Ensino & Informação

Prof: Altamir A. R. Araldi

Revista®

Cálculo Diferencial e Integral

Origem: Wikipédia.

Cálculo

- Teorema fundamental
- Limite de funções
- Continuidade
- Teorema do valor médio
- Teorema de Rolle

Cálculo diferencial

Cálculo integral

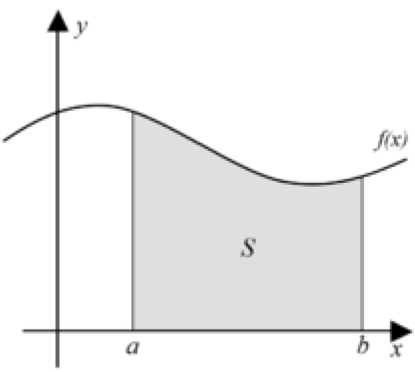
Série

Cálculo vetorial

Cálculo com múltiplas variáveis

Cálculo especializado

O **Cálculo Diferencial e Integral**, também chamado de **cálculo infinitesimal**, ou simplesmente **Cálculo**, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada.



O cálculo permite calcular a área da região *S*.

O cálculo foi criado como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas. Desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes. O Cálculo auxilia em vários conceitos e definições na matemática,química, física clássica, física moderna e economia. O estudante de cálculo deve ter um conhecimento em certas áreas da matemática, como funções, geometria e trigonometria, pois são a base do cálculo. O cálculo tem inicialmente três "operações-base", ou seja, possui áreas iniciais como o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e aintegral de diferenciais.

A integral indefinida também pode ser chamada de antiderivada, uma vez que é um processo que inverte a derivada de funções. Já a integral definida, inicialmente definida como Soma de Riemann, estabelece limites de integração, ou seja, é um processo estabelecido entre dois intervalos bem definidos, daí o nome integral definida.

Com o advento do "Teorema Fundamental do Cálculo" estabeleceu-se uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O professor de Isaac Newton em Cambridge, Isaac Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Foram Leibniz e Newton que exploraram essa relação e a utilizaram para transformar o cálculo em um método matemático sistemático. Particularmente ambos viram que o Teorema Fundamental os capacitou a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de soma (método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss).

Indice

História

A história do cálculo encaixa-se em vários períodos distintos, de forma notável nas eras antiga, medieval e moderna.

Antiguidade

De acordo com Gauss,Arquimedes, o maior matemático da antiguidade, já apresentava ideias relacionadas ao Cálculo dois séculos antes de Cristo.

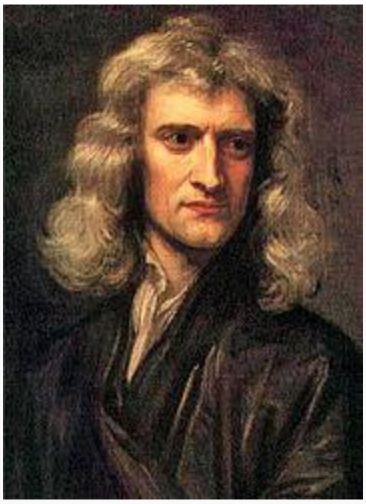
Na Antiguidade, foram introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas ideias de forma rigorosa e sistemática. A função básica do cálculo integral, calcular volumes e áreas, pode ser remontada ao Papiro Egípcio de Moscou (1850 A.C.), no qual um egípcio trabalhou o volume de um *frustum* piramidal. Eudoxo de Cnido, ou Eudoxus, (408-355 a.C.) usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes (287-212 a.C.) levou essa ideia além, inventando a heurística, que se aproxima do cálculo integral. O método da exaustão foi redescoberto na China por Liu Hui no século III, que o usou para encontrar a área do círculo. O método também foi usado por Zu Chongzhi século V, para achar o volume de uma esfera.

Idade Média

Na Idade Média, o matemático indiano Aryabhata usou a noção infinitesimal em 499 d.C. expressando-a em um problema de astronomiana forma de uma equação diferencial básica. Essa equação levou Bhāskara II no século XII a desenvolver uma derivada prematura representando uma mudança infinitesimal, e ele desenvolveu também o que seria uma forma primitiva do "Teorema de Rolle".

No século XII, o matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descobriu a derivada de polinômios cúbicos, um resultado importante no cálculo diferencial. No século XIV, Madhava de Sangamagrama, juntamente com outros matemáticos-astrônomos da Escola Kerala de Astronomia e Matemática, descreveu casos especiais da Série de Taylor, que no texto são tratadas como Yuktibhasa.

Idade Moderna



Sir Isaac Newton aplicou o cálculo às suas leis do movimento e a outros conceitos matemáticos-físicos.

Na Idade Moderna, descobertas independentes no cálculo foram feitas no início do século XVII no Japãopor matemáticos como Seki Kowa, que expandiu o método de exaustão. Na Europa, a segunda metade do século XVII foi uma época de grandes inovações. O Cálculo abriu novas oportunidades na física-matemática de resolver problemas muito antigos que até então não haviam sido solucionados. Muitos matemáticos contribuíram para essas descobertas, notavelmente John Wallis eIsaac Barrow. James Gregory proveu um caso especial do segundo teorema fundamental do cálculo em 1668.

Coube a Gottfried Wilhelm Leibniz e a Isaac Newton recolher essas ideias e juntá-las em um corpo teórico que viria a constituir o cálculo. A ambos é atribuída a simultânea e independente invenção do cálculo. Leibnitz foi originalmente acusado de plagiar os trabalhos não publicados de Isaac Newton; hoje, porém, é considerado o inventor do cálculo, juntamente com Newton. Historicamente Newton foi o primeiro a aplicar o cálculo à física ao passo que Leibniz desenvolveu a notação utilizada até os dias de hoje, a notação de Leibniz. O argumento histórico para conferir aos dois a invenção do cálculo é que ambos chegaram de maneiras distintas ao teorema fundamental do cálculo.

Gottfried Wilhelm Leibniz: o inventor do cálculo, juntamente com Newton.

Quando Newton e Leibniz publicaram seus resultados, houve uma grande controvérsia de qual matemático (e portanto que país: Inglaterra ou Alemanha) merecia o crédito. Newton derivou seus resultados primeiro, mas Leibniz publicou primeiro. Newton argumentou que Leibniz roubou ideias de seus escritos não publicados, que Newton à época compartilhara com alguns poucos membros da Sociedade Real. Esta controvérsia dividiu os matemáticos ingleses dos matemáticos alemães por muitos anos. Um exame cuidadoso dos escritos de Leibniz e Newton mostra que ambos chegaram a seus resultados independentemente, com Leibniz iniciando com integração e Newton com diferenciação. Nos dias de hoje tem-se que Newton e Leibniz descobriram o cálculo independentemente. Leibniz, porém, foi quem deu o nome cálculo à nova disciplina, Newton a chamara de "A ciência dos fluxos".

Desde o tempo de Leibniz e Newton, muitos matemáticos contribuíram para o contínuo desenvolvimento do cálculo.

Idade contemporânea

Maria Gaetana Agnesi

Na Idade Contemporânea, já no século XIX, o cálculo foi abordado de uma forma muito mais rigorosa. Foi também durante este período que ideias do cálculo foram generalizadas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Lebesgue mais tarde generalizou a noção de integral. Sobressaíram matemáticos como Cauchy, Riemann, Weierstrass e Maria Gaetana Agnesi. Esta foi autora da primeira obra a unir as ideias deIsaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre cálculo diferencial e integral [1] . É dela também a autoria da chamada "curva de Agnesi".

Princípios

Limites e Infinitesimais

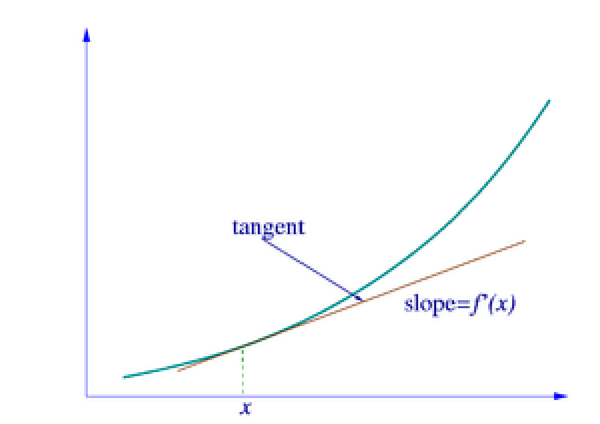
Ver artigo principal: Limite

O cálculo é comumente utilizado pela manipulação de quantidades muito pequenas. Historicamente, o primeiro método de utilizá-lo era pelasinfinitesimais. Estes objetos podem ser tratados como números que são, de alguma forma, "infinitamente pequenos". Na linha numérica, isso seria locais onde não é zero, mas possui "zero" de distância de zero. Nenhum número diferente de zero é um infinitesimal, porque sua distância de zero é positiva. Qualquer múltiplo de um infinitesimal continua sendo um infinitesimal. Em outras palavras, infinitesimais não satisfazem a propriedade arquimediana. Deste ponto de vista, o cálculo é uma coleção de técnicas para manipular infinitesimais. Tal pensamento foi ignorado no século XIX porque era muito difícil ter a noção precisa de uma infinitesimal. Entretanto, o conceito foi reutilizado no século XX com a introdução da análise não padronizada, a qual propiciou fundamentos sólidos para a manipulação de infinitesimais.

No século XIX, as infinitesimais foram substituídas pelos limites. Limites descrevem o valor de uma função em um certo ponto em termos dos valores de pontos próximos. Eles capturam o comportamento numérico em baixa escala, como nas infinitesimais, mas utilizando números ordinários. Deste ponto de vista, calculo é uma coleção de técnicas para a manipulação de certos limites. As infinitesimais foram substituídas por números muito pequenos, e o comportamento infinitamente pequeno da função é encontrado pelo limite de números cada vez menores. Limites são fáceis de serem colocados em fundações rigorosas e, por esse motivo, são a abordagem padrão para o cálculo.

Derivadas

Ver artigo principal: Derivada



Reta tangente em (x, $f'(x)$).

O cálculo diferencial é o estudo da definição, propriedade e aplicações da derivada ou deslocamento de um gráfico. O processo de encontrar a derivada é chamado "diferenciação". Em linguagem técnica, a derivada é um operador linear, o qual forma uma nova função a partir da função original, em que cada ponto da nova função é o deslocamento da função original.

O conceito de derivada é fundamentalmente mais avançado do que os conceitos encontrados em álgebra. Nessa matéria, os estudantes aprendem sobre funções em que o número de entrada gera um número de saída. Por exemplo, se no dobro da função é inserido 3, então a saída é 6, enquanto se a função é quadrática, e é inserido 3, então a saída é 9. Mas na derivada, a entrada é uma função e a saída é outra função. Por exemplo, se na derivada é colocada uma função quadrada, então a saída é o dobro de uma função, porque o dobro da função fornece o deslocamento da função quadrática em qualquer ponto dado da função.

Para entender a derivada, os estudantes precisam aprender a notação matemática. Na notação matemática, um símbolo comum para a derivada da função é um sinal de apóstrofo chamado "linha". Então a derivada de *f* é *f* ' (f linha). Isso em notação matemática seria escrito assim:

$$f(x) = x^2$$
$$f'(x) = 2x.$$

Se a função de entrada é o tempo, então a derivada dessa função é a taxa em que a função é alterada.

Se a função é linear, ou seja, o gráfico da função é uma linha reta, então a função pode ser escrita como *y* = *m x* + *b*, onde:

$$m = \frac{\text{variação em } y}{\text{variação em } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Isto da o valor exato para a variação da linha reta. Se a função não é uma linha reta, então a variação em *y* é dividida pela variação em *x*, e nós precisamos do cálculo para encontrar o valor exato em cada ponto da função. (Note que *y* e *f*(*x*) são duas notações diferentes para a mesma coisa: a saída da função). Uma linha entre dois pontos em uma curva é chamado de reta secante. A variação da reta secante pode ser expressada como:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

onde as coordenadas do primeiro ponto é (x, f(x)) e h é a distância horizontal entre os dois pontos.

Para determinar o deslocamento da curva, nós usamos os *limites*:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Em um caso particular, nós encontramos o deslocamento da função quadrática no ponto em que a entrada é 3 e a saída é 9 (Ex.: $f(x) = x^2$, então $f(3) = 9$).

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6+h) \\ &= 6 \end{aligned}$$

O deslocamento da função quadrática no ponto (3, 9) é 6, isto é, ele cresce seis vezes mais rápido em y do que em x e está indo para a direita.

Integrais

Ver artigo principal: Integral

O **Cálculo Integral** é o estudo das definições, propriedades, e aplicações de dois conceitos relacionados, as *integrais indefinidas* e as *integrais definidas*. O processo de encontrar o valor de uma integral é chamado *integração*. Em linguagem técnica, o calculo integral estuda dois operadores lineares relacionados.

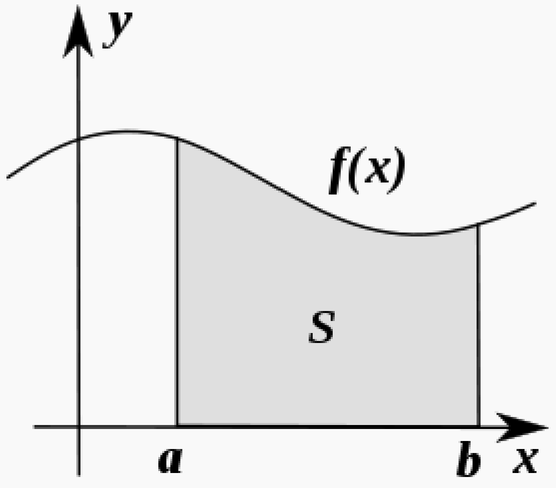
A **integral indefinida** é a *antiderivada*, o processo inverso da derivada. F é uma integral indefinida de *f* quando *f* é uma derivada de F. (O uso de letras maiúsculas e minúsculas para uma função e sua integral indefinida é comum em cálculo.)

A **integral definida** insere uma função e extrai um número, o qual fornece a área entre o gráfico da função e o eixo do x. A definição técnica da integral definida é o limite da soma das áreas dos retângulos, chamada Soma de Riemann.

Um exemplo motivacional é a distância (**D**) viajada em um determinado tempo (**t**).

$$\mathrm{D} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{t}$$

Se a velocidade (**V**) é constante, somente multiplicação é necessária, mas se a velocidade varia, então precisamos de um método mais poderoso para encontrar a distância. Um método é a aproximação da distância viajada pela divisão do tempo em muito mais intervalos de tempo, e então multiplicando o tempo em cada intervalo por uma das velocidades naquele intervalo, e então fazer uma Soma de Riemann das distâncias aproximadas viajadas em cada intervalo. A ideia básica é que se somente um pequeno tempo passar, então a velocidade vai permanecer praticamente a mesma. Entretanto, uma Soma de Riemann somente da uma aproximação da distância viajada. Nós precisamos pegar o limite de todas as Somas de Riemann para encontrar a distância viajada exata.



Integração pode ser explicada como a medida da área entre uma curva, definida por *f*(*x*), entre dois pontos (aqui *a* e *b*).

Se *f(x)* no diagrama da esquerda representa a velocidade variando de acordo com o tempo, a distância viajada entre os tempos representados por *a* e *b* é a área da região escura *s*.

Para aproximar a área, um método intuitivo seria dividir em distâncias entre *a* e *b* em um número de segmentos iguais, a distância de cada segmento representado pelo símbolo *?x*. Para cada segmento menor, nós podemos escolher um valor da função *f*(*x*). Chame o valor *h*. Então a área do retângulo com a base *?x* e altura *h* dá a distância (tempo *?x* multiplicado pela velocidade *h*) viajado naquele segmento. Associado com cada segmento é o valor médio da função sobre ela,*f(x)*=h. A soma de todos os retângulos dados é uma aproximação da área entre o eixo e a curva, o qual é uma aproximação da distância total viajada. Um valor menor para *?x* nos dará mais retângulos e, na maioria dos casos uma melhor aproximação, mas para uma resposta exata nós precisamos fazer o limite em *?x* tender a zero.

O símbolo da integração é $\int$, um *S* alongado (que significa "soma"). A integral definida é escrita da forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

e lida como "a integral de *a* até *b* de *f*-de-*x* em relação a *x*."

A integral indefinida, ou antiderivada, é escrita da forma:

$$\int f(x)\,dx.$$

Desde que a derivada da função $y = x^2 + C$ é $y' = 2x$ (onde *C* é qualquer constante), então:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Conceitos básicos

Função, domínio e imagem

Seja um conjunto de pontos **A**, cujos membros são os números em $\mathbb{R} \Rightarrow \{-\infty, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots, +\infty\}$, então tomamos x e denominamo-la **variável independente**, visto que, arbitrariamente, lhe podemos atribuir qualquer valor em $\mathbb{R}$ e portanto dizemos que:

A é o **domínio** da variável x. [2]

Da mesma forma, admitamos um conjunto de pontos **B**, cujos membros são números que são obtidos única e exclusivamente por um conjunto de regras matemáticas f, quando números arbitrários em **A** lhe são transferidos; visto que há um único valor assumido para cada valor arbitrário transferido a f, dizemos que:

B é **função** de **A**.

Sendo **B** obtido através das regras de f :

A é **domínio** da função f.

Da mesma forma, como **B** é restrito aos valores definidos por **A** e às regras definidas por f, os seus elementos espelham estas condições, portanto, podemos dizer que:

B é **imagem** da função f.

Extensões de domínios

Observemos a expressão: $\sqrt{12-x}$ Note que assim que atribuirmos valores a x, a mesma assumirá valores inválidos, valores de raízes quadradas de números negativos, para sanar este problema, poderemos atribuir uma faixa de valores válidos para o domínio de x, então teremos:

$$\sqrt{12-x}, x \leq 12$$

Assim, teremos um domínio restrito a valores iguais ou menores que 12, portanto, incluindo-o, este extremo ao qual pertence o valor 12 chamamos de **extremo fechado**.

Temos uma situação semelhante, porém com uma sutil diferença, quando temos que fazer: $\log x$, neste caso, temos que restringir o valor 0 e todos os números abaixo dele, desta forma:

$$\log x, x > 0$$

Poderemos atribuir apenas valores maiores que 0, uma vez que este valor não pertence ao conjunto de números que podem ser atribuídos à variável, chamamos este de**extremo aberto**.

Notações

O conjunto de números **B** $\{-\infty, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots, +\infty\}$ dos quais y_n dependem do conjunto **A** $\{-\infty, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots, \infty\}$ de onde temos x_n,estabelecemos o par de números $\{x_n, y_n\}$, ou simplesmente:

$$(x, y)$$

Este é chamado de **par ordenado**.

Sendo também f a representação dos valores de (x, y), então podemos dizer que:

$$y = f(x)$$

Sendo $f(x)$ o valor de y quando definido pelas operações em f.

Faixas de valores que delimitam os domínios podem ser representados com desigualdades, como nos exemplos abaixo:

$$-2 < x < 4; -12 \leq x < 8$$

Porém, os extremos podem ser colocados em um par entre delimitadores de forma que, para os extremos fechados usamos os delimitadores [ou], para os extremos abertos usamos (ou), habilitando-nos a identificar os extremos mais claramente, desta forma podemos identificar os domínios do exemplo acima desta forma:

$$(-2, 4); [-12, 8)$$

Também é comum usar colchetes invertidos para extremos abertos:

$$]-2, 4[; [-12, 8[$$

Operações com funções

Consideremos duas funções *f* e *g*; admitindo que as duas são, intuitivamente, expressões que se traduzem em valores, podemos dizer que:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f : g)(x) = f(x) : g(x)$$

Sendo *D(f)* o domínio da função *f* e *D(g)* o domínio da função *g*, o domínio da função resultante das operações acima é sempre:

$$D(f) \cap D(g)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Ver artigo principal: [Teorema Fundamental do Cálculo]

O teorema fundamental do cálculo afirma que a diferenciação e a integração são operações inversas. Mais precisamente, o teorema conecta os valores de antiderivadas ao valor de integrais definidas. Por ser usualmente mais fácil computar uma antiderivada do que aplicar a definição de uma integral definida, o teorema fundamental do cálculo provê uma forma prática de computar integrais definidas. Pode também ser interpretado como uma afirmação precisa do fato que a diferenciação é o inverso da integração.

É afirmado pelo teorema fundamental do cálculo que: Se uma função *f* é contínua no intervalo [*a*, *b*] e se *F* é uma função cuja derivada é *f* no intervalo (*a*, *b*), então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Além disso, para cada x no intervalo (*a*, *b*) temos que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

E, seu Corolário pode ser transcrito da seguinte forma:

Considere *f* uma função contínua de valores reais definida em um intervalo fechado [*a*, *b*]. Se *F* é uma função tal que $f(x) = F'(x)$ para todo *x* em [*a*, *b*]

então

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

e

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt.$$

Essa descoberta, realizada por Newton e Leibniz, que se basearam nos resultados de um trabalho anterior de Isaac Barrow, exerceu um papel chave na massiva proliferação de resultados analíticos que se seguiram após seus trabalhos ficarem conhecidos. O Teorema fundamental do cálculo provê um método algébrico de computar muitas integrais definidas sem executar processos limite—simplesmente por encontrar fórmula para antiderivadas.

Aplicações

O cálculo é usado em todos os ramos das ciências físicas, na ciência da computação, estatística, engenharia, economia, medicina e em outras áreas sempre que um problema possa ser modelado matematicamente e uma solução ótima é desejada.

A Física faz uso intensivo do cálculo. Todos os conceitos na mecânica clássica são interrelacionados pelo cálculo. A massa de um objeto de densidade conhecida, o momento de inércia dos objetos, assim como a energia total de um objeto dentro de um sistema fechado podem ser encontrados usando o cálculo. Nos sub-campos da eletricidade emagnetismo, o cálculo pode ser usado para encontrar o fluxo total de campos eletromagnéticos. Um exemplo mais histórico do uso do cálculo na física é a segunda lei de Newton que usa a expressão "taxa de variação" que se refere à derivada: *A* **taxa de variação** *do momento de um corpo é igual à força resultante que age sobre o corpo e na mesma direção.* Até a expressão comum da segunda lei de Newton como Força = Massa × Aceleração envolve o cálculo diferencial porque a aceleração pode ser expressada como a derivada da velocidade. A teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a teoria da relatividade geral de Einstein também são expressas na linguagem do cálculo diferencial. A química também usa o cálculo para determinar as variações na velocidade das reações e no decaimento radioativo.

O cálculo pode ser usado em conjunto com outras disciplinas matemáticas. Por exemplo, ele pode ser usado com a álgebra linear para encontrar a reta que melhor representa um conjunto de pontos em um domínio.

Na esfera da medicina, o cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação, e até mesmo determinar o tamanho máximo de moléculas que são capazes de atravessar a membrana plasmática em uma determinada situação, normal ou induzida, em células.

Na geometria analítica, o estudo dos gráficos de funções, o cálculo é usado para encontrar pontos máximos e mínimos, a inclinação, concavidade e pontos de inflexão.

Na economia o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal.

O cálculo pode ser usado para encontrar soluções aproximadas de equações, em métodos como o método de Newton, iteração de ponto fixo e aproximação linear. Por exemplo, naves espaciais usam uma variação do método de Euler para aproximar trajetórias curvas em ambientes de queda livre.

Ver também

A Wikipédia possui o **Portal da Matemática**.

- Tabela de derivadas
- Tábua de integrais
- Régua de cálculo
- Série
- Cálculo com polinômios
- Geometria diferencial
- Cálculo com múltiplas variáveis

- Análise não padronizada
- Pré-cálculo (educação matemática)
- Integral produto
- Cálculo estocástico

Referências

1. About Maria Agnesi
2. João Jeronimo & Marcos Antônio Nunes de Moura. *Introdução ao Cálculo vol II*. 20 de março de 2013. 158 págs. Creative Commons Atribuição-Partilha (versão 3.0). Acesso em 24 jul. 2013.

Bibliografia

Cálculo básico

- Medeiros, Valeria Zuma (2005). Thomsom Pioneira, 1ª edição. *Pré-Cálculo*
- Coelho, Flavio Ulhoa (2005). Saraiva, 1ª edição. *Curso Básico de Cálculo*
- Mendelson, Elliot (2007). Bookman Companhia Editora, 2ª edição. *Introdução ao Cálculo*
- Guidorizzi, Hamilton; LTC; 5ª edição, 2001; 4 vols.
- Piskounov, Nikolai Semenovich; Edições Lopes da Silva; 12ª edição, 2002; 2 vols.
- Goldstein, Larry J./Schneider, David I. (2007); Hemus; 1ª edição, volume único. *Cálculo e suas Aplicações* ISBN 8528905330
- Stewart, James (2002). Thomsom Pioneira, 5ª edição, 2 vols. *Cálculo*
- Thomas, George B. (2002). Addison Wesley Brasil, 10ª edição, 2 vols. *Cálculo*
- Anton, Howard A. (2007). Bookman Companhia Editora, 8ª edição, 2 vols. *Cálculo*
- Barboni, Ayrton/Paulette, Walter (2007). LTC, 1ª edição. *Fundamentos da Matemática: Cálculo e Análise*
- Ayres Jr., Frank/Mendelson, Elliot (2006), Bookman Companhia Editora, 4ª edição. *Cálculo*, col. Schaum
- Bradley, Gerald L./Hoffman, Laurence D. (2008). LTC, 9ª edição. *Cálculo:Um Curso Moderno e suas Aplicações*
- Lopes, Hélio/Malta, Iaci/Pesco, Sinesio (2002). Loyola, 1ª edição, 2 vols. *Cálculo a uma Variável*
- Hughes-Hallett, Deborah (2005). LTC, 2ª edição. *Cálculo Aplicado*
- Larson, Ron/Edwards, Brruce (2005). LTC, 6ª edição *Cálculo com Aplicações*
- Avila, Geraldo (2003). LTC, 7ª edição, 3 vols. *Cálculo das Funções de uma Variável*

- Hallett, Hughes (2004). LTC, 7ª edição. *Cálculo de uma Variável*
- Salas/Hille/Etgen (2005). LTC, 9ª edição, 2 vols. *Cálculo*
- Apostol, Tom (2004). Editora Reverté, 2ª edição. *Cálculo*, Vol. 1.
- Courant, R./John, F. Springer (1998) *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. 1.
- Spivak, M. Publish or Perish (2008) *Calculus*.

Cálculo Avançado

- Wrede, Robert C./Spiegel, Murray R. (2003). Bookman Companhia Editora, 2ª edição *Cálculo Avançado*
- Hellmeister, Ana Catarina Pontone, organizadora. EDUSP, 2ª edição (2006) *Cálculo Integral Avançado*
- Bortolossi, Humberto Jose (2002). Loyola, 1ª edição *Cálculo a Várias Variáveis: Uma Introdução à Teoria da Otimização*
- Spivak, Michael (2003). Ciência Moderna, 1ª edição *Cálculo em Variedades*

Ligações externas

Livros on-line

- Differential and Integral Calculus vol 1 - Richard Courant (em inglês) , cujos direitos autorais expiraram.
- Differential and Integral Calculus vol 2 - Richard Courant (em inglês) , cujos direitos autorais expiraram.
- MATHEMATICA NO ENSINO DE CÁLCULO: Uma Abordagem Computacional pelo prof. Inder Jeet Taneja da UFSC (em português)
- Cálculo Diferencial a Várias Variáveis:Uma Introdução à Teoria de Otimização (em português)
- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA RETA - Notas de Aula pelo prof. Plácido Z. Táboas do ICMC-USP de São Carlos (emportuguês)
- Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral de Funções Definidas em Rn (em português)
- Análise Matemática III (em português) , entrada nº 12, ou Análise Matemática III (em português) , se preferir link directo para este livro do prof. António Caetano daUniversidade de Aveiro .

Páginas na Internet

- Curso de cálculo on-line da USP (em português)
- Kit de sobrevivência em Cálculo" do departamento de Matemática da UEM (em português)
- Materiais de aula do IMECC-UNICAMP (em português)
- Cálculo com o Mathematica (em português)

- Cálculo Infinitesimal: o que é isso? (em português)
- Material para Cálculo I pelos professores Fernando Guerra e Inder Jeet Taneja da UFSC (em português)

Infinitesimais
Tópicos sobre análise

- $\sqrt{x}$ **Portal da matemática**

Categorias:

- Análise matemática
- Cálculo diferencial
- Cálculo integral