $(0, 0)$  o sistema é estacionário, isto é,  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ . O ponto  $(0, 0)$  é denominado *ponto de equilíbrio* do sistema. Este ponto é obtido pela intersecção das *retas isóclinas*:

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x \\ y = -\frac{c}{d}x \end{cases}$$

Neste caso o ponto de equilíbrio é isolado, isto é, é o único ponto de equilíbrio de 5.14 se  $(ad - bc) \neq 0$ , pois o sistema

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

tem solução única  $x = 0$  e  $y = 0$  se  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ .

As raízes do polinômio característico associado

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

são dadas por

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

o Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e  $b \neq 0$ , a solução geral de 5.14 é dada por

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = C_1 \frac{\lambda_1 - a}{b} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\lambda_2 - a}{b} e^{\lambda_2 t}$$

Se  $b = 0$ , resolvemos diretamente a primeira equação do sistema e a substituímos na segunda.

o Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , a solução geral de 5.14 é dada por

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$$

$$y(t) = (B_1 + B_2 t) e^{\lambda t}$$

onde, entre cada duas constantes  $C_1, B_1$  e  $C_2, B_2$ , apenas uma é independente.

Desta forma, o estudo da natureza do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  fica restrito ao comportamento dos valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , mais especificamente de seus sinais. Assim,  $(0, 0)$  será:

1. **Estável**, se cada ponto  $(x(t), y(t))$  numa vizinhança de  $(0, 0)$  permanece limitado quando  $t \rightarrow \infty$ ;

Isto ocorre se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números imaginários :  $\lambda_1 = \beta i$  e  $\lambda_2 = -\beta i$ .

2. **Assintoticamente estável** se  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ ;

Isto ocorre se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambos negativos ou, se complexos então a parte real é negativa;

3. **Instável** se  $x \rightarrow \infty$  ou  $y \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ ;

Isto ocorre se pelo menos uma das raízes  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  for positiva.

Podemos resumir os tipos de estabilidade do ponto  $(0, 0)$  em seis casos distintos:

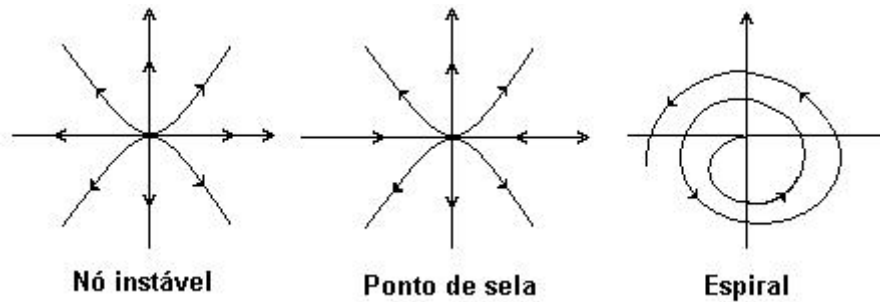


Figura 5.1: Pontos instáveis de sistemas bidimensionais lineares

1. Instáveis  $\iff \begin{cases} \text{Nó se } \lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0 \\ \text{Ponto de sela se } \lambda_1 \lambda_2 < 0 \text{ com } \lambda_i \text{ reais} \\ \text{Espiral se } \lambda_i = \alpha \pm \beta i \text{ e } \alpha > 0 \end{cases}$
2. Assintoticamente estáveis  $\iff \begin{cases} \text{Nó se } \lambda_1 < 0 \text{ e } \lambda_2 < 0 \\ \text{Espiral se } \lambda = \alpha + \beta i \text{ e } \alpha < 0 \end{cases}$

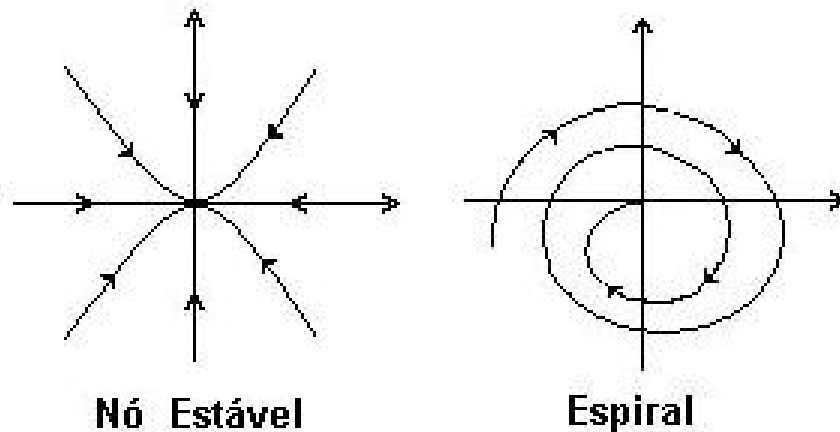


Figura 5.2: Pontos assintoticamente estáveis de sistemas bidimensionais lineares

3. Estáveis  $\iff \lambda = \pm \beta i$

Dado um sistema autônomo 5.14, usando a regra da cadeia, podemos transformá-lo numa equação diferencial com o tempo implícito, isto é, a solução será dada por uma relação entre as variáveis de estado  $x$  e  $y$ . O plano- $xy$  é denominado *plano de fase do sistema*.

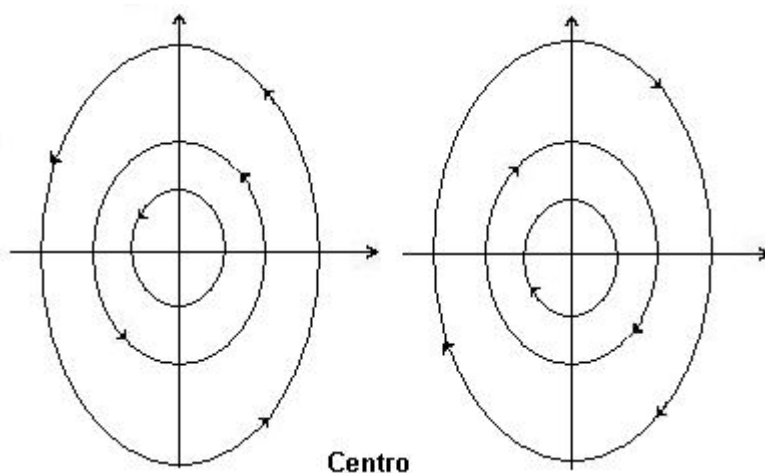


Figura 5.3: Ponto de equilíbrio estável

**Exemplo 5.5** Estudar a natureza do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  do sistema autônomo e desenhar seu plano de fase. Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

A equação que relaciona as variáveis de estado é dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y}{y} = \frac{x}{y} + 1 \text{ para } y \neq 0$$

Assim, as trajetórias no *plano de fase* são soluções desta equação. A equação que relaciona as variáveis de estado  $x$  e  $y$  é homogênea logo, considerando a mudança de variável  $u = \frac{x}{y}$ , temos  $x = uy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$ . Logo,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + 1 \Leftrightarrow u + y \frac{du}{dy} = u + 1 \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{y} \Rightarrow u = \ln y + C \Rightarrow x = y \ln y + Cy$$

A curva

$$x = y \ln y + Cy$$

é denominada *trajetória da equação diferencial no plano de fase  $xy$* , ou *órbita*.

Por outro lado, temos também que as raízes do polinômio característico associado são iguais  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . Então a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2 t e^t \\ y(t) &= C_2 e^t \end{aligned}$$

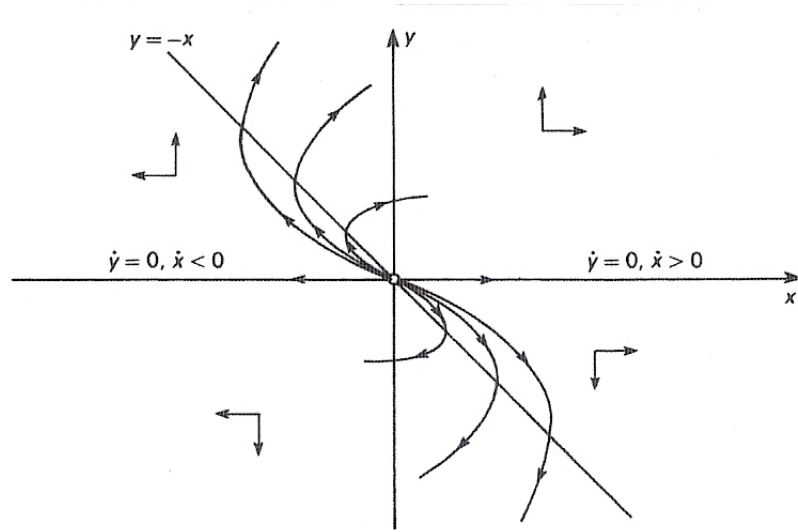


Figura 5.4: Plano de fase e trajetórias divergentes

Neste caso, temos que o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um *nó instável*. As isóclinas são as retas que passam pela origem e dadas por:  $\begin{cases} y = -x \\ y = 0 \end{cases}$ . As isóclinas dividem o plano em 4 regiões onde as direções da trajetória são distintas. Estas direções são obtidas, considerando-se os sinais das derivadas do sistema inicial, isto é,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} > 0 \iff y > -x \\ \frac{dy}{dt} > 0 \iff y > 0 \end{cases}$$

**Exercício 5.1** Estude a natureza do ponto de equilíbrio  $(0,0)$  dos sistemas e desenhe seus planos de fase.

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}$$

**Projeto:** Vamos considerar dois países vizinhos A e B que possuem uma política externa pacífica, embora estejam sempre preparados para uma eventual guerra. Vamos supor também que o poderio militar de cada país seja expresso por sua quantidade de armas ou pelo capital que esta quantidade significa.

Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  o potencial de guerra de cada país em cada instante  $t$   
 - As seguintes hipóteses são necessárias para a modelagem deste *equilíbrio militar*, usando equações diferenciais:

- $x(t)$  e  $y(t)$  são consideradas funções contínuas e com derivadas contínuas para  $t \geq 0$ ;

- quanto maior o poderio militar de um país, mais ele será fonte de problemas para o outro, ou seja, a variação do poderio militar de cada país é proporcional ao poderio de seu vizinho;

- a depreciação dos armamentos de cada país, em cada instante, é responsável pela diminuição de seu poderio - vamos supor que a depreciação seja proporcional à quantidade de armamentos existentes;

- Se um país tem intenções bélicas secretas, isto pode ter influência no crescimento de seu poderio militar. Por outro lado, se não houver uma situação econômica compatível para suportar o crescimento bélico do outro país, isto pode acarretar uma diminuição na aquisição de novas armas.

A tradução destas hipóteses em forma de um modelo matemático é dada pelo sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = by - ax + g(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx - dy + h(t) \end{cases}$$

Estude os possíveis equilíbrios militares entre estes dois países, particularizando as estratégias consideradas:

a) Não há estratégias particulares  $\implies g(t) = h(t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ ;

b) As estratégias secretas são constantes e, pelo menos uma é não nula.

Analise os modelos, explicando cada uma das situações:

- $ad - bc > 0$ ;
- $ad - bc = 0$ ;
- $ad - bc < 0$ .

Verifique se este modelo é compatível com alguma guerra conhecida.

## 5.3 Sistemas lineares não-autônomos: Estabilidade

O estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema linear não-autônomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + k_1 \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + k_2 \end{cases} \quad (5.15)$$

é equivalente ao do sistema autônomo. O ponto de equilíbrio  $P^*$  de 5.15 é determinado considerando-se o sistema

$$\begin{cases} ax + by + k_1 = 0 \\ cx + dy + k_2 = 0 \end{cases}$$

ou seja,  $P^* = \left( \frac{k_2b - k_1d}{ad - bc}, \frac{k_1c - k_2a}{ad - bc} \right)$ . Agora, considerando a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{k_2b - k_1d}{ad - bc} \\ v &= y - \frac{k_1c - k_2a}{ad - bc} \end{aligned}$$

no sistema 5.15, obtemos um sistema linear autônomo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a\left(u + \frac{k_2b - k_1d}{ad - bc}\right) + b\left(v + \frac{k_1c - k_2a}{ad - bc}\right) + k_1 \\ \frac{dv}{dt} = c\left(u + \frac{k_2b - k_1d}{ad - bc}\right) + d\left(v + \frac{k_1c - k_2a}{ad - bc}\right) + k_2 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au + bv \\ \frac{dv}{dt} = cu + dv \end{cases} \quad (5.16)$$

As características do ponto de equilíbrio  $P_0 = (0, 0)$  do sistema 5.16 são as mesmas do ponto  $P^* = \left( \frac{k_2b - k_1d}{ad - bc}, \frac{k_1c - k_2a}{ad - bc} \right)$  do sistema 5.15.

**Exemplo 5.6** Estude a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + 2 \end{cases}$$

**Solução:** O ponto de equilíbrio é obtido de:  $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases} \implies P^* =$

$\left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ . Então, considerando  $\begin{cases} u = x - \frac{7}{3} \\ v = y + \frac{1}{3} \end{cases}$ , obtemos o sistema autônomo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + 2v \\ \frac{dv}{dt} = -u + v \end{cases}$$

cujo polinômio característico, dado por  $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$  é

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3.$$

As raízes de  $P(\lambda)$  são  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i \implies P_0 = (0, 0)$  é instável e a trajetória no plano de fase- $uv$  é uma espiral. Este resultado nos garante que o ponto de equilíbrio  $P^* = \left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}\right)$  também é instável e a trajetória no plano de fase- $xy$  é uma espiral que se afasta de  $P^*$  (Veja fig 5.5).



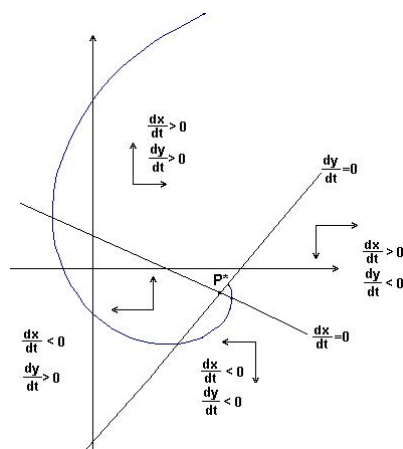


Figura 5.5: Plano de fase e trajetória espiral

## 5.4 Modelos Compartimentais Lineares

Os sistemas de equações diferenciais lineares aparecem com muita frequência na modelagem de situações reais e sua formulação pode ser facilitada quando se usa o *método dos compartimentos* –

Um sistema de compartimentos consiste, essencialmente, de um número finito de subsistemas interligados, chamados *compartimentos*, que trocam entre si e com o meio ambiente, quantidade de concentração de materiais. Cada compartimento é definido por suas propriedades físicas.

Para a modelagem de fenômenos que se comportam como sistemas compartimentais é necessário que se faça hipóteses adicionais em relação às taxas de trocas de materiais – A hipótese que implica na *linearidade* do sistema é uma das mais utilizadas, talvez por sua simplicidade:

“O fluxo de um compartimento  $i$  para outro  $j$  é proporcional à quantidade  $x_i(t)$  contida no compartimento  $i$ , em cada instante  $t$ , e independe do valor  $x_j(t)$ ”.

Neste caso, para a formulação do modelo matemático basta considerar o balanço das massas em cada compartimento, durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ . A troca efetuada em cada compartimento é então descrita por uma equação diferencial linear de 1<sup>ª</sup> ordem. Com  $n$  compartimentos, cada equação tem a forma:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=0, j \neq i}^n k_{ji}x_j(t) - \sum_{j=0, j \neq i}^n k_{ij}x_i(t) \quad (5.17)$$

onde  $k_{ij}x_i(t)$  é o fluxo do compartimento  $i$  para o compartimento  $j$ . O

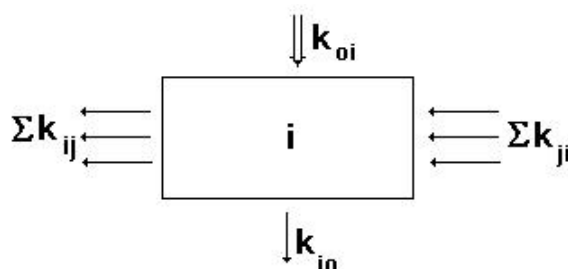


Figura 5.6: Esquema de modelos compartimentais

índice  $j = 0$  denota o meio ambiente e as constantes  $k_{ij}$  são consideradas todas não-negativas.

Se  $k_{i0} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , então não existe perda de “material” e o sistema é dito *fechado*; caso contrário será *aberto*.

#### Projeto 5.1 - *Despoluição do Rio Piracicaba*

Uma experiência realizada pelo CENA para despoluir o Rio Piracicaba utilizou um sistema de tanques interligados, construídos em sua margem e contendo uma concentração populacional razoável de “água-pé”. A planta utiliza parte do material poluente, que se fixa em suas raízes, para seu desenvolvimento. Consideraremos, neste exemplo, um modelo simples utilizando apenas duas lagoas de despoluição (fig. 5.7)

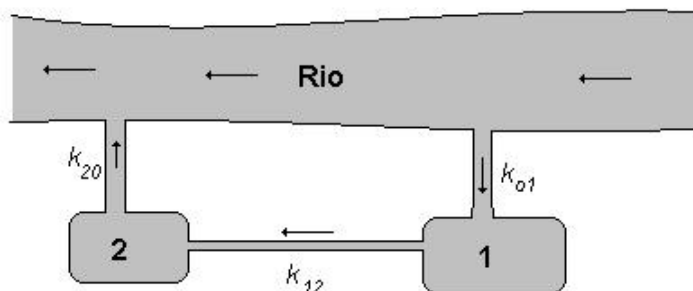


Figura 5.7: Lagoas de despoluição no Piracicaba

As hipóteses para a modelagem matemática são:

- A concentração de poluentes da água do rio é  $c$  (constante);
- $c_1(0)$  e  $c_2(0)$  são as concentrações iniciais dos poluentes nos dois tanques de despoluição;
- O volume de solução (água do rio + poluentes) que entra e sai de cada compartimento é o mesmo em cada instante, isto é, as vazões de entrada

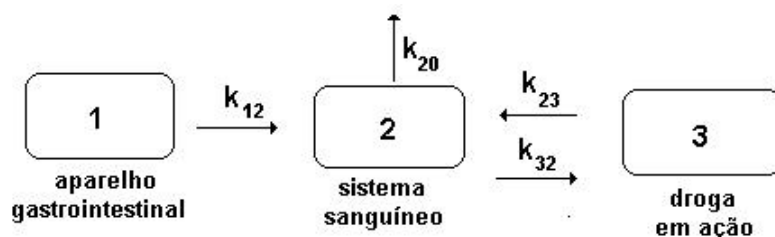


Figura 5.8: Sistema compartimental da cinética de drogas num organismo

e saída são iguais em cada tanque, valendo  $r$  (litros/minuto). Seja  $V_1$  o volume do 1º tanque e  $V_2$  o volume do 2º tanque.

Considerando o sistema como sendo compartimental e com a hipótese de linearidade, podemos escrever

$$\begin{cases} V_1 \frac{dc_1(t)}{dt} = k_{01}c - k_{12}c_1(t) \\ V_2 \frac{dc_2(t)}{dt} = k_{12}c_1(t) - k_{20}c_2(t) \end{cases} \quad (5.18)$$

onde  $k_{01} = k_{12} = k_{20} = r$  ;  $c_1(0) = c_1^0$  e  $c_2(0) = c_2^0$  são dados.

As concentrações  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$ , nos respectivos tanques, em cada instante, podem ser avaliadas através da solução do sistema (5.18).

Analise este modelo considerando valores reais para os parâmetros e diferentes concentrações iniciais.

a) Encontre as soluções de (5.18) satisfazendo  $c_1(0) = c_2(0) = 0$  com  $c = \text{constante}$ .

b) Mostre que o sistema (5.18) pode ser transformado numa equação diferencial de 2ª ordem.

c) Encontre as soluções  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  quando  $c = c(t) = c_0(1 - \text{sen } wt)$ , significando que a poluição do rio é mais intensa em certas ocasiões.

d) Verifique se a poluição nos tanques se estabiliza.

### Projeto 5.2 - Cinética de uma droga num organismo

A situação a ser analisada é correspondente à ingestão e subsequente metabolismo duma droga num indivíduo. Consideramos que a ingestão da droga seja via oral e, logo que ela entra no aparelho gastrointestinal, é absorvida na circulação sanguínea e distribuída por todo o corpo, para ser metabolizada e finalmente eliminada. Consideramos como compartimento **1** o aparelho gastrointestinal, o compartimento **2** é o sistema sanguíneo e o compartimento **3** simboliza a quantidade da droga em ação (fig 5.8):

No instante inicial (momento próximo a ingestão da droga)  $t = 0$ , as condições iniciais em cada compartimento são dadas por:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= D_0 && (D_0 \text{ é a quantidade de droga ingerida}); \\ x_2(0) &= 0 && (\text{a droga ainda não começou a circular no sistema sanguíneo}); \\ x_3(0) &= 0 && (\text{a droga ainda não começou a agir}). \end{aligned}$$

$k_{ij}x_i(t)$  é o fluxo da droga do compartimento  $i$  para o compartimento  $j$ ; e  $k_{20}$  é constante relacionada com a eliminação da droga através do compartimento 2.

Supondo que os fluxos  $k_{ij}x_i$  sejam proporcionais às quantidades  $x_i$  presentes em cada compartimento  $i$ , o modelo matemático que descreve o processo é dado pelo sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -k_{12}x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = k_{12}x_1 - k_{23}x_2 + k_{32}x_3 - k_{20}x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = k_{23}x_2 - k_{32}x_3 \end{cases} \quad (5.19)$$

com  $x_1(0) = D_0$ ;  $x_2(0) = x_3(0) = 0$ .

Se considerarmos  $X(t)$  a quantidade de droga presente, em cada instante, nos 3 compartimentos selecionados, temos

$$X(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

e portanto,

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt} = -k_{20}x_2(t) < 0, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

$\frac{dX}{dt} < 0$  indica que a droga no organismo diminui com o passar do tempo.

Se considerarmos, neste problema, um quarto compartimento relativo à quantidade de droga eliminada, teremos no sistema (5.19) mais uma equação:

$$\frac{dx_4}{dt} = k_{20}x_2 \quad (5.20)$$

Neste caso,  $\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \frac{dx_3}{dt} + \frac{dx_4}{dt} = 0$ , o que equivale a dizer que o novo sistema compartimental, formado pelas equações (5.19) e (5.20) é *fechado*.

◦Mostre que o sistema (5.19) pode ser transformado numa equação diferencial linear de 3ª ordem.

◦Na primeira equação de 5.19 a variável  $x_1$  independe das outras variáveis de estado. Assim, se encontrarmos a função  $x_1(t)$  podemos transformar o sistema de ordem 3 em um de ordem 2, substituindo  $x_1(t)$  na segunda equação de 5.19. Resolva o novo sistema, considerando a equação de segunda ordem correspondente.

◦Encontre um medicamento e determine a solução com os valores reais dos parâmetros.

### Projeto 5.3 – Excreção de uma droga

Em Farmacologia, um problema fundamental é saber como varia a concentração de uma droga dissolvida no plasma sanguíneo. O projeto proposto consiste de duas partes:

#### 1ª Parte

a) Considere que a taxa de variação (eliminação) da concentração da droga seja proporcional à sua concentração na corrente sanguínea (modelo com 1 compartimento);

b) Suponha que o indivíduo receba uma dose inicial igual a  $D_0 = D(0)$  que é absorvida instantaneamente pelo sangue e, um tratamento completo indica que deve receber dosagens iguais a  $D_0$  a cada  $T$  horas.

- Determine a concentração da droga no sangue depois de  $n$  aplicações;
- Encontre o nível de saturação  $D_s$  da droga no sangue, isto é, o valor de estabilidade de  $D(t)$  quando  $t$  cresce.

#### 2ª Parte

a) Considere o modelo 2-compartimental de excreção de drogas, tomando como compartimentos o plasma sanguíneo e o tecido alimentado pelo sangue. Por difusão, ocorre uma troca de moléculas da droga entre o plasma e o tecido, sendo que um deles elimina a droga. A situação é esquematizada na figura a baixo:

Sejam  $Q_1 = Q_1(t)$  e  $Q_2 = Q_2(t)$  as massas de  $D(t)$  no tecido e no plasma, respectivamente, com  $Q_1(0) = 0$  e  $Q_2(0) = D_0$ .

– Escreva os modelos matemáticos da situação, considerando:

- 1)  $u(t) = 0$  para todo  $t > 0$  e  $u(0) = D_0$ .
- 2)  $u(t)$  dado pelas aplicações intermitentes como na 1ª Parte.

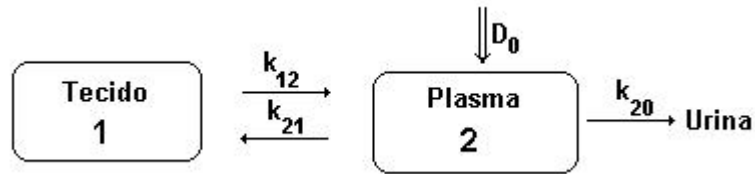


Figura 5.9: Eliminação de drogas pela urina

- Resolva os modelos.
- Modifique os modelos, considerando hipóteses adicionais (neste caso seria conveniente conversar com um bioquímico).

#### Projeto 4.4 - Dívida Externa (Modelo de Domar)

O modelo de dívida externa de Domar relaciona o total da dívida nacional externa (empréstimos feitos no exterior) com o total da renda nacional. O modelo é simplista, sendo baseado no fato que *o crescimento da dívida externa é proporcional à renda* (a renda está vinculada a empréstimos no exterior). Enquanto que, *o aumento da renda deve-se a uma aplicação proporcional da própria renda* (existe uma porcentagem constante da renda que é reaplicada para se produzir mais renda)

- 1) Escreva o modelo matemático que representa a interação entre as duas variáveis de estado renda e dívida externa;
- 2) Resolva o sistema, considerando que a renda no instante inicial é  $R(0) = R_0$  e a dívida inicial é  $D(0) = D_0$ .
- 3) Use o modelo de Domar para tentar validar a dívida nacional do Brasil, cuja evolução pode ser encontrada em [2].

Sugestão: Considere no modelo a dívida líquida, e a renda como sendo o valor do PIB.

- 4) Se  $\frac{\text{Dívida}}{\text{PIB}} = \frac{D}{R}$  é a capacidade de endividamento de um país, calcule o instante, através do modelo de Domar, tal que  $\frac{D}{R} > 0,25$ ;

- 5) Determine nossa capacidade de endividamento futuro.

6) Se o modelo de Domar não é razoável para a dívida  $\times$  renda do Brasil, formule um modelo próprio, justificando seus argumentos. **Projeto 5.5 -**

#### Sistema mecânico

Considere o sistema mecânico (linear) sem atrito esquematizado na (Fig 5.10) onde o repouso do sistema para as massas  $m_1$  e  $m_2$  é tomado como a

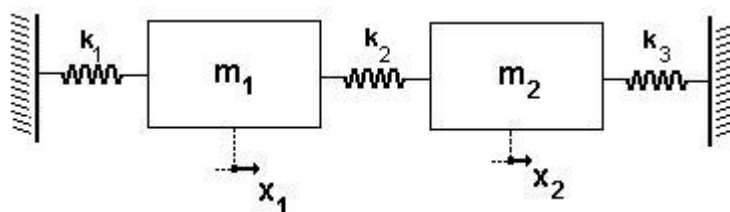


Figura 5.10: Sistema mecânico linear

origem de coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ .

– O modelo matemático que relaciona o movimento dos corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  é dado por:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 \end{cases}$$

- Esquematize o modelo mecânico com um modelo compartimental;
- Descreva o sistema elétrico análogo.





# SISTEMAS DE EQUAÇÕES ORDINÁRIAS AUTÔNOMAS QUASE LINEARES

*“Se quiser transformar seus sonhos em realidade basta acordar”*

Anônimo

Poderíamos dizer, sem nenhum constrangimento mas sem nenhuma demonstração rigorosa, simplesmente baseados na experiência adquirida com modelagem de sistemas biológicos que, se um sistema de equações diferenciais é um modelo razoável de algum fenômeno biológico então ele raramente é linear com coeficientes constantes. Em outras palavras, na prática devemos quase sempre trabalhar com equações não lineares e/ou com coeficientes variáveis. Para tais sistemas de equações diferenciais não lineares não existem métodos de resoluções analíticas e, para acreditar nos métodos numéricos ou computacionais devemos primeiramente saber como se comportam qualitativamente as suas soluções. Os sistemas que aparecem em grande parte dos modelos, principalmente em biomatemática são os autônomos, isto é, quando os campos de direções não têm o tempo dado explicitamente.

Como fizemos no capítulo anterior, pela simplicidade requerida neste texto, daremos ênfase apenas aos sistemas bidimensionais. Um *sistema bidimensional de equações diferenciais ordinárias (não lineares) autônomo*

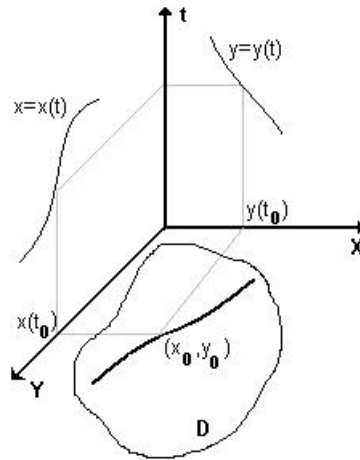


Figura 6.1: Órbita de uma solução no plano de fase

é dado, na forma geral por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (6.1)$$

onde,  $F$  e  $G$  são funções contínuas de  $x$  e  $y$ , com derivadas parciais contínuas;  $(F(x, y), G(x, y))$  é um campo de direções no plano- $xy$  e as *órbitas* são as curvas integrais deste campo. É frequentemente possível conhecer a órbita de um sistema sem conhecermos sua própria solução:

- Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  soluções do sistema 6.1; suponhamos que  $\frac{dx}{dt} \neq 0$  para  $t = t^*$ , então podemos ter  $t = t(x)$  numa vizinhança do ponto  $x^* = x(t^*)$ . Desta forma, a órbita do sistema é dada por:

$$y = y(t(x)) \quad (6.2)$$

As órbitas podem ser obtidas diretamente, considerando as curvas soluções de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad (6.3)$$

De fato, temos  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$ .

Assim, para determinarmos as órbitas de um sistema podemos recorrer às equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}$$

desde que não se tenha um ponto  $(x^*, y^*)$  em que  $G(x^*, y^*) = F(x^*, y^*) = (0, 0)$ .

## 6.1 Um estudo qualitativo dos sistemas autônomos quase-lineares

Um ponto  $(x^*, y^*)$  tal que  $G(x^*, y^*) = F(x^*, y^*) = (0, 0)$  é denominado *ponto crítico* ou *ponto de equilíbrio* ou ainda, *ponto estacionário do sistema*.

Observamos que se  $(x^*, y^*)$  é um ponto crítico então  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x^*, y^*) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = G(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$ ,

ou seja, ambas as variações são nulas no ponto crítico.

Salientamos também que se  $(x^*, y^*)$  é um ponto crítico de 6.1, então

$$\begin{cases} x(t) = x^* \\ y(t) = y^* \end{cases}$$

é uma solução de 6.1, denominada *solução estacionária* ou *de equilíbrio* pois nesta posição as variáveis  $x$  e  $y$  estão em repouso. Neste caso, a órbita desta solução é o próprio ponto  $(x^*, y^*)$ . Os pontos críticos de um sistema devem ter um tratamento diferenciado pois suas características próprias determinam a evolução das órbitas no plano de fase.

Do ponto de vista qualitativo é interessante saber se a posição de repouso é *estável*, isto é, se uma pequena perturbação na posição do ponto crítico resulta em um retorno ou em um afastamento da posição original de repouso. Mais especificamente, *podemos dizer que o ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  do sistema 6.1 é estável se, dado  $\epsilon > 0$ , é possível determinar um valor  $\delta > 0$ , dependente apenas de  $\epsilon$ , tal que se  $\|(x, y) - (x^*, y^*)\| < \delta$  então a solução*

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} = (x(t), y(t)) \text{ existe para todo } t > 0 \text{ e } \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \epsilon.$$

Em outras palavras, um ponto crítico é estável se as soluções que começam perto dele não se afastam muito no futuro.

Dizemos que *um ponto crítico  $(x^*, y^*)$  é assintoticamente estável se for estável e, além disso tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$$

ou seja, a solução  $(x^*, y^*)$  atrai todas as outras soluções que, para algum instante  $t$ , estão relativamente perto dela.

*Uma solução estacionária  $\begin{cases} x(t) = x^* \\ y(t) = y^* \end{cases}$  é instável se não for estável.*

Isto significa que existe pelo menos uma solução de 6.1 que começa perto dela e não permanece próxima para sempre - A distância entre esta solução e o ponto de equilíbrio aumenta com o tempo.

Para o estudo da estabilidade de um sistema autônomo geral necessitamos de alguns resultados fundamentais como o Teorema de Lyapunov [2].

Entretanto, neste curso iremos considerar apenas sistemas mais simples, porém importantes para modelagem de fenômenos biológicos - os *sistemas autônomos quase-lineares*. Como veremos, o estudo dos sistemas quase-lineares depende somente dos resultados obtidos para os sistemas lineares.

Se as funções  $G(x, y)$  e  $F(x, y)$  forem contínuas com derivadas parciais contínuas numa vizinhança de  $(x^*, y^*)$  podemos considerar suas expansões de Taylor em torno de  $(x^*, y^*)$  :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) = F(x^*, y^*) + \left[ \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) \right] (x - x^*) + \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \right] (y - y^*) + F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) = G(x^*, y^*) + \left[ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) \right] (x - x^*) + \left[ \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \right] (y - y^*) + G_1(x, y) \end{cases}$$

Um sistema autônomo 6.1 é dito *quase-linear* em  $(x^*, y^*)$  se

$$G(x^*, y^*) = F(x^*, y^*) = (0, 0) \text{ e}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} \frac{F_1(x, y)}{\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)} \frac{G_1(x, y)}{\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}} = 0 \quad (6.4)$$

Isto sugere que o comportamento das órbitas numa vizinhança do ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  seja determinado pelo sistema linearizado :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left[ \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) \right] (x - x^*) + \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \right] (y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} = \left[ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) \right] (x - x^*) + \left[ \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \right] (y - y^*) \end{cases} \quad (6.5)$$

(Veja Teorema de Linearização a seguir).

Podemos então dizer que um *sistema autônomo quase linear* é da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x - x^*) + b(y - y^*) + F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = c(x - x^*) + d(y - y^*) + G_1(x, y) \end{cases} \quad (6.6)$$

onde, as funções  $F_1(x, y)$  e  $G_1(x, y)$  satisfazem a condição 6.4.

Observamos que, caso se tenha  $(x^*, y^*) \neq (0, 0)$  uma simples mudança

de variáveis  $\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases}$  transforma o sistema linear em

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au + bv + F_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = cu + dv + G_1(u, v) \end{cases} \quad (6.7)$$

Como já vimos no capítulo anterior o ponto crítico  $(0, 0)$  de 6.7 tem as mesmas características do ponto crítico  $(x^*, y^*)$  de 6.6.

**Teorema 7** (Linearização de Lyapunov-Poincaré). [2]

Seja  $(F(x, y), G(x, y))$  um campo continuamente diferenciável em uma vizinhança da origem  $(0, 0)$  onde podemos escrever

$$\begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ G_1(x, y) \end{pmatrix}$$

com  $F_1(x, y)$  e  $G_1(x, y)$  são quase lineares.

1. Se a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  for assintoticamente estável, isto é, se as raízes de  $\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$  forem negativas então, o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  do sistema 6.7 é assintoticamente estável e o mesmo ocorre com o ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  do sistema 6.6;
2. Se um dos autovalores  $\lambda_i$  da matriz  $A$  for positivo ou tiver parte real positiva,  $\text{Re}\lambda > 0$ , então o ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*)$  do sistema 6.6 será instável;
3. Se  $\text{Re}\lambda = 0$ , então o ponto  $(0, 0)$  será um centro para o sistema 6.6 mas o mesmo pode não ocorrer com o ponto  $(x^*, y^*)$  do sistema 6.7.

**Exemplo 6.1** Estude a natureza dos pontos críticos do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) = x - xy - 1 \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) = 2y - y^2 + 2 \end{cases}$$

**Solução:**

Os pontos críticos do sistema são dados pela intersecção das isóclinas

$$\begin{cases} x - xy - 1 = 0 \\ 2y - y^2 + 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \\ y = (1 + \sqrt{3}) \text{ ou } y = (1 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

donde, obtemos os pontos  $P_1^* = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \sqrt{3})$  e  $P_2^* = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \sqrt{3})$

1) Para a análise do ponto  $P_1^*$ , vamos transladá-lo para a origem e para isto tomamos a seguinte mudança de variáveis  $\begin{cases} u = x + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ v = y - (1 + \sqrt{3}) \end{cases}$

e o sistema inicial fica

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\sqrt{3}u - \frac{1}{\sqrt{3}}v - uv = f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = -2\sqrt{3}v - v^2 = g(u, v) \end{cases}$$

Este sistema é quase-linear pois

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{-uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{-v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$$

E tem como ponto de equilíbrio a origem  $P_0^* = (0, 0)$ .

Na proximidade de  $P_0^*$  este sistema pode ser aproximado pelo sistema linear

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) u + \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) v = -\sqrt{3}u - \frac{1}{\sqrt{3}}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) u + \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) v = -2\sqrt{3}v \end{cases}$$

Agora, temos que

$$\det \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -2\sqrt{3} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda_1 = -\sqrt{3} < 0 \text{ ou} \\ \lambda_2 = -2\sqrt{3} > 0.$$

Assim, do Teorema de Linearização, podemos garantir que o ponto  $P_1^* = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \sqrt{3})$  é assintoticamente estável para o sistema original.

2) Para a análise do ponto  $P_2^* = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 - \sqrt{3})$  tomamos a mudança de variáveis  $\begin{cases} u = x - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ v = y - (1 - \sqrt{3}) \end{cases}$  e obtemos um sistema com ponto de equilíbrio na origem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sqrt{3}u + \frac{1}{\sqrt{3}}v - uv = f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{3}v - v^2 = g(u, v) \end{cases}$$

que linearizado em torno da origem nos dá:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sqrt{3}u + \frac{1}{\sqrt{3}}v \\ \frac{dv}{dt} = 2\sqrt{3}v \end{cases}$$

Neste caso os autovalores são  $\lambda_1 = \sqrt{3} > 0$  e  $\lambda_2 = 2\sqrt{3} > 0$  e portanto, o ponto crítico  $(0, 0)$  deste sistema, que corresponde ao ponto crítico  $P_2^*$  do sistema inicial é instável.

A fig.6.2 nos dá um esboço das órbitas no plano de fase. Estas órbitas poderiam ser obtidas diretamente como soluções da equação quase homogênea.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - xy - 1}{2y - y^2 + 2}$$

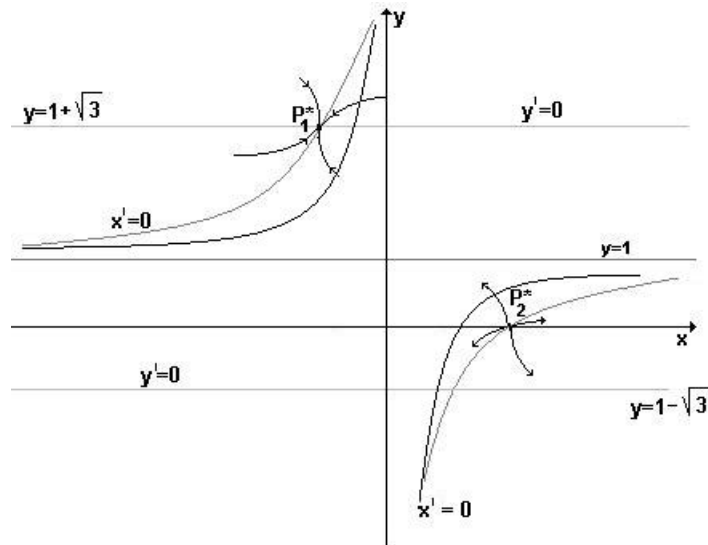


Figura 6.2: Esboço das naturezas dos pontos críticos

**Exemplo 6.2** Estude o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Este sistema quase-linear tem como único ponto de equilíbrio a origem  $(0, 0)$ . Seu correspondente sistema linear é

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Os autovalores deste sistema linearizado são imaginários puros  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = -i$ ; O ponto  $(0, 0)$  é um centro (estável) deste sistema porém o ponto  $(0, 0)$  não é um centro para o sistema inicial. Senão vejamos:

Vamos escrever o sistema inicial em coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \sin \theta \frac{dx}{dt} = \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{dt} - r \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \cos \theta \frac{dy}{dt} = \cos \theta \sin \theta \frac{dr}{dt} + r \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \implies \begin{cases} y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -r^2 \frac{d\theta}{dt} \\ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt} \end{cases}$$

Então, o sistema original, em coordenadas polares é

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -r^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$$

cuja solução geral é dada por

$$\begin{cases} r(t) = \frac{1}{t+k_1} \text{ com } k_1 > 0 \\ \theta(t) = k_2 \end{cases}$$

que é uma espiral convergente para o ponto  $(0, 0)$ . Portanto, neste caso,  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

Observamos que este resultado não contraria o Teorema de Linearização.

### Exercícios 6.1

1. Determine a natureza dos pontos de equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - xy \\ \frac{dy}{dt} = 2y - y^2 \end{cases}$$

2. Estude a equação:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y^2 \end{cases}$$

3. Estude a equação de van Der Pol, considerando valores distintos (positivos, negativos e nulo) do parâmetro  $\varepsilon$ ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon(1 - x^2)y - kx \end{cases}$$

## 6.2 Aplicações de sistemas autônomos quase-lineares

### Interação de espécies

Na natureza as espécies não vivem isoladas, pelo contrário elas se relacionam e interagem de modo a preservar sua sobrevivência. O processo de relacionamento entre as espécies é bastante complexo e forma uma rede denominada *comunidade*. Se analisarmos uma comunidade na tentativa de modelar sua dinâmica populacional, devemos estar cientes de que, para cada espécie teremos uma equação diferencial e, cada equação será não linear. Por simplicidade, vamos estudar num primeiro momento, relações entre duas espécies.

Podemos considerar tres tipos básicos de interações de duas espécies: *predação*, *colaboração* e *competição* - apresentando, cada qual variantes específicas.





Assim, supondo que temos duas espécies  $x(t)$  e  $y(t)$  interagindo em um mesmo habitat, podemos considerar um modelo geral de interação dado pela equação autônoma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xF(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yG(x, y) \end{cases} \quad (6.8)$$

onde,  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  representam suas respectivas taxas de crescimento per capita.

O modelo geral de Kolmogorov (1936) [2] pressupõe simplesmente que o ponto  $(0, 0)$  seja de equilíbrio, o que pode ser traduzido no fato que não existe *geração espontânea* em biologia.

**Predação** A maioria das espécies obtém seus recursos energéticos se alimentando de outras espécies. A população que serve de alimento para o *predador* é denominada *presa*. Assim, a presença do predador é um fator negativo para o desenvolvimento das presas enquanto que a presença das presas é positivo para os predadores.

## Modelo de Lotka-Volterra

Este modelo pressupõe que exista alimento em abundância para as presas  $x(t)$  e que os predadores  $y(t)$  morrem na ausência das presas. Admitiremos que o encontro entre elementos das duas espécies seja ao acaso a uma taxa proporcional ao tamanho das duas populações. Se a causa principal da mortalidade das presas for proveniente da ação dos predadores, então sua taxa de mortalidade será proporcional ao número de encontros possíveis entre presas e predadores - A Lei da Ação das massas da Físico-Química estabelece que o número de encontros possíveis das partículas numa reação química é proporcional ao produto entre elas - este mesmo argumento foi usado neste modelo que considera a taxa de mortalidade proporcional ao

produto  $x(t)y(t)$ ; Agora, para que a espécie predadora possa procriar é necessário que esteja alimentada e para tal deve encontrar e abater as presas logo, podemos considerar que a taxa de natalidade da espécie predadora seja proporcional à  $x(t)y(t)$ .

Quando Volterra propôs seu modelo presa-predador estava considerando como presas os peixes do Mediterrâneo, daí a pressupor que, na ausência de predadores (tubarões) a população de presas tendo fartura de alimentos, cresceria sem limitação. Por outro lado, na ausência de presas a taxa de mortalidade dos predadores seria proporcional à sua população em cada instante. Com estas considerações as equações que regem a dinâmica destas espécies são

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \quad (6.9)$$

onde os parâmetros,  $a$  :taxa de crescimento das presas,  $b$  :taxa de mortalidade dos predadores,  $\alpha$  :taxa de abatimento das presas e  $\beta$  :taxa de transformação de alimento em filhotes de predadores, são positivos.

O modelo presa-predador 6.9 foi estabelecido também por Lotka na mesma ocasião e independentemente de Volterra (1925), analisando a dinâmica de drosófilas.

Para entender o que deve se suceder num futuro, dado que se conheça os valores populacionais presentes, devemos analisar os pontos de equilíbrio e as órbitas no plano de fase do modelo 6.9.

Considerando as isóclinas do sistema

$$\begin{cases} x(a - \alpha y) = 0 \\ y(-b + \beta x) = 0 \end{cases} ,$$

obtemos os pontos de equilíbrio  $P_0 = (0, 0)$  e  $P^* = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ .

O ponto  $P_0 = (0, 0)$  é instável pois o sistema linearizado correspondente a este ponto é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = -by \end{cases}$$

cujos autovalores são  $\lambda_1 = a > 0$  e  $\lambda_2 = -b < 0$  e neste caso, o Teorema de Linearização garante a instabilidade do ponto.

Para analisar o ponto  $P^* = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$  fazemos a mudança de variáveis  $x = \frac{b}{\beta} + u$  e  $y = \frac{a}{\alpha} + v$  em 6.9 e obtemos:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\alpha b}{\beta}v - \alpha uv \\ \frac{dv}{dt} = \frac{a\beta}{\alpha}u \end{cases} \quad (6.10)$$

Este sistema quase linear tem como sistema linearizado correspondente o seguinte

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\alpha b}{\beta}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{a\beta}{\alpha}u \end{cases} \quad (6.11)$$

O polinômio característico, dado por

$$\det \begin{vmatrix} -\frac{\alpha b}{\beta} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{a\beta}{\alpha} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + ab = 0$$

tem como raízes imaginários puros  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm\sqrt{abi}$ . Assim, o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema 6.11 é um centro (estável) para este sistema. De fato, no plano de fase  $uv$ , temos

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\frac{a\beta}{\alpha}u}{\frac{\alpha b}{\beta}v}$$

donde obtemos a equação com variáveis separadas

$$\frac{\alpha b}{\beta}v dv = -\frac{a\beta}{\alpha}u du$$

cujas soluções são as órbitas no plano de fase dadas por

$$\frac{\alpha b}{\beta}v^2 + \frac{a\beta}{\alpha}u^2 = K$$

que são elipses concêntricas para cada valor da constante arbitrária positiva  $K$ .

Por outro lado, sabemos do teorema da linearização, que quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são imaginários puros então a natureza do ponto de equilíbrio correspondente do sistema não linear é indeterminada, podendo ser um centro ou uma espiral. Esta indeterminação pode ser resolvida diretamente da equação original 6.9, considerando a equação das órbitas no plano de fase  $xy$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-b + \beta x)}{x(a + -\alpha y)} \quad (6.12)$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos as órbitas:

$$a \ln y - \alpha y = -b \ln x + \beta x + \ln k \quad (6.13)$$

Na equação 6.13 nem  $x$ , nem  $y$  podem ser explicitados em termos de funções elementares. As órbitas representadas por 6.13 podem ser traçadas por meio do método gráfico de Volterra:

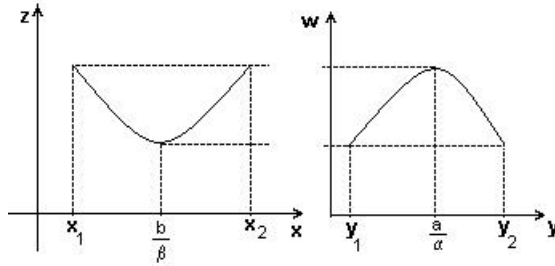


Figura 6.3: Funções auxiliares para Construção da órbita presa-predador

Sejam  $z$  e  $w$  variáveis auxiliares satisfazendo

$$\begin{aligned} z &= -b \ln cx + \beta x \quad \text{com} \quad c = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{b}} \\ w &= a \ln y - \alpha y \\ z &= w \end{aligned}$$

Agora, temos que  $z$  é uma função de  $x$  e,  $w$  é uma função de  $y$ ; Também temos que  $z = w$ . O esboço dos gráficos das funções  $z = f(x)$  e  $w = g(y)$  encontram-se na figura 6.3:

Temos que  $\frac{dw}{dy} = \frac{a}{y} - \alpha$  e  $\frac{dw}{dy} = 0 \iff y = \frac{a}{\alpha}$ . Ainda,  $\frac{d^2w}{dy^2} = -\frac{a}{y^2} < 0$  para todo  $y > 0$ . Portanto, para  $y = \frac{a}{\alpha}$ ,  $w$  atinge seu valor máximo

$$w_M = a \left( \ln \frac{a}{\alpha} - 1 \right)$$

Analogamente,  $z$  atinge seu valor mínimo  $z_m$  quando  $x = \frac{b}{\beta}$

$$z_m = b \left( 1 - \ln \frac{cb}{\beta} \right)$$

Desta forma, a população de presas deve variar entre um valor mínimo e um valor máximo dados pelas duas soluções de

$$a \left( \ln \frac{a}{\alpha} - 1 \right) = -b \ln cx + \beta x$$

e o mesmo acontece com a população de predadores que está compreendida entre as duas soluções da equação (fig. 6.4)

$$b \left( 1 - \ln \frac{cb}{\beta} \right) = a \ln y - \alpha y$$

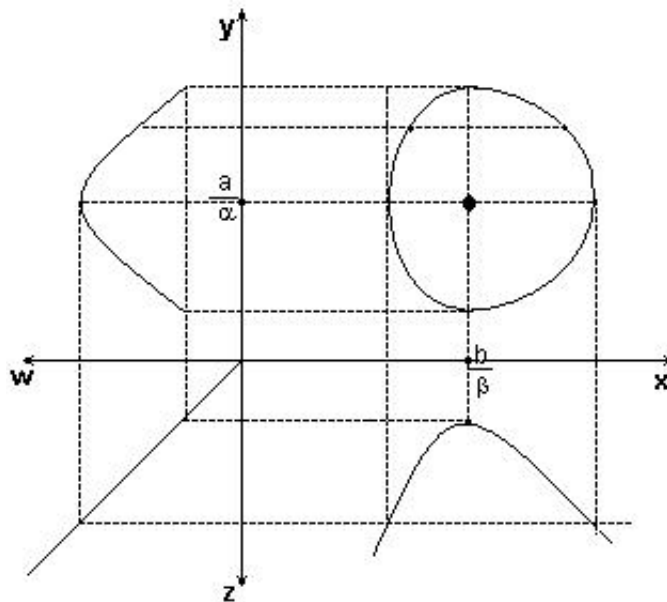


Figura 6.4: Construção da trajetória presa-predador no plano de fase

Podemos observar que os valores limitantes de ambas as populações são dependentes de seus estágios iniciais (condição inicial) pois dependem da constante arbitrária  $c$ . As órbitas do sistema 6.9 são curvas fechadas contendo o ponto de equilíbrio  $P^* = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$  e sua direção é orientada pelas variações das populações:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - \alpha y) > 0 \iff y < \frac{a}{\alpha} \\ \frac{dy}{dt} &= y(-b + \beta x) > 0 \iff x > \frac{b}{\beta} \end{aligned}$$

### Modelo presa-Predador com retirada

Se considerarmos o sistema presa-predador 6.9 com uma retirada uniforme de elementos de ambas as populações, cada população será diminuída de uma taxa proporcional a esta população. Seja  $\varepsilon$  a taxa de colheita, então o sistema passa a ser

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - \alpha y) - \varepsilon x = x(a - \varepsilon) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + \beta x) - \varepsilon y = -(b + \varepsilon) + \beta xy \end{cases} \quad (6.14)$$

A diferença entre os sistemas 6.9 e 6.14 consiste somente na posição dos seus pontos de equilíbrio. Para o novo sistema 6.14 temos  $\bar{P}^* = \left(\frac{b+\varepsilon}{\beta}, \frac{a-\varepsilon}{\alpha}\right)$ .

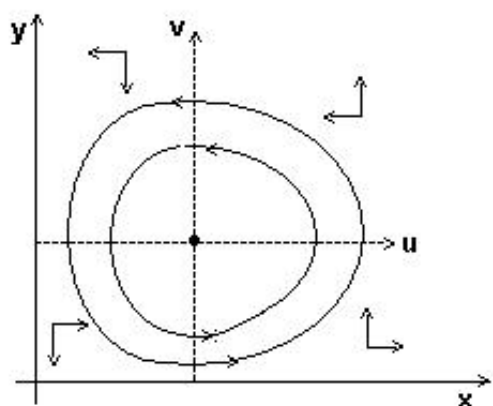


Figura 6.5: Órbita no plano de fase

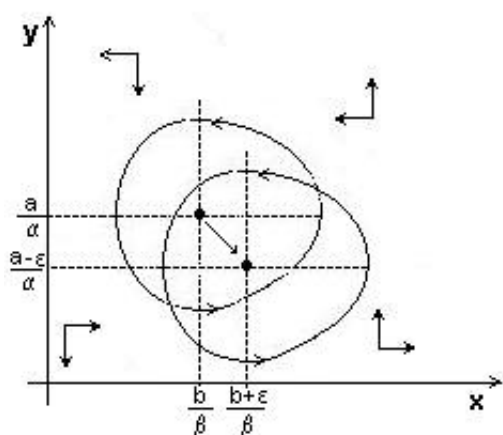


Figura 6.6: Presa-predador com retirada uniforme

Então,

$$\bar{x} = \frac{b + \varepsilon}{\beta} > \frac{b}{\beta} \implies \text{aumenta o valor máximo das presas}$$

$$\bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{\alpha} < \frac{a}{\alpha} \implies \text{diminui o valor mínimo dos predadores}$$

### Modelo presa-predador discreto

O modelo presa-predador discreto pressupõe que as variações consideradas, para ambas as espécies, seja simplesmente a diferença das populações

em dois estágios consecutivos

$$\begin{cases} X_{n+1} - X_n = aX_n - \alpha X_n Y_n \\ Y_{n+1} - Y_n = -bY_n + \beta X_n Y_n \end{cases} \quad (6.15)$$

Com,  $a$  : taxa de natalidade das presas;  $b$  : taxa de abate de presas pelo predador;  $c$  : taxa de mortalidade dos predadores e  $d$  : taxa de transformação de alimento (presa) em predadores. Neste modelo discreto de Lotka-Volterra consideramos todos os parâmetros positivo.

O sistema 6.15 pode ser escrito diretamente como um sistema de recorrência

$$\begin{cases} X_{n+1} = AX_n - \alpha X_n Y_n \\ Y_{n+1} = -CY_n + \beta X_n Y_n \end{cases} \quad (6.16)$$

Os pontos de equilíbrio de 6.16 são obtidos, considerando

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n = X^* \\ Y_{n+1} = Y_n = Y^* \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} X^* = AX^* - \alpha X^* Y^* = X^*(A - \alpha Y^*) \\ Y^* = Y^*(-C + \beta X^*) \end{cases}$$

e portanto, temos os pontos críticos  $P_0 = (0, 0)$  e  $P_1 = (\frac{A-1}{\alpha}, \frac{C+1}{\beta})$  que devem estar no primeiro quadrante.

### Exemplo 6.3

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1,3X_n - 0,01X_n Y_n \\ Y_{n+1} = -0,5Y_n + 0,003X_n Y_n \end{cases} \quad (6.17)$$

seus pontos críticos são  $P_0^* = (0, 0)$  e  $P_1^* = (500, 30)$ ;

Para o ponto  $(0, 0)$  o sistema linearizado é

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1,3X_n \\ Y_{n+1} = -0,5Y_n \end{cases}$$

cuja matriz jacobiana é  $J = \begin{pmatrix} 1,3 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ . Logo,

$\det \left| \begin{pmatrix} (1,3 - \lambda) & 0 \\ 0 & (-0,5 - \lambda) \end{pmatrix} \right| = 0$  implica que os autovalores são  $\lambda_1 = 1,3$  e  $\lambda_2 = -0,5 \implies$

$$\begin{cases} |\lambda_1| > 1 \\ |\lambda_2| < 1 \end{cases}$$

Logo, o ponto é  $P_0^*$  é instável (ponto de sela).

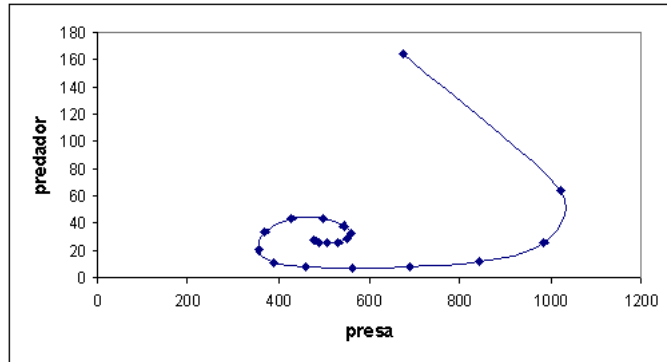


Figura 6.7: Órbita de um sistema presa-predador discreto

Para analisar a natureza do ponto  $P_1^* = (500, 30)$ , calculamos seus autovalores

$$\det \left| \begin{pmatrix} (1,3 - 0,01Y_n) - \lambda & -0,01X_n \\ 0,003Y_n & (-0,5 + 0,003X_n) - \lambda \end{pmatrix} \right|_{(500,30)} = 0$$

ou seja,

$$\det \left| \begin{pmatrix} 0,3 - \lambda & -5 \\ 0,09 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Assim, as raízes do polinômio característico  $P(\lambda) = \lambda^2 - 1,3\lambda + 0,75$  são os números complexos conjugados  $\lambda = 1,3(1 \pm i)$ . Neste caso, como  $|\Re\lambda| = 1,3 > 1$ , então o ponto de equilíbrio  $P_1^* = (500, 30)$  é instável (espiral instável)(Ver fig. 6.7).

**Exercício 6.2** Estude o modelo discreto presa-predador com os dados  $x_0 = 30$ ,  $y_0 = 5$ ,  $a = 0,01$ ,  $\alpha = 0,003$ ,  $b = 0,025$  e  $\beta = 0,001$ .

## Modelo de Kolmogorov

Uma forma mais específica do modelo de Kolmogorov para um sistema presa-predador, ainda não especificando as relações funcionais entre as espécies, pode ser dado pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xH(x) - V(x)y \\ \frac{dy}{dt} = yG(x) \end{cases} \quad (6.18)$$

Neste modelo geral temos:



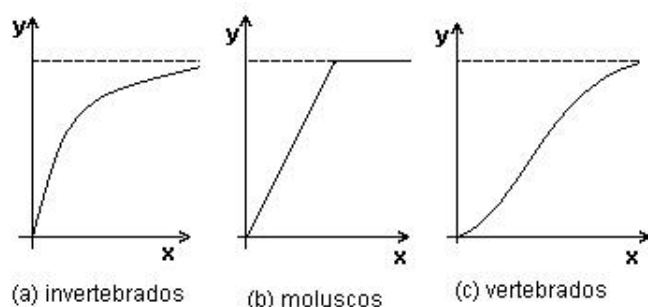


Figura 6.8: Resposta funcional em sistemas presa-predador

◦  $H(x)$  é positiva e decrescente - na ausência de predadores a taxa de natalidade das presas diminui com o aumento de sua população (população inibida).

◦  $G(x)$  é crescente e  $G(0) < 0 < G(\infty)$ . A taxa de crescimento dos predadores vai de valores negativos (falta de alimento) a valores positivos.

◦  $V(x) > 0$  para  $x > 0$  e  $V(0) = 0$ . A função  $V(x)$  é denominada *resposta funcional* dos predadores à densidade de presas (*trophic function*) e, para cada par de espécies tem uma característica especial (veja fig. 6.9)

**Projeto 6.1** Faça um estudo completo do modelo presa-predador de Kolmogorov. Dê um exemplo de funções  $H(x)$ ,  $V(x)$  e  $G(x)$  que satisfazem as hipóteses do modelo de Kolmogorov e aplique a análise anterior ao seu modelo.

**Observação:** A relação presa-predador apresenta algumas variantes na forma de predação:

- *Predação comum:* o predador mata sua presa e se alimenta dela;
- *Parasitismo:* o predador se nutre da presa sem matá-la. Exemplos típicos são as epidemias (*micro-parasitismo* como as epidemias bacterianas e viróticas; *macro-parasitismo* como a convivência com piolhos, lombrigas, pernilongos etc);
- *Hospedeiro-parasitóide:* o parasitóide (predador) não se alimenta diretamente de seu hospedeiro (presa), simplesmente deposita seus óvos nele e, posteriormente suas larvas se alimentam do hospedeiro. Este processo é muito frequente entre insetos e é usado para controle de pragas na lavoura

**Exemplo 6.4** controle da broca da cana de açúcar por uma vespa desenvolvida em laboratório [1].

**Projeto 6.2** Analise o Modelo discreto de Nicholson-Bailey do tipo hospedeiro-parasitóide [3]:

$$\begin{cases} N_{t+1} = \lambda N_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} = cN_t(1 - e^{-aP_t}) \end{cases}$$

### Competição

Neste caso ambas as espécies que competem se prejudicam mutuamente.

Uma competição pode ser por *alimentos*, quando as duas espécies têm a mesma preferência para sua nutrição - Entre pássaros este processo é muito comum (sabiás e sanhaços comem os mesmos tipos de fruta), por *espaço físico* - quando a competição se reflete no uso de refúgios ou na construção de ninhos.

Numa relação de competição entre duas espécies pode haver também uma competição intraespecífica quando elementos da mesma espécie também competem entre si.

Um caso extremo de competição é denominada *amensalismo* quando a presença de uma espécie prejudica a outra porém, a outra é indiferente à presença da primeira.

### Modelo de Volterra para competição

O modelo mais simples de competição entre duas espécies é dado quando supomos que o efeito da competição seja modelado também via lei da ação das massas (a taxa de crescimento de cada espécie é reduzida por um fator proporcional à população da outra), ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = by - \beta xy \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Podemos observar que no modelo 6.19, se não tivéssemos competição então, a população de cada espécie cresceriam exponencialmente. Se considerarmos que existe também uma competição entre elementos da mesma espécie, então a taxa de crescimento de cada espécie é inibida de maneira linear pelas duas populações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy - \gamma x^2 \\ \frac{dy}{dt} = by - \beta xy - \sigma y^2 \end{cases} \quad (6.20)$$

onde, os parâmetros  $a, b, \alpha, \beta, \gamma$  e  $\sigma$  são positivos e  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Vamos analisar o modelo 6.20, e deixar para o leitor a análise de 6.19.

O sistema 6.20 não tem necessariamente uma solução analítica e, neste caso específico, um estudo qualitativo das soluções é imprescindível.

Os pontos de equilíbrio de 6.20 são obtidos pelas intersecções das isóclinas do sistema:

$$\begin{cases} ax - \alpha xy - \gamma x^2 = 0 \\ by - \beta xy - \sigma y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}x \\ y = 0 \text{ ou } y = \frac{b}{\sigma} - \frac{\beta}{\sigma}x \end{cases}$$

Obtemos, então, os seguintes pontos críticos:

$P_0^* = (0, 0)$  -obtido pela intersecção das retas  $x = 0$  e  $y = 0$ ;

$P_1^* = (0, \frac{b}{\sigma})$  -obtido pela intersecção das retas  $x = 0$  e  $y = \frac{b}{\sigma} - \frac{\beta}{\sigma}x$ ;

$P_2^* = (\frac{a}{\gamma}, 0)$  -obtido pela intersecção das retas  $y = 0$  e  $y = \frac{a}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}x$ ;

$P_3^* = (\frac{a\sigma - b\alpha}{\gamma\sigma - \alpha\beta}, \frac{b\gamma - a\beta}{\gamma\sigma - \alpha\beta})$  -obtido pela intersecção das retas  $y = \frac{a}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}x$  e  $y = \frac{b}{\sigma} - \frac{\beta}{\sigma}x$ , desde que  $\gamma\sigma - \alpha\beta \neq 0$ .

1) O ponto  $P_0^* = (0, 0)$  é instável pois o sistema linearizado em torno deste ponto é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = by \end{cases}$$

onde,  $\lambda_1 = a > 0$  e  $\lambda_2 = b > 0$  são as raízes do polinômio característico associado ao sistema.

2) Para analisar o ponto  $P_1^* = (0, \frac{b}{\sigma})$ , tomamos a mudança de variáveis  $x = u$  e  $y = v + \frac{b}{\sigma}$  no sistema 6.20, e obtemos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au - \alpha u(v + \frac{b}{\sigma}) - \gamma u^2 \\ \frac{dv}{dt} = b(v + \frac{b}{\sigma}) - \beta u(v + \frac{b}{\sigma}) - \sigma(v + \frac{b}{\sigma})^2 \end{cases} \quad (6.21)$$

A linearização do sistema 6.21 fornece

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(a - \frac{\alpha b}{\sigma}) \\ \frac{dv}{dt} = -bv - \frac{\beta b}{\sigma}u \end{cases}$$

e o polinômio característico associado é  $P(\lambda) = [(a - \frac{\alpha b}{\sigma}) - \lambda](-b - \lambda)$  com raízes  $\lambda_1 = (a - \frac{\alpha b}{\sigma})$  e  $\lambda_2 = -b$ .

Como  $\lambda_2$  é sempre negativo, se  $\alpha b > a\sigma \iff \frac{\alpha}{\sigma} > \frac{a}{b}$  então  $\lambda_1 < 0$  e o ponto  $P_1^* = (0, \frac{b}{\sigma})$  será assintoticamente estável. Por outro lado, se  $\frac{b}{\sigma} < \frac{a}{\alpha}$  então  $P_1^*$  será instável (ponto de sela).

3) Para o ponto  $P_2^* = (\frac{a}{\gamma}, 0)$ , com análise análoga à anterior obtemos os autovalores  $\lambda_1 = (b - \frac{\beta a}{\gamma})$  e  $\lambda_2 = -a$ . Então,  $P_2^*$  será assintoticamente estável se, e somente se,  $b\gamma < a\beta \iff \frac{a}{\gamma} > \frac{b}{\beta}$  e será instável se  $\frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\beta}$ .

4) Para que o ponto  $P_3^* = \left(\frac{a\sigma - b\alpha}{\gamma\sigma - \alpha\beta}, \frac{b\gamma - a\beta}{\gamma\sigma - \alpha\beta}\right)$  com  $\gamma\sigma - \alpha\beta \neq 0$  esteja no primeiro quadrante, é necessário que  $x^* = \frac{a\sigma - b\alpha}{\gamma\sigma - \alpha\beta} > 0$  e  $y^* = \frac{b\gamma - a\beta}{\gamma\sigma - \alpha\beta} > 0 \implies$

$$[(a\sigma - b\alpha) > 0 \quad \text{e} \quad (\gamma\sigma - \alpha\beta) > 0] \text{ ou } [(a\sigma - b\alpha) < 0 \quad \text{e} \quad (\gamma\sigma - \alpha\beta) < 0]$$

e

$$[(b\gamma - a\beta) > 0 \quad \text{e} \quad (\gamma\sigma - \alpha\beta) > 0] \text{ ou } [(b\gamma - a\beta) < 0 \quad \text{e} \quad (\gamma\sigma - \alpha\beta) < 0]$$

(6.22)

ou seja,

se  $(\gamma\sigma - \alpha\beta) > 0$ , devemos ter  $(a\sigma - b\alpha) > 0$  e  $(b\gamma - a\beta) > 0$ ;

se  $(\gamma\sigma - \alpha\beta) < 0$ , devemos ter  $(a\sigma - b\alpha) < 0$  e  $(b\gamma - a\beta) < 0$ .

A mudança de variáveis  $x = u + x^*$  e  $y = v + y^*$  no sistema 6.20 fornece um sistema quase-linear, cujo linearizado correspondente é

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\gamma x^* u - \alpha x^* v \\ \frac{dv}{dt} = -\beta y^* u - \sigma y^* v \end{cases} \quad (\text{verifique})$$

O polinômio característico da matriz dos coeficientes é

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (\gamma x^* + \sigma y^*)\lambda + (\gamma\sigma - \alpha\beta) x^* y^*$$

e suas raízes são

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(\gamma x^* + \sigma y^*) \pm [(\gamma x^* + \sigma y^*)^2 - 4(\gamma\sigma - \alpha\beta) x^* y^*]^{\frac{1}{2}}$$

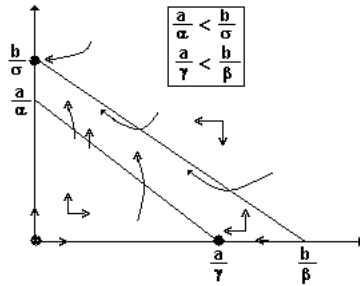
Podemos observar que o discriminante  $\Delta$  é sempre positivo o que implica que as raízes são números reais. De fato,

$$\Delta = (\gamma x^* - \sigma y^*)^2 + 4\alpha\beta x^* y^* > 0$$

As relações 6.22 dizem respeito às posições das isóclinas formadas pelas retas  $y = \frac{a}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}x$  e  $y = \frac{b}{\sigma} - \frac{\beta}{\sigma}x$ . Dependendo da posição destas retas temos quatro configurações distintas e, conseqüentemente, naturezas diversas para os pontos críticos correspondentes. Procuramos deixar este estudo mais claro nos diagramas que seguem:

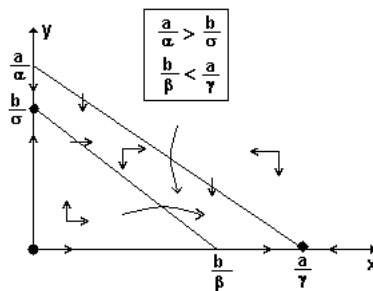
**Observação:** O "*Princípio de Exclusão Competitiva*", também chamada *Lei de Gause*, estabelece que duas espécies em estado de competição forte não podem coexistir - uma delas sempre será extinta.

No caso analisado em que o ponto  $P_3^* = (x^*, y^*)$  é estável temos que  $\left[\frac{a}{\alpha} < \frac{b}{\sigma} \quad \text{e} \quad \frac{a}{\gamma} < \frac{b}{\beta}\right] \implies \gamma\sigma > \alpha\beta$  e isto indica que os fatores de competição  $\alpha$  e  $\beta$  são relativamente pequenos. Estabilidade com espécies competindo é frequentemente encontrada entre peixes: tilápias e carpas, entre pássaros: sabiás e sanhaços.



$y$  sobrevive e sua população tende a  $y^* = \frac{b}{\sigma}$   
 $x$  será extinta, a menos que  $y_0 = 0 \Rightarrow x$  tende a  $\frac{a}{\gamma}$

Figura 6.9:  $(0, 0)$  nó instável  
 $(0, \frac{b}{\sigma})$  nó assintoticamente estável  
 $(\frac{a}{\gamma}, 0)$  ponto de sela (instável)



$x$  sobrevive e sua população tende a  $x^* = \frac{a}{\gamma}$   
 $y$  será extinta, a menos que  $x_0 = 0 \Rightarrow y$  tende a  $\frac{b}{\sigma}$

Figura 6.10:  $(0, 0)$  nó instável  
 $(0, \frac{b}{\sigma})$  ponto de sela (instável)  
 $(\frac{a}{\gamma}, 0)$  nó assintoticamente estável

**Projeto 6.3** Estude o modelo 6.19, onde não há competição entre elementos da mesma espécie. Dê um exemplo real.

**Projeto 6.4** Estude o modelo de amensalismo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \gamma x^2 \\ \frac{dy}{dt} = by - \beta xy \end{cases}$$

## Mutualismo

O mutualismo é uma interação de cooperação entre espécies, ou seja, elas se beneficiam mutuamente. Este tipo de relação também é chamado

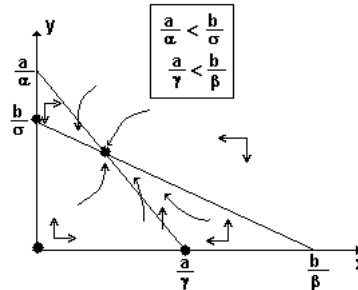


Figura 6.11:  $(0, 0)$  nó instável  
 $(0, \frac{b}{\sigma})$  ponto de sela (instável)  
 $(\frac{a}{\gamma}, 0)$  ponto de sela (instável)  
 $(x^*, y^*)$  nó assintoticamente estável -  
 as duas espécies sobrevivem e tendem a  $(x^*, y^*)$

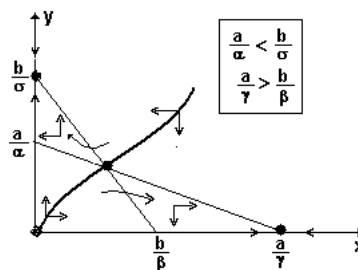


Figura 6.12:  $(0, 0)$  nó instável  
 $(0, \frac{b}{\sigma})$  nó assintoticamente estável  
 $(\frac{a}{\gamma}, 0)$  nó assintoticamente estável  
 $(x^*, y^*)$  ponto de sela instável - haverá extinção de uma das espécies, dependendo das condições iniciais das populações. Só haverá coexistência das espécies se a condição inicial estiver na curva separatriz que é composta das duas órbitas que convergem para  $(x^*, y^*)$

*simbiose* ou cooperação e é muito frequente e importante na natureza.

### Modelo de mutualismo de lotka-Volterra sem autoinibição

O modelo de Lotka-Volterra para o fenômeno de simbiose é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} \quad (6.23)$$

onde, os coeficientes  $a, b, \alpha$  e  $\beta$  são todos estritamente positivos.

Podemos observar diretamente do sistema 6.23 que a ausência de uma espécie conduz a outra à extinção, ou seja, a interação entre elas é obrigatória.

As isóclinas do modelo são dadas pelas retas ortogonais  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \frac{a}{\alpha}$  e  $x = \frac{b}{\beta}$  e os pontos de equilíbrio são apenas dois:  $P_0^* = (0, 0)$  e  $P_1^* = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ .

A matriz jacobiana do sistema é

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} (-a + \alpha y) & \alpha x \\ \beta x & (-b + \beta x) \end{bmatrix}$$

Para o ponto de equilíbrio  $P_0^* = (0, 0)$ ,

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

Neste caso, o polinômio característico é dado por  $P(\lambda) = (-a - \lambda)(-b - \lambda)$  cujas raízes são  $\lambda_1 = -a < 0$  e  $\lambda_2 = -b < 0$  e, portanto, o ponto  $P_0^* = (0, 0)$  é assintoticamente estável.

Para o ponto  $P_1^* = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ , temos

$$J\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha b}{\beta} \\ \frac{\beta a}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o polinômio característico é  $P(\lambda) = \lambda^2 - ab$ , donde as raízes são  $\lambda_1 = \sqrt{ab} > 0$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{ab} < 0$ , logo o ponto  $P_1^*$  é um ponto de sela (instável). Isto significa que populações baixas não podem sobreviver enquanto que populações altas tendem a crescer. As órbitas no plano de fase são obtidas como soluções da equação autônoma de variáveis separadas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by + \beta xy}{-ax + \alpha xy} = \frac{y(-b + \beta x)}{x(-a + \alpha y)} \quad (6.24)$$

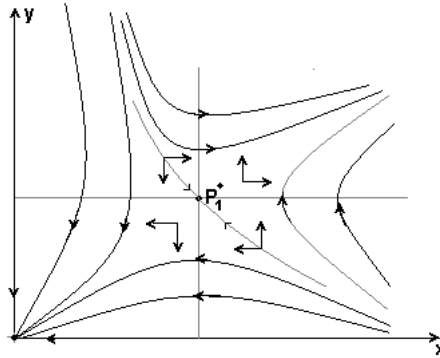


Figura 6.13: Órbitas do modelo de mutualismo de Lotka-Volterra

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{(-a + \alpha y)}{y} = \int \frac{(-b + \beta x)}{x}$$

ou seja, as órbitas são as curvas

$$-a \ln y + \alpha y = -b \ln x + \beta x + k$$

Como o ponto de equilíbrio é uma sela, existe uma *separatriz*, isto é, uma órbita que converge para o ponto.

**Projeto 6.5** Analise os modelos de simbiose

1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = by + \beta xy \end{cases}$$

onde  $a, b, \alpha, \beta$  positivos.

2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \left( 1 - \frac{x}{K_1} + \alpha \frac{y}{K_1} \right) \\ \frac{dy}{dt} = by \left( 1 - \frac{y}{K_2} + \beta \frac{x}{K_2} \right) \end{cases}$$

onde os parâmetros são todos constantes e positivos.

Devemos observar que nem sempre as interações encontradas na natureza são de um dos tres tipos descritos na forma absoluta: presa-predador, competição e mutualismo; Uma relação de mutualismo pode converter-se



em predação caso uma das espécies diminui muito em relação à outra como é o caso de formigas e pulgões. Num ambiente normal e equilibrado, as formigas pastoreiam os pulgões e também servem de transporte, levando-os para habitar novos brotos e, como simbiose se alimentam de seus excrementos. Quando os alimentos das formigas se tornam escassos então elas se alimentam dos pulgões. Também podemos encontrar espécies de presas que se alimentam das crias dos predadores. Ainda, uma relação de competição pode vir a se transformar em cooperação se o ambiente favorecer.

De maneira geral os *sinais* das derivadas parciais  $\frac{\partial F}{\partial y}$  e  $\frac{\partial G}{\partial x}$  do modelo geral de Kolmogorov 6.8 definem, pelo menos *localmente*, o tipo de relação existente.

	<b>Relação</b>	$\frac{\partial F}{\partial y}$	$\frac{\partial G}{\partial x}$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = xF(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yG(x, y) \end{array} \right. \implies$	<i>Predação</i>	-	+
	<i>Competição</i>	-	-
	<i>Cooperação</i>	+	+
	<i>Amensalismo</i>	0	-
	<i>Comensalismo</i>	0	+

Quando consideramos os modelos de Lotka-Volterra as funções  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  são lineares, e as relações entre as espécies  $x(t)$  e  $y(t)$  ficam então dependentes dos sinais dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ :

	<b>Relação</b>	$\frac{\partial F}{\partial y} = \alpha$	$\frac{\partial G}{\partial x} = \beta$
$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y) = x(\alpha y + a + \gamma x) \\ G(x, y) = y(b + \beta x + \sigma y) \end{array} \right. \implies$	<i>Predação</i>	$\alpha < 0$	$\beta > 0$
	<i>Competição</i>	$\alpha < 0$	$\beta < 0$
	<i>Cooperação</i>	$\alpha > 0$	$\beta > 0$

Com autoinibição de  $x$  se  $\gamma < 0$ ;

Com autoinibição de  $y$  se  $\sigma < 0$ .



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bassanezi, R. C. , Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, Edit. Contexto, 2006, 3ª Ed., S. Paulo., Edit. Contexto, 2007, 3ª Ed., S. Paulo.
- [2] Bassanezi, R. C. e W. C. Ferreira Jr, Equações diferenciais com aplicações, Edit. Harbra, 1988, S. Paulo (Esgotado).
- [3] Edelstein-Keshet, L, Mathematical Models in Biology; Random House/ New York, 1988.
- [4] Murray, J. D, Mathematical Biology, Springer-Verlag, USA, 1990.
- [5] Braun, M., Equações diferenciais e suas aplicações, Edit. Campus, Rio de Janeiro, 1979.
- [6] Malba Tahan, O homem que calculava, Edit. Record, Rio de Janeiro, 1983.
- [7] González Guzmán, J. Ecología Matemática, Vol. 3, Pont. Univ. Católica de Valparaiso, Chile, 2006.
- [8] May, R. M. Stability and Complexity in Model Ecosystem, Princeton Univ. Press, 2001.